Vorschule

der

Mathematik

von

Dr. Adolph Tellkampf,

Professor und Director der höheren Bürgerschule zu Hannover.

Fünfte Auflage.

Mit neun Kupfertafeln.

Berlin.

Verlag von Rücker und Püchler.

1856.

Vorwort.

Bei'm Erscheinen einer neuen Auflage der vorliegenden Schrift hat der Verfasser im Wesentlichen nur zu wiederholen, was er über die Bestimmung derselben bereits bei den früheren Ausgaben ausgesprochen hat. Ihrer Abfassung lag der Wunsch zum Grunde, dem mathematischen Unterrichte ein ähnliches Hülfsmittel darzubieten, wie der Sprachunterricht dergleichen in den größeren Schulgrammatiken besitzt: eine nach bestimmten Gesichtspunkten übersichtlich geordnete und in einen mäßigen Band zusammengedrängte Darstellung des gesammten Lehrstoffs, soweit derselbe irgend an höheren Unterrichtsanstalten zur Anwendung kommen mag. Um diese Bestimmung zu erfüllen, mußte das Buch von der einen Seite eine größere Vollständigkeit erstreben, als das spezielle Bedürfniß dieser oder jener Anstalt sie erfordert haben würde, von der andern Seite sich aber durchgängig zu einer Kürze bequemen, die dem mündlichen Unterrichte die weitere Ausführung zu überlassen hatte. Diesen Gesichtspunkt glaubte der Verfasser, wie bei der ersten Bearbeitung, so auch bei den späteren auf das bestimmteste festhalten zu müssen; denn da es an Lehrbüchern der Mathematik, welche sich auf einen sehr mäßigen Umfange der Elemente beschränken, nicht mangelt, so schien es wenigstens nicht rathsam, gleiche Einschränkung zu üben. Mag man dem Buche auch hin und wieder seinen zu umfassenden Inhalt zum Vorwurf gemacht und manche Betrachtung, als hinausgehend über die Gränzen des gewöhnlichen Unterrichts, hinweggewünscht haben, so deutet doch die Aufnahme, welche der Schrift zu Theil geworden, auf Beistimmung von vielen andern Seiten hin. Eine entschiedene Aufforderung, auch bei dieser neuen

Auflage sich jeder unnöthigen Aenderung zu enthalten, mußte der Verfasser in dem Umstande finden, daß das Lehrbuch in mehren Anstalten dem mathematischen Unterrichte zum Grunde gelegt ist und dort auch in seiner bisherigen Gestalt noch längere Zeit hindurch benutzt werden wird. Dennoch hat er geglaubt eine wesentlich abkürzende Umarbeitung der stereometrischen Lehren nicht scheuen zu dürfen, da dieser Theil der Geometrie in der That zu weitläufig angelegt war und zum Besten des Unterrichts einer Vereinfachung dringend bedürftig erschien. Allerdings wird bei gleichzeitigem Gebrauch der gegenwärtigen mit früheren Auflagen des Lehrbuchs diese Abweichung derselben um so leichter störend werden, als auch eine durchgängige Aenderung in den Nummern der begleitenden Figuren mit der Beschränkung des Textes zusammenhängt; die Rücksicht auf den unverkennbaren Gewinn einer zweckmäßigen Vereinfachung mußte indessen die Bedenklichkeit jener Störung überwiegen. Einige minder hervortretende Abweichungen der gegenwärtigen Auflage finden sich im §. 183, wo die geometrische Ableitung der cyklischen Functionen an die Stelle der hyperbolischen Functionen getreten ist, und in einem kurzen Anhange zur ebenen Trigonometrie, um deren Anwendung auf Berechnung der Vielecke ausdrücklich hervorzuheben. Zusätze solcher Art, wie auch die vorige Auflage sie in den §§. 175, 257, 316, 318 und 370 erfahren, sind um so unbedenklicher, als sie bei Benutzung verschiedener Ausgaben keinesfalls eine Störung besorgen lassen.

In Ansehung der zahlreichen Uebungsaufgaben, welche schon in die zweite Auflage aufgenommen wurden, mag hier wiederholt werden, daß der Verfasser gerade durch diese Zugabe die practische Brauchbarkeit des Buchs zu erhöhen wünschte. Allgemein anerkannt ist der Einfluß, welchen die anhaltende Beschäftigung mit angemessenen Aufgaben auf den mathematischen Unterricht hat, indem sie die abstracten Lehren des Systems durch stete Beziehung auf concrete Fälle faßlicher und eindringlicher macht und den Schüler zu fördernder Selbstthätigkeit anregt. Deshalb haben die den einzelnen Capiteln des Buchs angehängten Aufgaben vorzugsweise die Bestimmung, den Schülern zu häuslicher Bearbeitung angewiesen zu werden, nachdem der Lehrer andere von ähnlicher Einkleidung bereits mündlich mit ihnen behandelt und mit den nöthigen Erläuterungen begleitet hat. Dieser Erläuterungen bedürfen namentlich diejenigen Aufgaben,

welche sich auf Vorstellungen und Lehren der Physik beziehen und in nicht geringer Anzahl aufgenommen sind, um eine nähere Verbindung des mathematischen mit dem physikalischen Unterrichte zu veranlassen, als solche häufig stattfindet. Von den geometrischen Aufgaben sind diejenigen, welche die einfachsten Constructionen betreffen und daher gewöhnlich als Bestandtheile des Systems angesehen werden, sogleich nach den begründenden Theoremen in den Unterricht zu ziehen und deshalb am gehörigen Orte angedeutet.

Daß übrigens die Folge, worin das Lehrbuch den Unterrichtsstoff darbietet, nach des Verfassers Ansicht nicht etwa den Lehrer binden solle oder dürfe, wird kaum zu erinnern nöthig sein. So sind z. B. die leichteren Sätze über die Inhaltsbestimmung der Figuren unbedenklich sogleich nach der Kreislehre, andere Betrachtungen dagegen — wie z. B. die Erläuterung der Gaußischen Logarithmen, die Lehrsätze über harmonische Theilung, die trigonometrische Untersuchung über die Transversalen im Dreieck (nach C. F. A. Jacobi), selbst die Ausdehnung der geometrischen Beweise auf irrationale Verhältnißglieder — einem zweiten Cursus vorzubehalten. Diese und ähnliche Parthieen des Buchs (dem Auge durch Vorsetzung des Zeichens * bemerklich gemacht) haben gar nicht die Bestimmung, für den ersten Unterricht zu dienen: sie sind vielmehr erst bei dessen nothwendiger Wiederholung aufzunehmen und ihre Stellung im Systeme wird einer guten Lehrmethode, welche anfänglich den Stoff in angemessener Beschränkung zu behandeln und allmählig zu erweitern versteht, keinen Anstoß gewähren.

Abweichungen von der herkömmlichen Ausdrucksweise sind auch in der vorliegenden Ausgabe mit Absicht möglichst vermieden und nur da beibehalten, wo nach des Verfassers Ueberzeugung die genaue Begriffsbestimmung solches forderte. Es ist dieses namentlich in der Aehnlichkeitslehre der Fall, welche von der gewöhnlichen durch ihre Grundvorstellung abweicht, für die größere Mühe aber, welche sie allerdings anfänglich in Anspruch nimmt, durch ihre Allgemeinheit und die Leichtigkeit der späteren Anwendungen reichlich entschädigt. Dieser Umstand, so wie ihre nahe Beziehung zur perspectivischen Projectionslehre, die in den höchst interessanten und folgereichen geometrischen Untersuchungen von Poncelet und Steiner so bedeutsam hervorgetreten ist, scheinen die hier durchgeführte Behandlungsart der elementaren

Aehnlichkeitslehre einer näheren Aufmerksamkeit zu empfehlen, wie sie sich denn in der That bereits der Aufnahme in einige der schätzbarsten neueren Lehrbücher der Geometrie zu erfreuen gehabt.

Unter den mathematischen Werken, welche der Verfasser bei der Bearbeitung seiner Vorschule zu Rathe gezogen, hat derselbe vorzugsweise die trefflichen Lehrbücher von Thibaut und Legendre namhaft zu machen. Zugleich fühlt er sich wiederholt dankbar zu erwähnen verpflichtet, wie er durch die Benutzung mancher in Zeitschriften oder Schulprogrammen erschienenen, schätzbaren Abhandlungen — namentlich von Gauß, Abel, Olivier, C. F. A. Jacobi, Graßmann, Egen, Grunert, Förstemann, Katzfey u. A. bei seiner Arbeit sich auf das Förderlichste unterstützt gesehen hat.

Hannover, im September 1855.

Uebersicht des Inhalts.

Allgemeine Einleitung.

Erste Abtheilung. Arithmetik.

Erstes Buch. Die Grundoperationen.

Erstes Capitel. Die ganzen Zahlen.

Zweites Buch. Die Rangoperationen.

Zweite Abtheilung. Geometrie.

Erstes Buch. Die Geometrie der Ebene.

Anhang.

Die geometrischen Oerter.

Allgemeine Einleitung.

I. **Größe.** Bei der Vergleichung mehrer Dinge, wir mögen sie nun sinnlich wahrnehmen oder nur ihre Vorstellung in uns tragen, finden wir Uebereinstimmung oder Verschiedenheit, die sich entweder auf ein Mehr oder Weniger ihres Inhalts oder auf die Beschaffenheit ihres Stoffs und endlich auf beides zugleich beziehen kann. In der ersten Rücksicht liegt der Begriff der Quantität oder Größe, in der anderen derjenige der Qualität oder Art. Insofern nun aber die Größe an anschaulichen Objecten, welche einen Raum einnehmen, in bestimmten Umrissen oder Gränzen erscheint, gesellt sich zu den Begriffen von Quantität und Qualität auch noch derjenige der Form oder Gestalt. So nennen wir ein weißes und ein schwarzes Feld des Schachbretts ihrer Größe nach übereinstimmend, ihrer Art nach verschieden; ein Pfund Silber gleichartig mit einem Loth Silber, aber dem Gewicht oder der Masse nach größer; die Erdkugel und einen Wassertropfen zugleich verschieden in Ansehung ihrer Qualität und Quantität, wenn sie auch in der Form übereinstimmend, also wegen ihrer Gestalt vergleichbar sind.

II. **Gegenstand der Mathematik.** Die Betrachtung der Dinge in Beziehung auf Größe und Gestalt ohne alle andere Rücksicht auf ihre Beschaffenheit, als die, daß man nur das Gleichartige zusammenstelle oder Größen von verschiedener Qualität zuvor dazu mache, ehe man sie vergleicht (wie verschiedene Waaren durch Angabe ihres Geldwerths), wird in ihrer ganzen Ausdehnung zu derjenigen Wissenschaft, die den Namen Mathematik (von *μάθημα*, die Kenntniß, das Wissen) erhalten hat und im Deutschen auch wohl Größenlehre genannt zu werden pflegt. Ihre sämmtlichen Untersuchungen, so verschiedenartig sie auch übrigens sein mögen,

lassen sich auf den Grundbegriff der Größe als ihren gemeinsamen Ursprung zurückführen. Form und Qualität kommen dabei nur in so weit in Betracht, als von ihnen die Größe selbst abhängig ist.

III. Endliche und unendliche Größen. Dieser Grundbegriff der Größe ist auf's Engste mit dem der Begränzung oder Endlichkeit verbunden, indem man zu deutlicher Vorstellung einer Größe nur dadurch gelangt, daß man Etwas als abgesondert von allem Gleichartigen betrachtet. Dieses ist z. B. mit der Vorstellung einer Kugel, eines Würfels, eines Jahres, Monats oder Tages der Fall, die als abgesonderte, bestimmte Theile des Raumes oder der Zeit gedacht werden. Insofern nun, als die klare Vorstellung von Größe auf derjenigen eines Begränzten, Endlichen beruht, darf man behaupten, daß Größen, die Gegenstand deutlicher Erkenntniß sein sollen, endlich sein müssen. Der Begriff unendlicher Größen, wie des Raumes und der Zeit überhaupt, drängt sich allerdings im Gegensatz jener dem Gedanken auf und kann eben deswegen von der Mathematik nicht unbeachtet bleiben. Insofern sie aber, namentlich in ihren Anfangsgründen, auf deutlichste Erkenntniß derjenigen Wahrheiten ausgeht, welche die Größe zum Gegenstande haben, wird sie zunächst nur endliche Größen zum Stoff ihrer Betrachtungen wählen müssen.

IV. Veränderung der Größe. Jede endliche Größe ist als etwas Begränztes, außer welchem sich ein anderes Begränztes gleicher Art vorstellen läßt, einer zwiefachen Veränderung, der Vermehrung oder der Verminderung fähig, je nachdem man sich dieses Andere zu ihm hinzu oder von ihm hinweg denkt. Da nun aber die Größe bei stets fortgesetzter Vermehrung doch immer eine begränzte bleibt, so kann man damit nie zu einem Größten gelangen. Eben so wenig ist es möglich, durch fortgesetzte Verminderung auf ein Kleinstes zu kommen, so lange noch eine Größe zu vermindern bleibt. Hieraus giebt sich also ein unbegränztes Zu- und Abnehmen, ein Fortschreiten in's Unendlich-Große und Unendlich-Kleine bei immer fortgesetzter Veränderung einer endlichen Größe zu erkennen, ohne daß ein Unendliches dadurch jemals zu Stande käme, weil dieses seiner Entstehung zufolge zugleich etwas Begränztes sein müßte, was dem Begriffe eines Unendlichen widerstreitet. So können wir uns die Gestalt einer Kugel unaufhörlich zu- oder abnehmend denken, ohne daß sie doch jemals den Weltraum ausfüllen oder zu einem Punkte werden könnte; auf gleiche Weise stehen der Vorstellung eines bestimmten Zeitraums, z. B. eines Jahres, die Begriffe von Ewigkeit und Augenblick, als durch keine Vermehrung oder Verminderung erreichbar, gegenüber. Diese Beispiele werden es zu völliger Deutlichkeit bringen, wie jede endliche Größe in unserer Vorstellung unendlich vermehrt oder vermindert werden kann, ohne

dadurch je in ein Unendlich-Großes oder Unendlich-Kleines übergehen.

V. Annäherung der Größen. Ist eine bestimmte Größe gegeben, in welche eine andere bei fortgesetzter Vermehrung oder Verminderung nicht wirklich übergehen, der sie aber beliebig nahe gebracht werden kann, so wird jene eine Gränze derselben genannt. Die Annäherung zu einer solchen Gränze läßt sich so weit treiben, daß der Unterschied zwischen ihr und der genäherten Größe geringer wird, als irgend eine beliebige, wenn auch noch so klein angenommene, Größe. In diesem Sinne ist z. B. die Kreisfläche die Gränze aller Vielecke, welche man um oder in dieselbe beschreiben kann: denn die umschriebenen nähern sich jener Fläche durch unaufhörliche Abnahme, die eingeschriebenen dagegen durch stete Zunahme, ohne gleichwohl (als gradlinige Figuren) in die krummlinige Figur des Kreises übergehen zu können. Wie in diesem Beispiele kann häufig zwischen Größen, die ihrem Begriffe nach unvereinbar sind, für unsere Vorstellung eine Annäherung in's Unendliche stattfinden.

VI. Theilbarkeit der Größe. Der Begriff der Größe gestattet eine willkürliche Zerlegung in beliebige Theile, die stets gleichartig untereinander und mit dem Ganzen bleiben und aus denen man sich dieses wiederum zusammengesetzt vorstellen kann. Da aber nicht jede Größe in der Wirklichkeit eine solche Theilung erlaubt, so ist man genöthigt, einen Unterschied zwischen jenen willkürlich zerlegbaren, stetigen oder continuirlichen Größen und solchen zu machen, die aus Bestandtheilen zusammengesetzt sind, an denen, ohne ihren Begriff aufzuheben, weiter keine Theilung vorgenommen werden kann, weshalb man sie als discrete oder durch ihre Natur bereits gesonderte Größen von jenen unterscheidet. Alle Zeit- und Raumgrößen sind stetig, alle aus individuellen Dingen zusammengesetzte sind discrete oder gesonderte Größen. Der wesentliche Unterschied beider Arten von Größen tritt bei ihrer Zu- und Abnahme am deutlichsten hervor. Denn während bei discreten Größen, die aus gleichartigen und gleichen Theilen zusammengesetzt sind, eben solche Theile hinzugefügt oder weggenommen werden müssen, ist bei stetigen Größen, die ein zusammenhangendes Ganze bilden und an sich nicht in Theile zerfallen, die Vermehrung als ein allmähliges Wachsen, die Verminderung als ein allmähliges Abnehmen zu betrachten.

VII. Maß der Größen. Mag man nun die eine oder die andere Classe von Größen in Betracht ziehen: immer wird man, um ein bestimmtes Quantum aufzufassen, anzugeben haben, wie viel — entweder von selbst oder durch unsere Willkür gesonderte — gleiche Theile in ihr enthalten sind. Man sieht also, daß der einzelne Theil,

welchen man als Maß des gegebenen Ganzen oder als die Einheit betrachtet, woraus jenes als Vielheit sich erzeugt, bei continuirlichen ganz unserer Willkür oder den Umständen überlassen, bei discreten aber durch ihre Natur immer gegeben ist. — Die deutliche Erkenntniß irgend eines Quantums fordert die unmittelbare Vorstellung jenes ursprünglichen Einfachen, wovon es als ein (durch mehrfaches oder auch theilweises Setzen) Zusammengesetztes betrachtet werden kann. Sind zwei verschiedene Größen fähig, aus dem nämlichen Maße zusammengesetzt zu werden, so nennt man sie commensurabel und jenes Maß ein beiden gemeinschaftliches. Giebt es hingegen für sie kein gemeinschaftliches Maß, so werden sie incommensurabel genannt.

VIII. Behandlung der Größen als discrete. Wenn man, um eine stetige Größe ihrem Inhalte nach erkennen, bestimmen und angeben zu können, eine Zerlegung derselben in einfache Bestandtheile vorgenommen denkt, so wird sie eben dadurch zu einer discreten gemacht. Dieses ist der Fall mit einer Linie, die in Fuße und Zolle, mit einem Zeitraume, der in Stunden und Minuten zerlegt worden ist, da wir hier willkürlich diejenige Zerstückelung in Einheiten vornehmen, die bei einer discreten Größe — z. B. bei einer Anzahl von Häusern und Einwohnern — von selbst vorhanden ist. Man kann also alle Größen, insofern sie in gesonderte zerlegt werden können, als aus Einheiten zusammengesetzt betrachten.

IX. Arithmetik. Die völlig allgemeine Behandlungsweise von Größen aller Art, die (von der besondern Beschaffenheit und Bedeutung derselben absehend) ihre Quantität in Einheiten und deren Theile zerlegt, das Zerlegte wiederum verbindet und die Art und Weise, wie solches geschieht, durch Zeichen ausspricht, um mit diesen zur Auffindung von Wahrheiten und Gesetzen zu gelangen, die nicht unmittelbar in unserer Vorstellung liegen — diese allgemeinste Behandlungsweise der Größen, wodurch dieselben als discrete betrachtet werden, begreift man unter dem Namen Arithmetik. Ihre Zeichen sind theils Andeutungen des Inhalts der Größen, theils Andeutungen der Art ihrer Verbindung, und indem die Arithmetik diese abkürzenden Zeichen (Symbole) zum Gegenstande ihrer Betrachtungen macht, hat sie es nicht unmittelbar mit den Größen selbst, sondern nur mit Andeutungen derselben und Verbindungen zu thun.

X. Behandlung der Größen als stetige. Indem die Arithmetik verschiedene, aber gleichartige Größen auf irgend ein beliebiges Maß als deren Einheit bezieht, ohne Rücksicht darauf zu nehmen, ob jene Größen ein Vielfaches dieser Einheit sein mögen oder nicht, behandelt sie dieselben als beliebig zerlegbar, d. h. als

stetig, selbst in Fällen, wo sie entschieden als discrete Größen gegeben sind (wie z. B. wenn aus hundert Personen drei gleiche Abtheilungen gebildet werden sollten). Obgleich es zur ausdrücklichen Bedingung gemacht werden kann, daß man die Einheiten als untheilbar und folglich die Größen als discret betrachte, welches in der That in einem besondern Zweige der Arithmetik (der höheren Zahlenlehre) geschieht, so fordert doch die Allgemeinheit ihrer Untersuchungen, daß sie Größen aller Art als beliebig theilbar behandle, sofern nicht etwa das Gegentheil vorgeschrieben wird. Der Widerspruch zwischen einer Angabe, welche Theile der Einheit ausdrückt, und der Vorstellung, daß die Einheit untheilbar sei, worauf man bei dieser Behandlungsweise der Größen allerdings häufig geführt wird, ist dadurch zu beseitigen, daß man sich in der That in solchen Fällen mit einer annähernden Bestimmung zu begnügen hat, oder die genauere unter der Annahme, daß eine Theilung möglich wäre, gelten läßt.

XI. Geometrie. In der Stetigkeit ihres Zusammenhanges erscheinen die Größen vorzugsweise im Raume als Linien, Flächen und Körper. Mit diesen Raumgrößen — sowohl der von ihrer Begränzung gegebenen Form, als dem auf ein gleichartiges Maß bezogenen Inhalte — beschäftigt sich die Geometrie. Jene Form der Raumgrößen ist es, wodurch sie zu einem Gegenstande der Anschauung werden und die höchste Deutlichkeit des Begriffs und der Erkenntniß gewähren. Die Betrachtung der räumlichen Form ist daher das der Geometrie wesentlich Eigenthümliche; nicht so des räumlichen Inhalts: denn hier tritt, um das allgemeine Verfahren der Größenbestimmung zur Anwendung zu bringen, die Nöthigung ein, jene stetigen Größen durch die Beziehung auf ein gleichartiges, als Einheit gewähltes, Maß in der Vorstellung zu discreten zu machen, ohne dadurch ihre fernere Theilbarkeit zu beschränken. So werden wir durch die Geometrie oder Raumlehre zu einer Zerlegung und Verknüpfung von Raumgestalten geführt, wodurch dieselben für unsere Vorstellung freilich zu gesonderten, aus Theilen bestehenden, Größen werden, aber nichts desto weniger stetig bleiben.

XII. Allgemeine Größenlehre. Es ergiebt sich aus den im Vorhergehenden hingestellten allgemeinen Begriffen der Arithmetik und Geometrie, daß jene, ungeachtet die Verbindung von Größensymbolen ihre eigentliche Aufgabe ist, welche sie ohne Rücksicht auf irgend eine Nebenbestimmung verfolgen darf, doch zugleich als Mittel betrachtet werden muß, Größen aller Art, und namentlich die stetigen Größen der Geometrie, der Vergleichung und näheren Bestimmung zu unterwerfen. Hierbei geht unsere Vorstellung von den Zeichen, welche gebraucht wurden, um Größen in

Beziehung auf irgend eine Maß-Einheit auszudrücken, auf jene Größen selbst zurück; und so wird die Arithmetik durch den ursprünglichen Begriff der Größen, welchen man ihrer abstracten Zeichensprache unterlegt, zu einer allgemeinen Größenlehre, auf welche die Geometrie in allen den Fällen, wo der Inhalt in Betracht gezogen wird, ihre Untersuchungen begründen darf.

Zu einem sehr eigenthümlichen Zweige der allgemeinen Größenlehre leitet die Vorstellung verschiedenartiger Zusammenstellungen von Größen, welche in Absicht ihrer Qualität oder ihrer Form sämmtlich oder doch zum Theil als verschieden vorausgesetzt werden. Jene Zusammenstellungen werden auf die Menge und Verschiedenartigkeit der gegebenen Einzelheiten bezogen, ohne daß dabei deren Inhalt in Betracht käme. Man hat also dieser Ansicht gemäß mit solchen discreten Größen zu thun, die auf keine gemeinschaftliche Einheit bezogen werden und bei deren Zusammenstellung an einen Inhalt nicht gedacht werden darf, so daß der Grundbegriff der Größe in diesem Zweige der Mathematik (der sogenannten Combinationslehre oder Syntaktik) nur in der Rücksicht auf die Menge der zusammengestellten gleich- oder ungleichartigen Einzelnheiten hervortritt, während die Stellung als äußeres Merkmal dem Begriffe der Form angehört.

Erste Abtheilung.

Arithmetik.

Erste Abtheilung.

A r i t h m e t i k.

Erstes Buch.

Die Grundoperationen.

---

§. 1. **Zahl.** Denkt man sich eine Größe als Vielheit einfacher Theile aus diesen Theilen, als ihren Einheiten, zusammengesetzt, so gelangt man zu einer deutlichen Vorstellung des Inhalts der Größe, indem man angiebt, wie viele solcher Einheiten das Ganze enthält. Diese Angabe einer Größe in Beziehung auf eine andere, als Einheit, ist die Zahl. Als Zeichen für die Zahlen wendet man, wenn die Angabe eine durchaus bestimmte ist, die gebräuchlichen Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und deren Zusammenstellungen an, allgemeiner aber, und zumal wenn Zahlen in Absicht ihres Inhalts nur unbestimmt anzudeuten sind, die Buchstaben aus den Alphabeten verschiedener Sprachen (z. B. a, b, c . . . A, B, C . . . α, β, γ . . . a, b, c . . .).

§. 2. **Benannte und unbenannte Zahl.** Sofern man mit einer Zahl zugleich den Begriff der Dinge verbindet, deren Einheitsmenge sie aussprechen soll oder jene Dinge ausdrücklich neben ihr nennt, heißt sie eine benannte Zahl im Gegensatze der völlig abstracten oder unbenannten; welche sich auf keinen besondern Gegenstand bezieht, sondern aus dem allgemeinen Begriffe der Einheit hervorgegangen ist, deren aliquotes (mehrfaches oder auch theilweises) Setzen auf eine bestimmte Weise durch sie ausgesprochen wird. In dem Satze: die Stunde hat 60 Minuten; folglich verrinnt die Minute 60mal in einer Stunde — ist dieselbe Zahl zuerst eine benannte dann eine unbenannte.

§. 3. **Ganze und gebrochene Zahl.** Zahlen, die sich aus der mehrfach wiederholten Einheit zusammensetzen oder in eine bestimmte Menge von Einheiten genau zerlegen lassen, werden ganze genannt. Aber eben so wohl kann es sich ereignen, daß eine Größe entweder kleiner ist, als die Einheit, womit sie verglichen oder

gemessen werden soll, oder doch nicht genau mehremal so groß, sondern Etwas zur weitern Vergleichung übrig läßt. In solchen Fällen ist man genöthigt, die Einheit selbst in kleinere Theile zu zerlegen, um durch die Wiederholung eines solchen Theils den Werth der Größe anzugeben, welche weniger als ein Ganzes betrug. Dies ist die Entstehung der gebrochenen Zahlen, welche darstellen, was für Theile der Einheit und wie viele eine gegebene Größe bilden.

§. 4. Entstehung der Zahlen. Zu beiden Größenangaben, ganzen und gebrochenen Zahlen, gelangt man durch das Zählen ihrer Einheiten oder Theile, welches darin besteht, daß diese einzeln aufgefaßt, mit dem schon Vorhandenen verbunden, und die stets um eine Einheit zunehmende Größe durch stets andere Zahlzeichen und Benennungen ausgedrückt wird. Das Zählen würde aber, wenn ursprüngliche Zeichen und Namen für jede Einheitsmenge nöthig wären, zu einem eben so mühsamen als unvollkommenen Gedächtnißwerke, und folgt daher, um durch die Verbindung weniger Zahlzeichen oder Ziffern und eben so einfach sich ergebender Benennungen jede beliebige Zahl darstellen zu können, bestimmten Grundsätzen und Regeln der sogenannten Numeration, wovon erst an einem spätern Orte die deutliche Einsicht mitgetheilt werden kann.

§. 5. Veränderung der Zahlen. So wie jede Größe eine Vermehrung oder Verminderung erleiden kann, gilt das Nämliche von der Zahl als ihrem Ausdruck. Die Vermehrung der Zahl besteht in dem Hinzufügen von Einheiten (oder Theilen der Einheit), die Verminderung in dem Hinwegnehmen derselben. So bildet man, von der bestimmten Zahl 20 ausgehend,

(1) die wachsende Zahlenreihe 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 . . .
(2) die abnehmende Zahlenreihe 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14 . . .

Soll eine Zahl a um b Einheiten vermehrt werden, so bezeichnet man dies durch $a + b$ (a plus b); soll die erste hingegen um b Einheiten vermindert werden, so ist die Bezeichnung dafür $a - b$ (a minus b). Demnach ist die allgemeine Andeutung um 1 wachsender und abnehmender Reihen von ganzen Zahlen:

(1) $a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5, a + 6, \ldots a + b.$
(2) $a, a - 1, a - 2, a - 3, a - 4, a - 5, a - 6, \ldots a - b.$

In der ersten Reihe ist jedes nachfolgende Zahlenglied, allgemein $a + b, > a$ (d. i. größer, als a), in der zweiten aber jedes Glied, allgemein $a - b, < a$ (d. i. kleiner, als a).

§. 6. Axiome. Jede Betrachtung, welche über Zahlen oder auch unmittelbar über die, durch sie bezeichneten, Größen angestellt wird, beruhet — wenn man auf die einfachsten Gründe der Erkenntniß zurückgeht — auf an sich einleuchtenden und deshalb nicht weiter zu beweisenden Wahrheiten, die man Grundsätze oder Axiome der Mathematik nennt. Sie gründen sich auf den Begriff der Gleich-

heit, d. h. einer völligen Uebereinstimmung des Inhalts von Größen, angedeutet durch $A = B$ (d. h. die durch A bezeichnete Größe oder Zahl ist gleich der durch B bezeichneten). Solche in allen spätern Untersuchungen sich wiederholende Grundsätze, die allgemein in Beziehung auf Größen aller Art ausgesprochen werden können und deshalb auch von deren Angaben, den Zahlen, gelten müssen, sind die nachfolgenden.

1. Gleiche Größen, um gleiche vermehrt, bleiben gleich. [In Zeichen angedeutet:] Ist $A = B$, so ist auch $A + C = B + C$.

2. Gleiche Größen, um ungleiche vermehrt, werden ungleich.
Ist $A = B$ und $C > D$, so ist $A + C > B + D$.

3. Gleiche Größen, um gleiche vermindert, bleiben gleich.
Ist $A = B$, so ist auch $A - C = B - C$.

4. Gleiche Größen, um ungleiche vermindert, werden ungleich.
Ist $A = B$ und $C > D$, so ist $A - C < B - D$.

5. Jede Größe ist ihren Theilen zusammengenommen gleich, also größer, als jeder einzelne Theil.
Ist $A = a + b + c + d$, so ist $A > a, b, c, d$.

6. Eine Größe wird um eine andere vermehrt, wenn einer ihrer Theile um dieselbe vermehrt wird.
Ich $A = a + b + c + d$, so ist $A + m = a + b + c + m + d$.

7. Eine Größe wird um eine andere vermindert, wenn einer ihrer Theile um dieselbe vermindert wird.
Ist $A = a + b + c + d$, so ist $A - m = a + b + c - m + d$.

8. Eine Größe bleibt unverändert, wenn sie um eine andere zugleich vermehrt und vermindert wird.
Es ist $A + m - m = A$.

9. Eine Größe bleibt unverändert, wenn ein Theil derselben um irgend eine Größe vermehrt, ein anderer um dieselbe Größe vermindert wird.
Ist $A = a + b + c + d$, so ist auch
$a + b + m + c - m + d = A$.

10. Sind zwei Größen jede einer dritten gleich, so sind sie auch einander gleich.
Ist $A = C$ und $B = C$, so ist auch $A = B$.

§. 7. Zahlformen. Irgend eine beliebige Verbindung mehrer Zahlen nennt man in bestimmter Andeutung eine Zahlform. Dahin gehören z. B. $a + b + c$; $a + b - m$. Nicht nur die Bedeutung solcher Zahlformen, sondern auch ihre Entwickelung, Umgestaltung und die Verbindung mehrer unter einander sind Gegenstand der Arithmetik, unter deren Operationen man die besonderen Verfahrungsarten versteht, nach denen verschiedene Zahlformen behandelt werden müssen, um entwickelt, umgeformt oder mit einander verbunden zu werden. Sind zwei solche Formen einander gleich,

so erhält man durch Gleichsetzen derselben eine Gleichung unter den darin vorkommenden Zahlen, wodurch eine gegenseitige Abhängigkeit derselben ausgedrückt wird, dergestalt, daß im Allgemeinen mit der Aenderung einer einzigen Zahl auf der einen Seite zugleich eine Aenderung der anderen Seite nothwendig verbunden ist, sofern beide gleich bleiben sollen. Wäre z. B. $a + b + c + d = \alpha - \beta$, so würde durch Vermehrung beider Zahlformen um eine Zahl m die vorstehende Gleichung in die neue

$$a + b + c + d + m = \alpha - \beta + m$$

umgestaltet. Indem man auf solchem Wege gegebene Zahlformen in neue umbildet, ist man im Stande, von den einfachsten Verbindungen der Zahlen zu immer verwickelteren allmählig fortzuschreiten, oder auch umgekehrt von diesen zu jenen zu gelangen.

§. 8. Grundoperationen. Es reicht für die Verbindung einer beliebigen Menge von Zahlen hin, das Gesetz zu kennen, nach welchem zwei derselben sich mit einander vereinigen lassen, weil man auf die nämliche Weise fortfahren und so allmählig sämmtliche gegebene Zahlen in die Verbindung aufnehmen kann. Sollten aber zwei Zahlen, a und b, zur Erzeugung einer dritten mit einander verbunden werden, so kann dieses sehr einfach in doppelter Weise geschehen. Entweder nämlich lassen beide sich als Theile unmittelbar zu einer größeren Zahl vereinigen, indem man die Einheiten von b zu denen von a zählt; oder es läßt sich aus der einen Zahl (a) eine neue auf dieselbe Art erzeugen, wie die andere (b) aus der Einheit gebildet ist. Umgekehrt ergiebt sich aus solcher doppelten Verbindung eine zwiefache Zerlegung in die Zahlen a und b, wodurch man zu vier Operationen der Arithmetik (den sogenannten vier Species oder Grundrechnungen) gelangt, welche allen späteren Betrachtungen derselben zur Grundlage dienen.

Erstes Capitel.

Die ganzen Zahlen.

---

§. 9. **Addition.** Zwei Zahlen a, b werden addirt, indem man die Einheiten beider zu einer neuen Zahl s. vereinigt. Diese Zahl, welche mithin so viele Einheiten enthält, als a und b zusammengenommen, nennt man die Summe von a und b, welche **Summanden** heißen. Die Andeutung der Addition ist $a + b = s$, worin die **Summenform** $(a + b)$ von der Summe selbst, als ihrem **geschlossenen Werthe**, unterschieden werden muß. Es ist nach dem Schema

$$\underbrace{1+1+1+1+1+1}_{a} \; + \; \underbrace{1+1+1+1+1+1+1}_{b}$$

gleichgültig, ob man a um b Einheiten oder b um a Einheiten vermehrt, also $a + b = b + a$. Wären der Summanden beliebig viele $a + b + c + d \ldots . + m$ gegeben, so könnte man zuerst a mit b, dann $(a + b)$ mit c u. s. f. verbinden, um die Summe sämmtlicher Zahlen zu erhalten. Diese allmählige Verbindung der Summanden kann indessen auch in jeder andern **beliebigen Ordnung** vorgenommen werden, da die Summe in jedem Falle so viele Einheiten enthalten muß, als alle Summanden zusammengenommen. So ist z. B.

$$4 + 7 + 3 + 2 + 5 = 3 + 5 + 7 + 4 + 2 = 21$$

$$a + b + c + d + e = c + e + b + a + d \text{ u. s. f.}$$

Sollen in einer Reihe von Summanden ausdrücklich zwei oder mehre in eine Summe zusammengezogen werden, so deutet man diesen Umstand durch **Einklammerung** der Zahlen an. So ist $a + (b + c)$ die um die Summe $(b + c)$ vermehrte, $a - (b + c)$ die um die Summe $(b + c)$ verminderte Zahl a. Stimmen mehre Summanden völlig überein, so kann man sie in ein Vielfaches des einzelnen zusammenziehen, und durch eine vorgesetzte Zahl, **Coefficient** genannt, dieses Vielfache ausdrücken. So ist z. B.

$$a + a + a + a + a + a + a = 7a.$$

Stellen hingegen die Glieder einer Reihe von Summanden **verschiedene Vielfache** der nämlichen Einheit dar, wie in

$$3b + 10b + 5b + b + 8b = 27b,$$

so bildet man die Summe durch Addition sämmtlicher Coefficienten und Hinzufügung der gemeinschaftlichen Einheit. (Aufg. 1—4, §. 20.)

§. 10. **Subtraction.** Der Vereinigung zweier Zahlen durch Addition ist die Zerlegung einer, als Summe gegebenen, Zahl ent-

gegengesetzt, welche man Subtraction nennt. Eine Zahl b wird von einer andern a subtrahirt, indem man eine dritte Zahl r so bestimmt, daß sie mit b vereinigt a zur Summe giebt. Die Andeutung der Subtraction ist $a - b = r$. Hier wird, damit r eine wirkliche Zahl werde, $b < a$ vorausgesetzt, und insofern ist die Subtraction eine Verminderung der Zahl a. Daher heißt a Minuend, b Subtrahend und r Rest oder Differenz. Wo mehr als zwei Zahlen verbunden werden, bedient man sich zu ausdrücklicher Bezeichnung einer Differenzform der Einklammerung. So bedeutet z. B. $a - (b - c)$, daß man die Differenz $(b - c)$ von a subtrahiren solle. Nach den beiden gleich bedeutenden Ausdrücken $a - b = r$ und $a = b + r$ findet man die Differenz r auf doppelte Weise: entweder indem man a um b Einheiten vermindeet, oder indem man b um so viele Einheiten vermehrt, daß dadurch die Summe a gebildet wird. So entsteht z. B. die Differenz der Zahlen 12 und 7, indem man entweder 7 Einheiten von 12 hinwegnimmt oder so viele Einheiten zu 7 hinzufügt, bis die Summe 12 zum Vorschein kommt.

§. 11. Multiplication. Wenn die nämliche Zahl a im Ganzen bmal gegeben ist, so verwandelt sich die Addition dieser gleichen Summanden in eine Multiplication; z. B.

$$(a + a + a + a + a) = a\text{mal } (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = a\text{mal } 5.$$

Man darf also sagen, es werde eine Zahl a durch eine andere b multiplicirt, indem man aus ihr auf die nämliche Weise wie b aus der Einheit entsteht, eine dritte Zahl P bildet. Hiebei wird a Multiplicand, b Multiplicator und die aus beiden Zahlen hervorgehende P das Product von a und b genannt. Die Andeutung der Multiplication ist $a \cdot b$ oder $a \times b = P$. Soll dieses Product auf's Neue durch eine Zahl c, dann das Resultat durch d, u. s. w. multiplicirt werden, so deutet man dies durch die einfache Reihenfolge der Zahlen, a, b, c, d . . . an, d. h. man setzt:

$$P = a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots \text{ oder } P = a \times b \times c \times d \ldots$$

$$\text{z. B. } 120 = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \times 2 \times 4 \times 5.$$

Auch pflegt man wohl zwischen Buchstaben die Andeutung der Multiplication ganz wegzulassen und einfacher $P = a\,b\,c\,d \ldots$ zu schreiben. Die in solchen Formen zu allmähliger Multiplication gegebenen Zahlen werden mit dem gemeinschaftlichen Namen Factoren belegt. Daß man ausdrücklich aus einzelnen unter ihnen ein Product bilden solle, kann man durch Einklammerung der Factoren bezeichnen. So deutet man z. B. durch $a(bc)d$ an, daß a mit dem Produkte bc und die hieraus entstehende Zahl wieder mit d multiplieirt werden soll.

Anmerkung. Von den beiden Factoren eines Products ab kann nur der Multiplicand eine benannte Zahl sein. Enthält es mehre Factoren, $a.b.c.d$, so ist höchstens einer derselben als benannt und deshalb als Multiplicand zu betrachten.

§. 12. Fundamentalsatz der Multiplication. Jedes Produkt aus ganzen Zahlen bleibt ungeändert, wenn man seine Factoren in beliebiger Ordnung multiplicirt.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes nehme man anfänglich nur zwei Factoren (z. B. 4 und 6) an. Dann ist es nach der Andeutung des, in seine Einheiten aufgelösten, Products:

	4					
6	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1

völlig gleichgültig, ob man 4 Einheiten 6mal, oder 6 Einheiten 4mal nimmt, also 4.6=6.4.

Setzt man allgemein ein Product aus beliebig vielen Factoren z. B. **P**=4.6.5.9.7, und führt einen neuen Factor (3) in dieses Product ein, so kann derselbe folgende Stellungen erhalten:

(1) 3.4.6.5.9.7 (2) 4.3.6.5.9.7 (3) 4.6.3.5.9.7
(4) 4.6.5.3.9.7 (5) 4.6.5.9.3.7 (6) 4.6.5.9.7.3.

Nach (1) und (2) soll statt des Multiplicands 4 in **P** das 3malige desselben, also ein Multiplicand von 12 Einheiten eben so oft gesetzt werden, als man früher die 4 Einheiten setzte. Hiedurch erhält man nothwendig das 3malige des früheren Products, also **P**×3.

Nach (3) soll das Product 4·6 dreifach genommen, also ein Inhalt von 24.3=72 Einheiten eben so oft gesetzt werden, als man früher die 4.6=24 Einheiten setzte, wodurch man wiederum nothwendig 3mal so viel Einheiten, als anfangs, erhält.

Nach (4) wird die Verdreifachung der Einheiten an dem Producte 4.6.5=120, nach (5) an 4.6.5.9=1080 vorgenommen und die entstehende Einheitsmenge eben so oft gesetzt, als man früherhin den dritten Theil dieser Einheiten setzte.

Folglich muß bei allen Stellungen des neuen Factors 3 das hervorgehende Product mit dem in (6) angedeuteten, d. h. mit **P**×3 völlig übereinstimmen. Was hier aber von dem Factor 3 des Products 4.6.5.9.7.3 gesagt ist, gilt offenbar eben sowohl von jedem der übrigen, woraus sich ergiebt, daß man ohne Aenderung seines Inhalts die Factoren eines Products beliebig unter einander versetzen kann. (Aufg. 6, 7 §. 20.)

Anmerkung. Sind unter den Factoren eines Products mehre einander gleich, wie z. B. **abb caa bc=aaa bbb cc**, so pflegt man zur Abkürzung neben den verschiedenen Factoren durch eine besondere Zahl, den Exponenten, anzudeuten, wie oft ein jeder vorhanden sei. Demnach ist $aaa=a^3$, $bbbbb=b^5$ zu setzen und am kürzesten durch **a** zu 3, **b** zu 5 auszusprechen. Sollen mehre Produkte mit gleichen Factoren multiplicirt werden, so braucht man nur die Exponenten derselben zu

addiren, da im Totalproducte alle gleiche Factoren zusammen vorkommen müssen. So ist z. B.

$$a^4 \times a^3 = a^{4+3} = a^7; a^2 b^4 \times a^3 b^{10} = a^5 . b^{14}.$$

§. 13. Division. Der Verbindung mehrer Factoren zu einem Producte ist die Auflösung desselben, d. h. die Zerlegung einer Zahl in solche Factoren entgegengesetzt. Soll sie in zwei Factoren zerlegt werden, von denen der eine gegeben ist, so ist dies die besondere Aufgabe der Division. Eine Zahl P wird demnach durch eine andere a dividirt, wenn man eine dritte Zahl b so bestimmt, daß sie, mit a multiplicirt, P zum Producte giebt. Die Andeutung der Division ist $P:a = b$ oder auch $\frac{P}{a} = b$. Die Zahl P wird Dividend, a Divisor, b Quotient genannt, und damit b eine ganze Zahl werde, P als ein Vielfaches von a, also $P = a \cdot b$, vorausgesetzt.

Indem man die Quotientengleichung $\frac{P}{a} = b$ auf beiden Seiten mit dem Divisor a multiplicirt, erhält man

I. $\frac{P}{a} a = a \cdot b$, d. i. $= P$ zufolge der Erklärung der Division.

Dividirt man ferner $P = a.b$ auf beiden Seiten durch a, so folgt $\frac{P}{a} = \frac{a.b}{a}$, und da nach Voraussf. $\frac{P}{a} = b$ ist, auch

II. $\frac{(a.b)}{a} = b$.

Aus beiden Gleichungen ergiebt sich der allgemeine Satz:

Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn sie mit der nämlichen Zahl multiplicirt und dividirt wird, in welcher Folge dieses auch geschehen mag.

Aus der Gleichung II. folgt noch insbesondere, daß ein nur angedeutetes Product a.b durch einen seiner Factoren dividirt wird, indem man diesen Factor ausscheidet. Demnach ist $a b c d : c = a b d$, $abbc : b = abc$, $a^3 : a = aaa : a = aa$, $abbccd : abc^2 = bd$, $m^8 : m^5 = m^{8-5} = m^3$. Eine Verminderung des Exponenten deutet nämlich ein Wegnehmen gleicher Factoren an. (Aufg. 10—12, §. 20.)

Anmerkung. Ist der Dividend nicht ein vollkommenes Vielfaches des Divisors, so wird bei Abziehung des möglichst größten Vielfachen ein Rest bleiben, in welchem, als der kleineren Zahl, jener auch nicht einmal enthalten ist, und man wird, um die Division fortzusetzen, hier zuvor eine Zerlegung in kleinere Theile der Einheit vornehmen müssen, wodurch man zur Bruchrechnung gelangt.

§. 14. Messung und Theilung. Sofern die Division es mit benannten Dividenden zu thun hat, wird ihre Bedeutung eine zwiefache, je nachdem der Divisor ebenfalls benannt oder eine unbenannte Zahl ist.

I. Im ersten Falle soll nämlich eine benannte Zahl (P) durch eine aus Einheiten derselben Art bestehende (a) gemessen, d. h. es soll angegeben werden, wie viel mal diese Zahl in der ersten enthalten sei, welches nur durch eine unbenannte Zahl geschehen kann. So ist z. B. in dem Ausdruck $12:3=4$ der Quotient eine solche Zahl, wenn 12 und 3 etwa Fuß bedeuten und angegeben werden soll, wie oft 3 Fuß in zwölfen enthalten seien. Die Zahl 4 giebt hier an, wie viel mal das Maß von 3 Fuß genommen werden müsse, um 12 Fuß hervorzubringen.

II. Im zweiten Fall, wo der Divisor unbenannt ist, soll hingegen die benannte Zahl (P) in so viele gleiche Theile zerlegt werden, als eine andere Zahl (a) Einheiten enthält, weshalb die gesuchte, als Theil der gegebenen benannten, ebenfalls benannt sein muß. So ist in dem Ausdruck $30:6=5$ der Quotient eine benannte Zahl, wenn 30 etwa Zoll bedeutet und angegeben werden soll, wie groß der Theil ist, durch dessen sechsmaliges Setzen eine Länge von 30 Zoll entsteht.

In dem ersten der beiden vorerwähnten Fälle ist mithin die Division als Messung, im zweiten als Theilung zu betrachten. Dort wird gefragt, wie oft (quoties) der Divisor im Dividend enthalten sei, hier hingegen, wie viel (quot) Einheiten des Dividends jeder seiner gleichen Theile enthalten werde. Die Benennung Quotient ist also als eine doppelsinnige, auf zwiefache Art abzuleitende, anzusehen.

§. 15. Gemeinschaftliches Maß. Sind zwei Zahlen P und Q Vielfache der nämlichen Zahl a, also $P=a.b$, $Q=a.c$, so nennt man die letzte ein gemeinschaftliches Maß der Zahlen P und Q. Enthalten beide mehre und zum Theil die nämlichen Factoren, so wird das aus diesen allen zusammengesetzte Product das größte gemeinschaftliche Maß von P und Q genannt. So ist dasselbe z. B. abbcd für $P=aabbcd$ und $Q=abbbccd$; m^2n^3 für $P=m^5n^3$ und $Q=m^2n^8$; $3.5^2.4$ für $P=3^2.5^2.4^3$ und $Q=3.5^6.4$; 36 für $P=17280$ und $Q=252$. (S. §. 12. Anm.)

Sind zwei Zahlen nicht in ihren einzelnen Factoren, sondern (wie in dem letzten Beispiel) als entwickelte Producte bestimmter Zahlen gegeben, so findet man ihr größtes gemeinschaftliches Maaß durch folgenden

Lehrsatz. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen A, B wird bestimmt, indem man eine durch die andere, dann den Divisor durch den entstandenen Rest u. s. f. dividirt, bis irgend ein Rest in dem vorangehenden Divisor aufgeht. Dieser letzte Rest ist das gesuchte gemeinschaftliche Maß.

Beweis. Das Schema der angegebenen fortgesetzten Division sei:

I. $\frac{A}{B} = m + \frac{C}{B}$ z. B. I. $\frac{6487}{1222} = 5 + \frac{377}{1222}$

II. $\frac{B}{C} = n + \frac{D}{C}$ II. $\frac{1222}{377} = 3 + \frac{91}{377}$

III. $\frac{C}{D} = p + \frac{E}{D}$ III. $\frac{377}{91} = 4 + \frac{13}{91}$

IV. $\frac{D}{E} = q$ IV. $\frac{91}{13} = 7.$

also E der letzte Rest, durch welchen die Division aufgeht, und da

(1) $D = Eq$ so ist nach (1) D ein Vielfaches von E,

(2) $C = Dp + E$ folglich nach (2) ebenfalls C,

(3) $B = Cn + D$ nach (3) ebenfalls B,

(4) $A = Bm + C$ nach (4) ebenfalls A.

Es ist mithin der letzte Rest, durch welchen die Division beendigt wurde, gemeinschaftliches Maß der Zahlen D, C, B, A. Um nun zu beweisen, daß er zugleich das größte sei, nehme man an, es gebe eine Zahl $K > E$, welche dies sein möge, wenn es anders möglich ist. Dann aber müßte K zugleich

in A und B, folglich auch nach (4) in C,
in B und C, ... nach (3) in D,
in C und D, ... nach (2) in E

enthalten sein, welches unmöglich ist, da $K > E$ angenommen wurde. Also ist E das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen A und B. (Aufg. 13—16, §. 20.)

Anmerkung. Ist die Einheit letzter Rest der Division, also größtes gemeinschaftliches Maß der Zahlen A und B, so werden dieselben relative Primzahlen genannt.

§. 16. Zahlenbildung durch Addition. Jede ganze Zahl, welche größer als 2 ist, kann auf mehrfache Weise durch Addition kleinerer ganzer Zahlen gebildet werden, indem man deren zwei, drei oder mehre verbindet. So entsteht z. B. die Zahl 5 als Quersumme der kleineren 14, 23, 113, 122, 1112, 11111. Um diese verschiedenen Bildungen einer gegebenen Zahl vollständig und in einer gewissen Ordnung vorzunehmen, muß man Zusammenstellungen (zunächst von zwei, dann von drei und mehren Zahlen) dadurch bilden, daß man mit 1 beginnt und die nachfolgenden Stellen so niedrig als möglich ausfüllt. Von diesen einfachsten Zusammenstellungen kann man nun leicht zu andern dadurch fortschreiten, daß man (nach Axiom 9) eine Zahl der letzten Stellen um 1 vermindert und dafür eine der vorhergehenden um 1 erhöhet. Da nun aber der Inhalt einer Summe (nach §. 9.) durch die Ordnung der Summanden nicht geändert wird, so sind mehrfache Zusammenstellungen aus den nämlichen Zahlen zu vermeiden, welches dadurch geschieht, daß man nie eine größere Zahl vor eine kleinere setzt. Die Zerfällung

der Zahl 8 in kleinere Zahlen giebt nach dieser Vorschrift folgende 21 Summenformen:

$$8=\begin{cases}17,\ 26,\ 35,\ 44.\\ 116,\ 125,\ 134,\ 224,\ 223.\\ 1115,\ 1124,\ 1133,\ 1223,\ 2222.\\ 11114,\ 11123,\ 11222.\\ 111113,\ 111122.\\ 1111112.\\ 11111111.\end{cases}$$

Die obige Bildungsregel bleibt auch dann gültig, wenn irgend eine Beschränkung der Aufgabe nicht alle mögliche Zusammenstellungen, sondern nur eine gewisse Art und Anzahl derselben zuläßt, wie wenn z. B. 8 allein aus *fünf* kleineren Zahlen gebildet werden soll. (Aufg. 17—19, §. 20.)

§. 17. *Zahlenbildung durch Subtraction.* Wird im Minuend und Subtrahend einer Differenzform die nämliche Zahl addirt oder subtrahirt, so bleibt der Inhalt der Differenz dabei ungeändert. Denn nach dem Schema der Subtraction:

$$\begin{array}{r|l} a=1+1+1+ & 1+1+1+1 \\ b= & 1+1+1+1 \\ \hline a-b=1+1+1 & \end{array}$$

ist es für den Rest ganz gleichgültig, ob die gemeinschaftlichen Einheiten des Minuends und Subtrahends, welche durch einen Strich abgesondert sind, also auch ob a und b um gleich viele Einheiten vermehrt oder vermindert werden. Demnach läßt sich jede beliebige Zahl r in *unendlich verschiedener* Weise als Differenz zweier Zahlen betrachten, welche um r Einheiten verschieden und deshalb von der allgemeinen Form (k+r) und k sind, worin man für k die Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. f. zu setzen hat. Die Zahl 12 z. B. ist als Differenz =13—1, 14—2, 15—3, 16—4, 17—5 u. s. w. Ist aber eine *Gränze* bestimmt, welche der Minuend oder Subtrahend nicht überschreiten sollen, so ist dadurch die Anzahl der Formen *beschränkt*. So erhält man z. B. für 7, wenn der Minuend die Zahl 15 nicht überschreiten darf, die Differenzformen:

7=8—1, 9—2, 10—3, 11—4, 12—5, 13—6, 14—7, 15—8.

§. 18. *Zahlenbildung durch Multiplication.* Nicht jede ganze Zahl läßt sich auf dem Wege der Multiplication aus andern ganzen Zahlen, als ihren Factoren, in ähnlicher Weise bilden, wie dieses durch Addition kleinerer Zahlen jedesmal auf mehrfache Weise möglich ist, sofern sie 2 übersteigt. In der unbegränzten Reihe ganzer Zahlen findet sich vielmehr eine Abtheilung solcher, welche nur durch *Addition*, nicht aber durch Multiplication ganzer Zahlen entstehen können, wie z. B.:

I. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 . . .

während die übrigen durch mehrfaches Setzen dieser Zahlen, also durch Multiplication, aus denselben gebildet werden können, wie:

II. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25 . . .

Man nennt daher zur Unterscheidung die Zahlen der ersten Reihe Primzahlen (auch absolute Primzahlen im Gegensatz der relativen), die der zweiten hingegen zusammengesetzte Zahlen. Jene sind als die untheilbaren Factoren der letzten anzusehen und heißen in dieser Beziehung Primfactoren. Eine aus drei oder mehren Primfactoren zusammengesetzte Zahl kann auf mehrfache Weise in Factoren zerlegt werden, indem man ihre Primfactoren auf jede mögliche Weise unter einander verbindet. So ist z. B.

$$210 = 2.3.5.7 = 2.3.35 = 2.5.21 = 2.7.15 = 3.5.14$$
$$= 3.7.10 = 5.7.6 = 2.105 = 3.70 = 5.42 = 7.30$$
$$= 6.35 = 10.21 = 14.15.$$

Anmerkung. Die ausführliche Betrachtung solcher Verbindungen zu je 2, 3, 4 oder mehren Zahlen ist Gegenstand der Combinationslehre.

§. 19. Zahlenbildung durch Division. Werden Dividend und Divisor zugleich durch die nämliche Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Werth des Quotienten ungeändert. Denn nach dem Schema der Division:

$$\frac{P}{Q} = \frac{a.c.d.e.f}{d.e.f}$$

ist es für den Quotient n ganz gleichgültig, ob die gemeinschaftlichen Factoren des Dividends und Divisors (d. h. d.e.f), folglich auch ob **P** und **Q**, um gleich viele Factoren vermehrt oder vermindert werden. Demnach läßt sich jede gegebene Zahl b durch eine unendliche Menge von Quotientenformen ausdrücken, indem man jene Zahl durch irgend eine andere m multiplicirt und dividirt. Die Zahl 5 z. B. ergiebt sich als Quotient der Formen

$$\frac{10}{2}\ \frac{15}{3}\ \frac{20}{4}\ \frac{25}{5}\ \frac{30}{6}\ \frac{35}{7} \ldots \text{allgemein} \frac{5m}{m}.$$

Soll aber ein bestimmtes Vielfaches der gegebenen Zahl oder ein bestimmter Divisor nicht überschritten werden, so ist dadurch die Anzahl der Quotientenform begränzt. So sind z. B. diese Formen für 15, wenn der Dividend nicht über 100, der Divisor nicht unter 4 sein soll $= \frac{60}{4}\ \frac{75}{5}\ \frac{90}{6}$ (Aufg. 26—30, §. 20.).

§. 20. Aufgaben.

1. Die Summenform $1+2+3+4$ in alle mögliche gleichbedeutende umzusetzen.
2. Eben so die Summenform $a+b+c+d$.
3. Die Summen zu bilden aus $(4a+7a)$, $(b+10b)$, $(2c+33c)$.
4. Eben so aus $(a+5a+7a)$, $(3b+7b+9b)$, $(10c+c+2c)$.
5. Die Differenzen zu bilden aus $(5a-3a)$, $(10b-b)$, $(6c-6c)$.

6. Die Factoren 5.7.9 auf alle mögliche Weise zu versetzen.
7. Eben so die vier Factoren 3.7.11.19.
8. Die Prod. zu bilden aus (3a•4a), (7a•6b), (a•12b), (5b.m.7b^4).
9. Eben so aus (10m.7p.3q), (5a^2.7x.24a), (2a.12b.a.cbb).
10. Die Quotienten zu finden von (39aa:13a), (51aac:17a).
11. Eben so von 14am^4 p^2:m^3p), (81bkg^5:3bg^4), (65p^6r:5p^6).
12. Eben so von (108fg^3k:8fg^2), (150mp^4:65m^2p), (24a^5:6m^5).
13. Das größte gemeinsch. Maß für die Zahlen 209 u. 9779 zu finden.
14. Eben so für 80141 und 42269.
15. Eben so für 793, 41419 und 80459.
16. Eben so für 931, 80801, 31213 und 68929.
17. Aus kleineren ganzen Zahlen die Summe 10 zu bilden.
18. Die Zahl 12 aus vier solchen Zahlen zu bilden.
19. Wie lassen sich 20 Ganze in 3 Abtheilungen bringen, wenn in jeder wenigstens 5 sein sollen?
20. Die Zahl 6 durch Zahlen unter 20 als Differenz auszudrücken.
21. Eine Zahl enthält 8 Ganze mehr, als eine andere, jede aber zwischen 180 und 200 Einheiten; wie viel also?
22. Welche zusammengesetzte Zahlen entstehen aus der Verbindung je zweier der Primfactoren 11, 13, 17, 29?
23. Welche aus der Verbindung von je dreien derselben?
24. Welche Zahlen lassen sich aus den Factoren 7, 9, 11, 15 bilden?
25. Eben so aus den Zahlen 3, 5, 7, 11, 13?
26. Durch welche Zahl unter 200 läßt sich 7 in Quotientenform ausdrücken?
27. Eben so die Zahlen 9, 12, 16?
28. Durch welche Zahlen erhält man 24 zum Quotienten, wenn der Dividend 1000 übersteigen soll?
29. Quotientenform für 11 zu finden, wenn der Divisor höchstens 16 sein darf.
30. Eben so für 27, wenn der Divisor zwischen 10 und 18 liegen soll.

Zweites Capitel.

Die gebrochenen Zahlen.

§. 21. Bestandtheile des Bruchs. Es ist schon oben (§. 3.) bemerkt worden, daß zur Angabe solcher Größen, in denen die angenommene Einheit nicht genau mehre Mal enthalten ist, sie mögen nun kleiner oder größer als dieselbe sein, zwei verschiedene Zahlen erfordert werden, von denen die eine darzustellen hat, was für Theile, die andere hingegen, wie viele Theile der Einheit genommen werden sollen. Jene heißt, weil sie die Theile, worin die Einheit zerfällt werden muß, nennt, der Nenner, diese aber, weil sie die Inhaltsmenge solcher Theile zählt, der Zähler der gebrochenen Zahl oder des Bruches. Ist der Zähler kleiner als der Nenner, also der Inhalt des Bruchs geringer als die Einheit, so wird derselbe ein ächter Bruch, ist der Zähler hingegen größer, als der Nenner, also jener Inhalt größer als die Einheit, so wird der Bruch ein unächter genannt. Augenscheinlich wird durch Vergrößerung des Zählers oder auch durch Verminderung des Nenners der Werth oder Inhalt eines Bruchs vermehrt, hingegen durch Verkleinerung des Zählers oder auch durch Vergrößerung des Nenners jener Werth vermindert. Wird der Zähler $=0$, so verschwindet damit der Inhalt des Bruchs; setzt man aber den Nenner $=7$, so verliert die Bruchform die Bedeutung einer wirklichen Zahl. (Aufg. 1—5, §. 30.)

§. 22. Bruchform. Beide zur Angabe des Bruchs nothwendigen Zahlen werden durch einen Strich von einander getrennt, und zwar der Zähler über, der Nenner unter denselben gesetzt. So bedeutet die Bruchform $\frac{m}{n}$ allgemein m Theile der Einheit, wenn dieselbe in n gleiche Theile zerlegt worden, also z. B. $\frac{4}{5}$ vier Theile der in Fünftel zerlegten Einheit. Betrachtet man dagegen diese Form als Andeutung einer Division, so drückt sie (nach §. 13.) die Forderung aus, 4 durch 5 zu dividiren. Dieses geschieht nun aber, indem man jede der vier Einheiten des Dividends in fünf gleiche Theile zerlegt, wodurch man deren 20 erhält, und diese Anzahl durch 5 dividirt. Der Quotient 4 drückt dann Fünftel der Einheit aus, wonach die Bedeutung der Quotientenform $\frac{4}{5}$ (d. i. 4 dividirt durch 5) mit derjenigen der Bruchformen $\frac{4}{5}$ (d. i. vier Fünftel) völlig zusammenfällt. Allgemein lassen sich der Divisionsandeutung $\frac{m}{n}$ gemäß alle m Einheiten des Dividends in n gleiche Theile (ntel)

zerlegen, wodurch man eine Anzahl derselben $= m \cdot n$ erhält. Diese giebt durch den Divisor n dividirt (nach §. 13.), zum Quotienten die Zahl m, welche n-Theile der Einheit (ntel) zählt, womit es völlig übereinstimmt, wenn man $\frac{m}{n}$ als Bruchform betrachtet.

Anmerkung I. Es ist demnach gleichgültig, ob man die Andeutungen $\frac{5}{6}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{538}{100}$, als Quotientenformen oder als Brüche betrachtet, d. h. ob man sie als 5 durch 6, 17 durch 20, 538 durch 100 dividirt, oder vielmehr als 5 Sechstel, 17 Zwanzigstel, 538 Hundertel der Einheit erklärt.

Anmerkung II. Brüche von der Form $\frac{1}{n}$ z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{25}$, welche einen einzelnen Theil der zerlegten Einheit ausdrücken und daher 1 zum Zähler haben, werden Stammbrüche genannt.

§. 23. Veränderung der Bruchform. Da (nach §. 19.) jede Quotientenform durch Multiplication oder Division auf unendlich verschiedene Weise umgestaltet werden kann, ohne daß dadurch ihr Werth eine Aenderung erleidet, so gilt nach dem Vorhergehenden das Nämliche von der allgemeinen Bruchform $\frac{m}{n}$. Es ist also:

$$1)\quad \frac{m}{n} = \frac{m.k}{n.k} \qquad 2)\quad \frac{m}{n} = \frac{m:p}{n:p}$$

sofern m und n Vielfache der Zahl p sind. Die Gültigkeit dieser beiden Umformungen läßt sich auch unmittelbar in der Bedeutung des Bruches $\frac{m}{n}$ erkennen, dessen Werth nicht geändert sein kann, wenn man entweder (1) so viel mal mehr Theile setzt, als man dieselben (durch mehrmalige Theilung der Einheit) kleiner angenommen hat; oder (2) so viel mal weniger Theile nimmt, als man dieselben (durch geringere Theilung der Einheit) größer gebildet hat. So ist z. B.

$$1)\quad \frac{3}{5} = \frac{3.7}{5.7} = \frac{21}{35}, \qquad 2)\quad \frac{34}{51} = \frac{17.2}{17.3} = \frac{2}{3}$$

Die erste dieser beiden Umgestaltungen der Bruchform kann man am Schicklichsten eine Erweiterung, die andere eine Reduction derselben nennen, da hier nicht an Vergrößerung oder Verkleinerung (welche sich stets auf den Werth oder Inhalt von Zahlformen beziehen) gedacht werden darf. Jeder ganzen Zahl a kann man die Form eines Bruches dadurch ertheilen, daß man ihr, als Zähler, den Nenner 1 untersetzt $\left(\frac{a}{1}\right)$, da nach dieser Andeutung die Einheit ungetheilt a mal gesetzt werden soll.

§. 24. Verbindung der Brüche. Bei der Anwendung der Grundoperationen auf gebrochene Zahlen müssen ihre allgemeinen Grundsätze und Regeln dem Begriffe und der Darstellung eines Bruches angepaßt werden. Der besondere Fall, wo Brüche mit ganzen Zahlen verknüpft werden sollen, ist zwar in dem allgemeinern einer Verbindung durchgängig gebrochener Zahlen begriffen, da jede ganze Zahl leicht in Bruchform umgesetzt werden kann. Die Einsicht in die Bruchrechnung gewinnt aber an Deutlichkeit, wenn man beide Fälle abgesondert betrachtet.

§. 25. Addition (1) ganzer und gebrochener Zahlen. Wo eine ganze Zahl mit einem Bruche zusammengezählt werden soll, da erfordert die erste Bedingung aller Vereinigung — Gleichartigkeit der Theile — daß man die ganze Zahl als einen Bruch von demselben Nenner darstelle, indem man sie durch diesen zugleich multiplicirt und dividirt. Die Summirung der beiden alsdann gleichbenannten, Bruchformen ist erst auf diese Weise möglich geworden und besteht darin, daß man die Menge derjenigen Theile zusammenaddirt, welche in beiden Brüchen gezählt werden. Die Regel der Addition fordert hier also zuerst die Umformung der ganzen Zahl in einen Bruch von demselben Nenner, und dann die Summirung der Zähler, z. B.

$$7+\frac{3}{4}=\frac{7.4}{4}+\frac{3}{4}=\frac{28}{4}+\frac{3}{4}=\frac{28+3}{4}=\frac{31}{4}$$

$$a+\frac{k}{m}=\frac{a.m}{m}+\frac{k}{m}=\frac{a.m+k}{m}.$$

(2) Gebrochener Zahlen. Die Vereinigung zweier Brüche von verschiedenem Nenner verlangt nach der Bedingung der Gleichartigkeit ihre Umformung in solche Brüche, worin Theile derselben Art, also gleiche Nenner, vorkommen. Eine solche Verwandlung wird aber dadurch immer möglich, daß man (nach §. 23.) jede Art von Theilen in kleinere zerfällen, also den Nenner eines Bruches auf unzählige Weise durch Multiplication abändern kann, wobei der Inhalt desselben ungeändert bleiben wird, wenn man den Zähler durch denselben Factor multiplicirt. Hiernach bedarf es nur einer gleichzeitigen Multiplication im Zähler und Nenner beider zu addirenden Brüche mit ihren gegenseitigen Nennern, deren Product den gemeinschaftlichen Nenner ergeben wird, um durch Addition der Zähler die Summe zu erhalten, z. B.

$$\frac{5}{7}+\frac{2}{3}=\frac{5.3}{7.3}+\frac{2.7}{3.7}=\frac{3.5+7.2}{3.7}=\frac{15+14}{21}=\frac{29}{21}$$

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}+\frac{bm}{nm}=\frac{an+bm}{mn}$$

Zusatz. Die nämliche Regel gilt offenbar für drei oder mehr zu addirende Brüche, so daß z. B.

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}=\frac{\alpha bcd+\beta acd+\gamma abd+\delta abc}{abcd}$$

zu setzen ist. Sind diese Brüche aber in bestimmten Zahlen ausgedrückt, so wird der Totalnenner häufig aus kleineren Factoren, als den Nennern a, b, c, d der Summanden zu bilden sein. Dies ist nämlich dann der Fall, wenn diese Partialnenner gemeinschaftliche Factoren besitzen, aus denen der Totalnenner dergestalt zusammengestellt wird, daß er jeden einzelnen Partialnenner (oder vielmehr dessen Factoren) in sich enthält. So findet man z. B. für die Brüche

$$\frac{7}{24}+\frac{23}{90}+\frac{116}{525}=\frac{7}{2.2.2.3}+\frac{23}{2.3.3.5}+\frac{116}{3.5.5.7}$$

den Totalnenner $=2.2.2.3.3.5.7=12600$, da in diesem Producte jeder einzelne Nenner der Summanden enthalten ist. Offenbar ist der, auf solche Art gebildete, Nenner zugleich der kleinste unter allen gemeinschaftlichen, auf welche die zu addirenden Brüche gebracht werden können. (Aufg. 9—16, §. 30.)

§. 26. Subtraction (1) ganzer und gebrochener Zahlen. Die Subtraction, wobei man anzugeben hat, wie viele gleichartige Theile entweder zu dem gegebenen Subtrahend hinzuaddirt werden müssen, um den Minuend zu erzeugen, oder umgekehrt von diesem übrig bleiben, wenn man die Theile des Subtrahends von denen des Minuends abzieht, erfordert eine gleiche vorläufige Verwandlung der Zahlen, wie die Addition; daher die Regel: man bringe die ganze Zahl auf die Benennung des Bruches und subtrahire dann die Zähler, deren Differenz, mit dem gemeinschaftlichen Nenner versehen, diejenige der gegebenen Zahlen ist, z. B.

$$6-\frac{7}{4}=\frac{6\cdot4}{4}-\frac{7}{4}=\frac{6\cdot4-7}{4}=\frac{24-7}{4}=\frac{17}{4}$$

$$\frac{23}{3}-5=\frac{23}{3}-\frac{5.3}{3}=\frac{23-5.3}{3}=\frac{23-15}{3}=\frac{8}{3}$$

$$a-\frac{b}{n}=\frac{an}{n}-\frac{b}{n}=\frac{an-b}{n}.$$

$$\frac{a}{m}-b=\frac{a}{m}-\frac{bm}{m}=\frac{a-bm}{m}$$

(2) Gebrochener Zahlen. Auch wenn ein Bruch von einem andern subtrahirt werden soll, mit dessen Nenner der seinige nicht übereinstimmt, muß dieselbe vorläufige Umformung, wie bei ihrer Addition statt finden. Die Subtraction wird, nachdem man Minuend und Subtrahend gegenseitig durch ihre Nenner im Zähler und Nenner multiplicirt, also blos der Form, nicht dem Inhalte nach,

geändert hat, allein an den Zählern vollzogen, und die Differenz erhält den gemeinschaftlichen Nenner, z. B.

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{9}=\frac{2.9}{3.9}-\frac{5.3}{9.3}=\frac{2.9-5.3}{3.9}=\frac{18-15}{27}=\frac{3}{27}$$

$$\frac{a}{k}-\frac{b}{m}=\frac{am}{km}-\frac{bk}{mk}=\frac{am-bk}{km}.$$

§. 27. Multiplication (1) ganzer und gebrochener Zahlen. Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so hat man denselben so viel mal zu setzen, als Einheiten in der ganzen Zahl vorhanden sind. Dieses geschieht aber durch bloße Wiederholung des Zählers, da die Theile des Products dieselben sein müssen, aus denen der Multiplicand besteht, folglich der Nenner ungeändert bleibt. So ist z. B.

$$\frac{4}{5}.3=\frac{4}{5}(1+1+1)=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{12}{5}=\frac{4.3}{5}.$$

Will man hingegen den Bruch als Multiplicator, die ganze Zahl als Multiplicand betrachten, so muß man aus dieser nach der Vorschrift von jenem, also durch Zerlegung und darauf folgende Zusammenfassung das Product entstehen lassen. In vorstehendem Beispiel würde demzufolge von dem Multiplicand 3 der fünfte Theil, das ist $\frac{3}{5}$ gesetzt, dieses Partialprodukt aber 4mal wiederholt werden müssen:

$$3.\frac{4}{5}=\left[3.\left(\frac{1}{5}\right)\right].4=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{12}{5}=\frac{3.4}{5}.$$

In allgemeinen Zeichen lassen sich beide Fälle der Multiplication einer ganzen und gebrochenen Zahl folgendergestalt darstellen:

$$\text{I. } \left(\frac{a}{m}\right)k=\frac{a}{m}(1+1+1\ldots.+1)=\frac{a}{m}+\frac{a}{m}\ldots.+\frac{a}{m}$$
$$=\frac{a.k}{m}.$$

$$\text{II. } k\left(\frac{a}{m}\right)=\left[k.\left(\frac{1}{m}\right)\right].a+\frac{k}{m}+\frac{k}{m}\ldots+\frac{k}{m}=\frac{k.a}{m}.$$

Die eine wie die andere Ansicht ergiebt also für die Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl die Regel, daß man den Zähler des ersten mit dieser zu multipliciren und das Product mit dem Nenner des Bruchs zu versehen habe.

Anmerkung. In einzelnen Fällen kann es einfacher sein, den Nenner des Bruchs durch die ganze Zahl zu dividiren, weil dadurch die gegebenen Theile der Einheit um eben so viel mal größer werden. So ist z. B. $\frac{5}{8}.4=\frac{5}{2}$; $\frac{a}{b.k}.k=\frac{a}{b}$.

(2) Gebrochener Zahlen. Soll ein Bruch durch einen andern multiplicirt werden, so muß man, um aus ihm auf dieselbe Weise das Product zu bilden, wie der Multiplicator aus der

Einheit entstanden ist, zuerst die durch seinen Nenner vorgeschriebene Zerlegung in kleinere Theile und dann die Zusammensetzung nach der Bestimmung seines Zählers vornehmen; z. B.

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}=\left[\frac{5}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\right]\cdot 3=\frac{5}{28}+\frac{5}{28}+\frac{5}{28}=\frac{15}{28}.$$

Hier ist der Multiplicand $\frac{5}{7}$ nach Vorschrift des Multiplicators zuerst in Viertel zerlegt, wodurch $\frac{5}{28}$ entstanden, und dann durch 3maliges Setzen dieser Einheitstheile das Product $\frac{15}{28}$ gebildet. In allgemeiner Andeutung ist

$$\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{k}=\left[\frac{a}{m}\cdot\left(\frac{1}{k}\right)\right]\cdot b=\frac{a}{mk}+\frac{a}{mk}\ldots\ldots+\frac{a}{mk}=\frac{ab}{mk}.$$

Hieraus ergiebt sich als sehr einfache Multiplicationsregel der Bruchrechnung: daß Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner zu multipliciren ist, um den ebenfalls gebrochenen Zahlenwerth des Products zu erhalten.

Zusatz. Das Product aus mehren gebrochenen Factoren $\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{b}\cdot\frac{\gamma}{c}\cdot\frac{\delta}{d}$ findet man in Folge vorstehender Regel durch Multiplication sämmtlicher Zähler und sämmtlicher Nenner, und da diese ganze Factoren, also (nach §. 12.) auf jede beliebige Weise unter einander zu versetzen sind, so folgt: (1) daß man die Zähler und Nenner in der gegebenen Form nach Gefallen mit einander vertauschen, und (2) daß man die gebrochenen Factoren derselben ebenfalls versetzen kann. (Aufg. 21—26, §. 30.)

§. 28. Division (1) ganzer und gebrochener Zahlen. Die Division eines Bruches durch eine ganze Zahl geschieht, wenn es angeht, am einfachsten durch wirkliche Theilung des Zählers in so viele gleiche Theile, als der Divisor vorschreibt (z. B. $\frac{9}{10}:3=\frac{3}{10}$); allgemeiner aber durch Verkleinerung der angegebenen Theile vermöge der Multiplication des Nenners, während man den Zähler ungeändert läßt (z. B. $\frac{9}{10}:4=\frac{9}{40}$).

Soll im Gegentheil die ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so kann man die Division dadurch ausführen, daß man jene ganze Zahl mit ihrem Divisor auf gleiche Benennung bringt, weil es dann bei durchaus gleichartigen Theilen nur der Vergleichung ihrer Zähler bedarf. So ist z. B.

$$4:\frac{5}{7}=\frac{4.7}{7}:\frac{5}{7}=\frac{28}{7}:\frac{5}{7}=\frac{28}{5}.$$

und allgemein $a:\left(\frac{b}{k}\right)=\frac{ak}{k}:\frac{b}{k}=ak:b=\frac{ak}{b}.$

Demnach wird eine ganze Zahl a durch eine gebrochene $\frac{b}{k}$ divi=

dirt, indem man sie durch die umgekehrte Bruchform, d. h. durch $\frac{k}{b}$, multiplicirt.

(2) Gebrochener Zahlen. Durch vorläufige Verwandlung der Brüche und dadurch bewirkte Uebereinstimmung der Nenner wird die Division eines Bruchs durch einen andern begreiflich; denn als eine Vergleichung oder Messung von Theilen der nämlichen Art fordert sie dann nur die Division der Zähler, z. B.

$$\frac{4}{7}:\frac{5}{6}=\frac{4.6}{7.6}:\frac{5.7}{6.7}=\frac{24}{42}:\frac{35}{42}=\frac{24}{35}=\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{5}.$$

oder allgemein ausgedrückt:

$$\frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}:\frac{bm}{nm}=an:bm=\frac{a}{m}\cdot\frac{n}{b}.$$

Auch hier schreibt die Regel der Division sehr einfach Multiplication mit dem umgekehrten Divisor vor.

Anmerkung. Die Richtigkeit dieser Rechnungsregel läßt sich auch ohne eine vorläufige Umformung beider Brüche unmittelbar dadurch erweisen, daß man nach der Definition der Division den Quotienten $\frac{an}{mb}$ durch den Divisor $\frac{b}{n}$ multiplicirt, wodurch der Dividend $\frac{a}{m}$ entsteht.

§. 29. Reduction der Brüche. Enthalten Zähler und Nenner eines Bruchs zum Theil gemeinschaftliche Factoren, so läßt er sich durch Ausscheidung derselben (nach §. 23.) auf eine einfachere Gestalt bringen oder reduciren. So ist z. B. der Bruch

$$\frac{168}{756}=\frac{3.4.7.2}{3.4.7.9}=\frac{2}{9},$$

also durch Ausscheidung der gemeinschaftlichen Factoren 3, 4, 7 auf die einfache Form $\frac{2}{9}$ reducirt und dadurch in den möglichst kleinsten (d. h. nicht ferner durch dieselbe Zahl theilbaren) Zahlen ausgedrückt. Das Product jener gemeinschaftlichen Factoren, 3.4.7 = 84, ist das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 168 = 84.2 und 756 = 84.9, welches durch fortgesetzte Division (nach §. 15.) gefunden werden kann, wofern nicht etwa (wie in obigem Beispiele) Zähler und Nenner bereits in ihre einfachsten Factoren aufgelöst gegeben sind. Um also einen, in großen Zahlen ausgedrückten, Bruch zu reduciren, hat man das größte gemeinschaftliche Maß seines Zählers und Nenners aufzusuchen, um dasselbe aus beiden auszuscheiden. In der dadurch entstehenden, vereinfachten Bruchform haben Zähler und Nenner außer der Einheit keinen gemeinschaftlichen Factor mehr und sind daher relative Primzahlen. Der Bruch selbst kann, dieser Eigenschaft angemessen, ein Primbruch genannt werden. Sollte der gegebene Bruch bereits ein solcher, also keiner Reduction fähig sein, so giebt sich dies (nach §. 15.) dadurch zu erkennen, daß

man als letzten Rest der fortgesetzten Division die Einheit findet. (Aufg. 31—36, §. 30.)

§. 30. Aufgaben.

1. Man scheide die ächten und unächten Brüche aus der Reihe $\frac{3}{5}, \frac{7}{4}, \frac{8}{3}, \frac{19}{20}, \frac{11}{10}, \frac{6}{8}, \frac{126}{64}, \frac{12}{12}, \frac{5}{4}, \frac{3}{6}, \frac{8}{9}, \frac{4}{4}, \frac{17}{18}$.

2. Eben so nach Vermehrung aller Zähler um 2.

3. Eben so nach Vermehrung der Nenner um 4.

4. Eben so nach Verminderung der Zähler um 3.

5. Eben so nach Verminderung der Nenner um 3.

6. Die Brüche $\frac{18}{81}, \frac{711}{3015}, \frac{45a}{27b}, \frac{207}{594}, \frac{1116}{414}, \frac{8001p}{36a}, \frac{324ab}{369m}$, durch Multiplication mit 7 umzuformen (zu erweitern).

7. Eben so durch Division mit 9 (zu reduciren).

8. Die ganzen Zahlen 11, 43, 75, 117, 219, 1003 in Drei und Achtzigstel zu verwandeln.

9. Man addire $2+\frac{3}{100}, 5+\frac{3}{17}, 16+\frac{4}{11}, \frac{13}{31}+277{,}96+\frac{121}{431}$.

10. Eben so $k+\frac{n}{a}, 3k+\frac{n^2}{a^2}, m+\frac{abc}{7n}, 4f+\frac{mr}{3k^4}, h+\frac{1}{9am}$.

11. Eben so $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}, \frac{13}{17}+\frac{4}{5}, \frac{6}{23}+\frac{7}{31}, \frac{102}{119}+\frac{41}{8}, \frac{9}{11}+\frac{16}{70}$.

12. Eben so $\frac{5}{8}+\frac{9}{10}+\frac{4}{5}, \frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}, \frac{2}{3}+\frac{11}{12}+\frac{7}{45}$.

13. Eben so $\frac{a}{b}+\frac{m}{n}, \frac{a}{b}+\frac{2m}{3n}, \frac{k}{4g}+\frac{5ab}{c}, \frac{3m}{5p}+\frac{k}{m}, \frac{7h}{m}+\frac{5m}{9n}$.

14. Eben so $\frac{16}{2.2.3.5.7}+\frac{31}{2.3.3.7.7}+\frac{47}{3.3.3.5.7.7}$.

15. Eben so $\frac{459}{3.5.7.7.9}+\frac{63}{5.5.7.9.9}+\frac{1080}{5.5.9.23}$.

16. Eben so $\frac{251}{24750}+\frac{314}{11250}+\frac{1157}{672300}+\frac{418}{1575}+\frac{316}{2475}$.

17. Man subtrahire $6-\frac{4}{7}, 81-\frac{425}{11}, \frac{511}{19}-19, 33-\frac{1}{33}, \frac{52}{13}-4, 1-\frac{1}{1001}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}, \frac{1}{99}-\frac{1}{100}$.

18. Eben so $a-\frac{k}{p}, \frac{5n}{k}-m, 8m-\frac{1}{3m}, \frac{12a}{11c}-h, 3p-\frac{3}{4n}, 1-\frac{1}{a^4}, \frac{a+1}{a}-1, 1-\frac{a}{a+1}, 1-\frac{b}{a+b}$.

19. Eben so $\frac{5}{16}-\frac{3}{31}, \frac{13}{14}-\frac{4}{9}, \frac{15}{11}-\frac{31}{32}, \frac{111}{10}-\frac{41}{5}, \frac{44}{8}-\frac{1}{7}, \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{24}, \left(\frac{4}{7}+\frac{5}{11}\right)-\frac{61}{77}, \left(\frac{7}{12}+\frac{3}{5}\right)-\frac{9}{10}$.

20. Eben so $\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$, $\frac{7a}{m}-\frac{b}{3n}$, $\frac{k}{3p}-\frac{4a}{5b}$, $\frac{1}{gg}-\frac{1}{h}$, $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$, $\left(1+\frac{m}{n}\right)-\frac{k}{n}$, $\left(5a+\frac{b}{c}\right)-\frac{m}{c}$, $\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)-\frac{4}{b}$.

21. Man multiplicire $5 \cdot \frac{3}{8}$, $7 \cdot \frac{15}{19}$, $\frac{26}{77} \cdot 16$, $8 \cdot \frac{211}{61}$, $\frac{1022}{97} \cdot 18$.

22. Eben so $\frac{15}{16} \cdot \frac{56}{45}$, $\frac{207}{210} \cdot \frac{35}{18}$, $\frac{22}{51} \cdot 17$, $\frac{90}{91} \cdot 13$, $\frac{100}{111} \cdot 3$.

23. Eben so $k \cdot \frac{m}{4n}$, $\frac{3b}{5c} \cdot 5a$, $111g \cdot \frac{5m}{3a}$, $\frac{7k}{4g} \cdot 19$, $\frac{3}{7a} \cdot 5a$, $p \cdot \frac{1}{a^4}$.

24. Eben so $\frac{17}{19} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{80}{11} \cdot \frac{1}{7}$, $\frac{18}{15} \cdot \frac{15}{36} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{81}{77}$, $\frac{5}{11} \cdot \frac{99}{16} \cdot \frac{102}{100} \cdot \frac{50}{3}$.

25. Eben so $\frac{a}{b} \times \frac{4a}{5b} \times \frac{k}{m} \times \frac{1}{m}$, $\frac{5}{p} \times \frac{3r}{5q} \times \frac{7m}{3n} \times \frac{5a}{4m} \times \frac{b}{7}$.

26. Eben so $\frac{a}{3b} \times \frac{7k}{3g} \times \frac{10b}{11c} \times \frac{8g}{21k} \times \frac{44c}{5a} \times \frac{9m}{4n}$.

27. Man dividire $\frac{51}{4} : 17$, $\frac{121}{17} : 11$, $\frac{16}{9} : 7$, $8 : \frac{1}{4}$, $45 : \frac{3}{5}$, $19 : \frac{5}{7}$.

28. Eben so $\frac{4aa}{m} : 2a$, $\frac{5ab}{2c} : b$, $\frac{km}{n} : pq$, $18a : \frac{b}{k}$, $5m : \frac{p}{3q}$.

29. Eben so $\frac{5}{9} : \frac{3}{7}$, $\frac{16}{19} : \frac{4}{11}$, $\frac{1}{10} : \frac{1}{13}$, $\frac{5}{27} : \frac{1}{5}$, $\frac{33}{42} : \frac{11}{7}$, $\frac{169}{170} : \frac{12}{13}$.

30. Eben so $\frac{8ak}{3b} : \frac{4a}{b}$, $\frac{m}{p} : \frac{p}{m}$, $\frac{7a}{3} : \frac{4}{m}$, $\frac{21k}{13a} : \frac{1}{5b}$, $\frac{144am}{13b^2} : \frac{12a^4}{m^2}$.

31. Man reducire die Brüche $\frac{637}{1001}$, $\frac{319}{1189}$, $\frac{1819}{4403}$, $\frac{7141}{2183}$, $\frac{26057}{2059}$.

32. Eben so $\frac{1763}{20459}$, $\frac{62519}{55853}$, $\frac{21733}{50573}$, $\frac{82433}{100943}$, $\frac{77708}{63542}$.

33. Eben so $4+\frac{13}{78}$, $19+\frac{209}{1463}$, $5-\frac{161}{1723}$, $10-\frac{847}{1573}$.

34. Eben so $1-\frac{679}{1129}$, $\frac{1309}{1463}+\frac{2}{19}$, $\frac{893}{329}-\frac{12}{7}$, $\frac{961}{1891}-\frac{31}{61}$.

35. Eben so $5a+\frac{105a}{106m}$, $7k-\frac{539n}{5537}$, $\frac{4a}{3m}+\frac{1133b}{5687k}$.

36. Eben so $\frac{10k}{7a}-\frac{2047}{6853}$, $\frac{1001a}{77b}+\frac{371a}{49b}$, $\frac{1261m}{194p}-\frac{2m}{3p}$.

Drittes Capitel.

Gegensatz der Zahlen.

§. 31. Gegensatz der Grundoperationen. Es ist von besonderer Wichtigkeit, bei Betrachtung der Grundoperationen in ganzen Zahlen die gegenseitige Beziehung derselben aufzufassen, wonach Addition und Subtraction, so wie Multiplication und Division ihre Wirkung auf eine gegebene Zahl entweder ganz oder doch wenigstens theilweise aufheben, wenn eine dieser Operationen unmitelbar nach der andern vorgenommen wird. Man erkennt diesen doppelten Gegensatz in den Beispielen:

I. $(12+5)-5=12$; $(12-7)+7=12$;
II. $(12+5)-3=14$; $(12-3)+7=16$;
III. $(12\times6):6=12$; $(12:4)\times4=12$;
IV. $(12\times6):3=24$; $(12:4)\times5=15$;

wo in I und II die beiden ersten, in III und IV die beiden letzten Grundoperationen einander aufhebend gegenüberstehen. Aber nicht allein der Begriff entgegenstehender Operationen, sondern auch der einer gleichartigen Zahlenverbindung, sei es Addition oder Multiplication, führt unter bestimmten Voraussetzungen zu der Vorstellung entgegengesetzter Zahlen, d. h. solcher, die auf die nämliche Weise mit einer dritten Zahl verbunden, einander gegenseitig (ganz oder theilweise) vernichten oder aufheben.

Zur Vorstellung solcher entgegengesetzten Zahlen führen uns die mannigfachsten Betrachtungen. Steht ein Thermometer Morgens auf 5, Mittags auf 9 Grad und sinkt dann bis Mitternacht um 12 Grade, so drücken wir diese drei Standpunkte durch die Zahlen $+5$, $+9$ und -3 aus; soll eine Summe von 300 Thalern um 150 vermehrt und davon eine Schuld von 500 Thalern getilgt werden, so erhält man die Zahlen $+300$, $+450$ und -50 als Andeutungen der Geldbeträge, wovon die letzte einen Mangel an 50 Thalern bezeichnet; bewegt sich Jemand 60 Schritte südlich auf dem Verdeck eines Schiffes, das während dieser Zeit 100 Schritt nördlich steuert, so ist er in der That nur $+100-60=+40$, d. h. 40 Schritte weiter nördlich gekommen.

§. 32. Entgegengesetzte Zahlenglieder. Eine Zahl a, welche in Beziehung auf irgend eine, ursprünglich vorgestellte k als Vermehrung derselben gedacht und demgemäß durch $+a$ angedeutet wird, heißt additiv oder positiv; eine Zahl b, in Beziehung auf k als Verminderung gedacht und deshalb durch $-b$ ausgedrückt, hingegen eine subtractive oder auch negative Zahl. Es ist leicht wahrzunehmen, wie in diesem Sinne der unbegränzten Reihe positiver Zahlen eine eben so unbegränzte Reihe negativer Zah-

len gegenüberstehen muß; denn wie durch wiederholtes Addiren, so läßt sich nicht minder durch wiederholtes Subtrahiren der Einheit eine in's Unendliche fortlaufende Zahlenreihe bilden, deren Glieder sich von den Gliedern jener Reihe keineswegs durch ihren Inhalt, sondern vielmehr durch die Beziehung des Gegensatzes, worin sie zu einander stehen, wesentlich unterscheiden. Auf diese Weise erhält man als vollständigere Andeutung der Reihe ganzer Zahlen:

$\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$

worin auf der einen Seite die Reihe aller positiven Zahlen durch wiederholtes Setzen der additiven Einheit, auf der andern aber die Reihe der negativen Zahlen durch Wiederholung der subtractiven Einheit sich erzeugt.

Die allgemeine Form $k+a-b=k+1.a-1.b$ deutet demnach die Addition von a und Subtraction von b Einheiten, oder mit andern Worten die Verbindung der Zahl k mit a positiven und b negativen Einheiten an. Hierbei kommt k nur in Absicht der Uebereinstimmung oder des Gegensatzes seiner Einheiten zu denen von a und b, aber keineswegs in Hinsicht auf seinen Inhalt in Betracht, den man beliebig groß annehmen darf, damit er jeder vorgeschriebenen Verminderung fähig sei. Demnach wird man in der Differenzform $k-b$ für die unbestimmte Zahl k solche Werthe anzunehmen haben, welche den Werth von b übersteigen, wofern eine positive Zahl als Differenz zum Vorschein kommen soll, z. B. $k=11$, 12, 13 u. s. f., wenn $b=10$ ist. Bei der Annahme kleinerer Werthe für k, z. B. 9, 8, 7 u. s. f. würde dagegen der Subtrahend den Minuend überwiegen, also die Differenz negativ werden. Setzt man $k=0$, also $k-b=0-b$, so beschränkt der Werth dieser Differenzform sich auf die negative Zahl $-b$ und drückt eine Anzahl von b subtractiven Einheiten aus, denen der Minuend mangelt, von welchem sie abgezogen werden könnten.

§. 33. Verbindung entgegengesetzter Zahlenglieder. Faßt man in der unbegränzten Reihe positiver und negativer Zahlen $\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5 \ldots$ je zwei inhaltsgleiche Glieder von beiden Seiten zusammen, z. B. $+4$ und -4, -3 und $+3$, so ist die Summe nothwendig immer $=0$, da gleichviel Einheiten zugleich addirt und subtrahirt werden sollen. Eben so erhält man allgemein, wenn man die unbestimmte Zahl k um a Einheiten zugleich vermehrt und vermindert denkt, die Gleichung

$$k+a-a=k+0=k;\text{ d. h.}$$

1. Zwei gleiche, aber entgegengesetzte Zahlenglieder heben einander bei der Vereinigung völlig auf.

Angenommen aber, daß in der allgemeinen Differenzform $a-b$ der Inhalt der Zahlen a und b verschieden, also entweder (1) $a=$

b+r oder (II) a=b−r sein möge, so erhält man, indem man auf beiden Seiten dieser gleichen Ausdrücke b subtrahirt:

$$(I)\quad a-b=b+r-b=+r;$$
$$(II)\quad a-b=b-r-b=-r;$$

woraus sich folgender Lehrsatz ergiebt:

2. Zwei ungleiche und entgegengesetzte Zahlenglieder werden vereinigt, indem man die kleinere von der größern Zahl subtrahirt, und der Differenz das Vorzeichen der letzten giebt.

Anmerkung. Ist es unbestimmt, ob eine Zahl m als positiv (+m) oder negativ (−m) anzusehen sei, d. h. ob m additive oder subtractive Einheiten zähle, so bezeichnet man diesen Umstand durch Vorsetzung beider Zeichen, wie in ±m (d. i. +m oder −m).

§. 34. Addition positiver und negativer Zahlen. Sollen zwei Zahlen ±a und ±b, von denen a als die größere vorausgesetzt werden mag, addirt werden, so geschieht dies nach einer der folgenden vier Andeutungen:

I.	$(+a)+(+b)=+(a+b)$; z. B.	$(+6)+(+4)=+(6+4)$.
II.	$(-a)+(-b)=-(a+b)$;	$(-8)+(-4)=-(8+4)$.
III.	$(+a)+(-b)=+(a-b)$;	$(+10)+(-6)=+(10-6)$.
IV.	$(-a)+(+b)=-(a-b)$;	$(-12)+(+8)=-(12-8)$.

Denn da durch das zwischengestellte Additionszeichen eine Vereinigung beider Zahlen gefordert wird, so ist es an sich klar, daß ihre Einheiten (oder Einheitstheile) in eine gleichbezeichnete Summe zusammengezogen werden müssen, sofern sie einstimmig sind, wie in I und II; ferner folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden (§. 33, L. 2.), daß ihre Differenz mit dem Zeichen der größern Zahl genommen werden muß, wenn beide entgegengesetzte Zeichen haben. Hieraus fließt folgender Lehrsatz:

Zwei Zahlen (±a, ±b) werden addirt, indem man ihrer Summe das gemeinschaftliche Zeichen giebt, wenn sie einstimmig, ihrer Differenz aber das Zeichen der größeren, wenn sie entgegengesetzt bezeichnet sind. (Aufg. 1−3, §. 40)

Zusatz. Durch mehrfaches Setzen der nämlichen, positiv oder negativ bezeichneten, Zahl erhält man ein positives oder negatives Vielfaches dieser Zahl:

$$(+a).m=+1.a.m=+1.m.a=+m.a$$
$$(-a).m=-1.a.m=-1.m.a=-m.a$$

§. 35. Subtraction positiver und negativer Zahlen. Die Fälle, welche bei der Subtraction positiver und negativer Zahlen eintreten können, sind in nachstehenden 4 Formeln enthalten, deren Richtigkeit sich ergiebt, wenn man, der Erklärung des Subtrahirens (§. 10.) gemäß, den Subtrahend der Differenzform auf beiden Seiten addirt.

I. $(+a)-(+b)=+(a-b)$; z. B. $(+8)-(+5)=+8-5$.
II. $(-a)-(-b)=-(a+b)$; $(-6)-(-3)=-6+3$.
III. $(+a)-(-b)=+(a+b)$; $(+9)-(-4)=+9+4$.
IV. $(-a)-(+b)=-(a-b)$; $(-7)-(+5)=-7-5$.

Aus diesen Formeln folgt unmittelbar als Lehrsatz der Subtraction:

Eine Zahl $(\pm b)$ wird von einer andern $(\pm a)$ subtrahirt, indem man sie mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu dieser addirt. (Aufg. 4—6, §. 40.)

Zusatz. Soll das Mehrfache einer positiv oder negativ bezeichneten Zahl von einer andern subtrahirt werden, so braucht man nur ihr Mehrfaches mit dem entgegengesetzten Zeichen zu addiren; d. h. es ist

$$k-(+a)m=k+(-a)m:$$
$$k-(-a)m=k+(+a)m;$$

weil der Minuend k hervorgeht, wenn man den Subtrahend auf der rechten Seite addirt.

§. 36. Multiplication positiver und negativer Zahlen. Die möglichen Fälle der geforderten Multiplication zweier gleich oder ungleich bezeichneter Factoren werden dargestellt durch:

I. $(+a).(+b)$ II. $(-a).(+b)$ III. $(+a).(-b)$ IV. $(-a).(-b)$.

Um nun zu erkennen, auf welche Weise das Vorzeichen des Products durch diejenigen seiner Factoren bestimmt werde, hat man sich den Multiplicator $(\pm b)$ als additiv oder subtractiv in Beziehung auf eine unbestimmte (aber hinreichend groß angenommene) ganze Zahl k vorzustellen, wodurch die obigen Andeutungen sich in folgende verwandeln:

I. $(+a).(k+b)$. III. $(+a).(k-b)$.
II. $(-a).(k+b)$. IV. $(-a).(k-b)$.

Hier verlangt die Summen- oder Differenzform des Multiplicators, daß der Multiplicand in den beiden ersten Fällen (I. und II.) bmal mehr, als kmal; in den beiden andern aber (III. und IV.) bmal weniger, als kmal, genommen werden solle. Man erhält mithin (nach den Zusätzen in §. 34. und 35.) für die Producte folgende Gleichungen:

I. $(+a).(k+b)=+ka+ba$.
II. $(-a).(k+b)=-ka-ba$.
III. $(+a).(k-b)=+ka-ba$.
IV. $(-a).(k-b)=-ka+ba$.

Betrachtet man nun in diesen Ausdrücken, wo k als eine völlig unbestimmte Zahl angenommen wurde, nur die Endglieder der zweitheiligen Producte in Rücksicht auf die Factoren, woraus sie gebildet sind, so ergiebt sich als Lehrsatz der Multiplication:

Das Product zweier Zahlen $(\pm a)$ und $(\pm b)$ ist positiv,

wenn jene Zahlen einstimmig, hingegen negativ, wenn sie entgegengesetzt bezeichnet sind. (Aufg. 7—12, §. 40.)

Zusatz. Das Product aus mehren negativen Factoren wird positiv, wenn die Anzahl derselben gerade, hingegen negativ, wenn ihre Anzahl ungerade ist. So ist z. B.

$$(-a).(-b).(-c).(-d)=(+ab).(+cd)=+abcd.$$
$$(-p).(-q).(-r)=(+pq).(-r)=-pqr.$$

§. 37. Division positiver und negativer Zahlen. Alle bei der Division positiver und negativer Zahlen ($\pm ab$) und ($\pm a$) möglicher Weise vorkommende Fälle sind enthalten in den vier Gleichungen:

$$\text{I.}\quad (+ab):(+a)=+b,$$
$$\text{II.}\quad (-ab):(-a)=+b,$$
$$\text{III.}\quad (-ab):(+a)=-b,$$
$$\text{IV.}\quad (+ab):(-a)=-b,$$

deren Richtigkeit, der Erklärung der Division (§. 13.) gemäß, sich unmittelbar ergiebt, indem man den Quotienten mit dem Divisor (nach §. 36.) multiplicirt. Eine gemeinsame Vorschrift für die verschiedenen, in jenen Ausdrücken dargestellten Fälle der Division umfaßt folgender Lehrsatz:

Der Quotient zweier Zahlen ($\pm ab$) und ($\pm a$) ist positiv, wenn jene Zahlen einstimmig, hingegen negativ, wenn sie entgegengesetzt bezeichnet sind. (Aufg. 13—15, §. 40.)

§. 38. Entgegengesetzte Factoren. So wie eine Zahl k durch Addition gleicher, aber entgegengesetzt bezeichneter Summanden ($+a$ und $-a$) ungeändert bleibt, kann man sich ebenfalls vorstellen, daß sie durch Multiplication mit zwei Factoren (m und n) nicht geändert, d. h. daß $k.m.n$ wiederum $=k$ werde. Da nun aber eine Zahl durch Multiplication nur dann ungeändert bleiben kann, wenn man sie einmal nimmt, so kann jene Bedingung nur dadurch erfüllt werden, daß man das Product der beiden Factoren von k, d. h. $m.n=1$ setzt. Demnach ist nothwendig:

(1) wenn m eine ganze Zahl $=a$ ist, der Factor $n=\frac{1}{a}$;

(2) wenn m ein Stammbruch $=\frac{1}{a}$ ist, der Factor $n=a$;

(3) wenn m eine Bruchform $=\frac{a}{b}$ ist, der Factor $n=\frac{b}{a}$;

denn nur unter diesen Annahmen kann (nach §. 27.) $k.m.n=k$ werden. Es sind also die ganze Zahl a und der Stammbruch $\frac{1}{a}$, allgemeiner aber die Bruchformen $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$, Factoren von der Beschaffenheit, daß ihr Product $=1$ ist, folglich die Multiplication

einer Zahl durch beide nach einander dieselbe ungeändert läßt, weshalb sie entgegengesetzte Factoren zu nennen sind. Da jedesmal der eine dieser Factoren größer, der andere durch Umkehrung desselben entstehende aber kleiner, als die Einheit sein muß (sofern nicht etwa $m = n = 1$ angenommen wird), so kann man beide als den vergrößernden und verkleinernden Factor von einander unterscheiden, z. B.

$$5 \text{ und } \frac{1}{5}, \frac{4}{7} \text{ und } \frac{7}{4}, \frac{1}{100} \text{ und } 100.$$

§. 39. Verbindung entgegengesetzter Factoren. Sollen mehre entgegengesetzte Factoren mit einander verbunden werden, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) Die vergrößernden und verkleinernden Factoren sind in gleicher Anzahl vorhanden. In diesem Falle kann man sie allmählig paarweise verbinden, wodurch das Product aller $= 1$ wird. So ist z. B.

$$a.a.a.a.\frac{1}{a}.\frac{1}{a}.\frac{1}{a}.\frac{1}{a} = 1, \frac{m}{n}.\frac{m}{n}.\frac{m}{n}.\frac{n}{m}.\frac{n}{m}.\frac{n}{m} = 1.$$

(2) Beide Arten von Factoren sind in ungleicher Anzahl vorhanden, alsdann darf man so viele, als von beiden in gleicher Anzahl vorkommen, in den Factor 1 vereinigen, wonach das Product dem der übrigbleibenden Factoren gleich wird. So findet man z. B.

$$a.a.a.a.\frac{1}{a}.\frac{1}{a} = a.a; \frac{n}{m}.\frac{n}{m}.\frac{m}{n}.\frac{m}{n}.\frac{m}{n} = \frac{m}{n}.$$

Anmerkung. Bedient man sich (nach §. 12, Anm.) der Exponenten zur Abkürzung, so lassen die vorstehenden Producte sich weit einfacher darstellen: $a^4.\left(\frac{1}{a}\right)^2 = a^2$; $\left(\frac{n}{m}\right)^2.\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{m}{n}$.

§. 40. Aufgaben.

1. Man addire $(+8)+(+6)$, $(-27)+(-16)$, $(-9)+(+81)$, $(+14)-(-9)$, $(-17)+(-1)$, $(-113)+(+71)$.

2. Eben so $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(+\frac{3}{-}\right)$, $\left(-\frac{5}{7}\right)+\left(+\frac{13}{5}\right)$.

3. Eben so $(-2m)+\left(+\frac{3}{4}m\right)$, $(+21b)+\left(-\frac{1}{3}b\right)$, $\left(-\frac{17a}{3m}\right)+\left(+\frac{15a}{8m}\right)$, $(-107x)+\left(+\frac{33x}{7}\right)$.

4. Man subtrahire $(+28)-(+17)$, $(+16)-(-11)$, $(-19)-(+1)$, $(-4)-(-3)$, $(+107)-(-20)$, $(-8)-(+27)$.

5. Eben so $(+5a)-(-7a)$, $(-19b)-(+3b)$, $(-6c)-(-c)$, $(+d)-(+4d)$, $(+k)-(-k)$, $(-1406c)-(-2566c)$.

6. Eben so $\left(-\frac{3a}{4}\right)-\left(+\frac{3a}{7}\right)$, $\left(+\frac{4m}{11}\right)-\left(-\frac{6m}{5}\right)$, $\left(+\frac{p}{4}\right)-\left(-\frac{q}{5}\right)$, $\left(-144\frac{p}{q}\right)-\left(+144\frac{p}{q}\right)$.

7. Man multiplicire $(+3).(-7)$, $(-5).(+121)$, $(-19).(-17)$, $(-4).\left(-\frac{3}{7}\right)$, $\left(-\frac{25}{3}\right).\left(+\frac{99}{35}\right)$.

8. Eben so $\left(-\frac{a}{4}\right).(+13b)$, $(14a).\left(-\frac{17}{8}b\right)$, $(5a).(7b)$, $(-18a).\left(-16\frac{b}{c}\right)$, $(23a).\left(-\frac{201}{4}a\right)$, $\left(-\frac{9}{16}\right).\left(\frac{144k}{81}\right)$.

9. Eben so $(7a).(+50)$, $(3b).(-16)$, $(-92f).(-11g)$, $(-4h).\left(\frac{7}{11}k\right)$, $(+33k).\left(-\frac{5k}{9}\right)$, $\left(-\frac{6}{7}m\right).\left(-\frac{m}{5}\right)$.

10. Eben so $-\frac{4}{3}m\times 3n$, $-\frac{10}{11}m\times -\frac{2}{9}n$, $\frac{12}{13}m\times -\frac{6}{7}n$.

11. Eben so $-7a\times 13b\times -11a\times -4b\times a\times -2b$.

12. Eben so $a\,(-b)\;2a\,(-2b)\;3a\,(-3b)\;4a\,(-4b)\;5a\,(-5b)$.

13. Man dividire $-4aaabbc$ durch $+abc$.

14. Eben so $+15mmndq:-5mpq$, $-6a.7b.8cc:-3a.bpc$.

15. Eben so $+1728a^{10}:12a^6$, $-61533m^2:9m$, $5472p^4:-36p$.

16. Die Factoren $\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}$ zu verbinden.

17. Eben so $4^4.\frac{1}{4}$, $17^3.\frac{1}{17}.\frac{1}{17}$, $\frac{15}{16}.\left(\frac{16}{15}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^7.2^5$.

18. Eben so $\frac{1}{5}.\frac{1}{6}.\frac{1}{7}.5^3.6,7.\frac{1}{3}.8.\frac{1}{7}.3.\frac{1}{8}$, $\frac{9}{4}.\frac{3}{10}.\frac{4}{9}.\frac{17}{3}$.

19. Eben so $\left(\frac{a}{b}\right)^4.\left(\frac{b}{a}\right)^7$, $\left(\frac{m}{n}\right)^{18}.\left(\frac{n}{m}\right)^{19}$, $aa\left(\frac{1}{a}\right)^{12}$.

20. Eben so $a^4.b^5.c^8.\left(\frac{1}{a}\right)^6\left(\frac{1}{b}\right)^8$, $p^{10}.q^4.r\left(\frac{1}{p}\right)^2\left(\frac{1}{q}\right)^3\left(\frac{1}{r}\right)^7$.

Viertes Capitel.

Allgemeine Zahlenverbindung.

§. 41. Bedeutung der Zahlensymbole. Die Andeutung der Zahlen durch Buchstaben, wodurch es ganz unbestimmt gelassen wird, welchen Inhalt man diesen beilegen soll, gestattet uns, sowohl gebrochene als ganze Zahlen darunter zu begreifen. Da nun die, unter dem Namen der Grundoperationen behandelten Zahlenverbindungen ihrer Erklärung gemäß durchaus die nämlichen bleiben, mögen sie auf gebrochene oder auf ganze Zahlen bezogen werden, also von dem zufälligen Werthe der zu verbindenden Zahlen ganz unabhängig sind, so kommt der Unterschied zwischen ganzen und gebrochenen Zahlen gar nicht in Betracht, sofern Addition oder Subtraction, Multiplication oder Division an Buchstaben, als völlig unbestimmten Zahlensymbolen, vorgeschrieben werden. So kann man z. B. die Zahlformen $a+b$, $m-n$, $p.q$, als allgemeine Andeutungen der besonderen Fälle $3+7$, $4+\frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$; $5-2$, $\frac{7}{2}-3$, $\frac{5}{7}-\frac{1}{3}$; 3.8, $5.\frac{3}{8}$, $\frac{7}{9}.\frac{5}{4}$ betrachten, in denen ganze und gebrochene Zahlen ohne Unterschied gegeben sind. Sogar der Gegensatz, welcher zwischen Addition und Subtraction stattfindet, kann in jene unbestimmte Zahlenandeutung aufgenommen werden, indem man sich unter den einzelnen Buchstaben entweder positive oder negative Zahlen (nach §. 32.) vorstellt, wonach z. B. die Summenform $a+b$ die besonderen Fälle $4+8$, $7-5$, $-10+3$, $-6-7$, $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$ zugleich in sich fassen würde. Um demnach den vier Grundoperationen der Arithmetik die größte Allgemeinheit zu ertheilen, darf man nur jede besondere Voraussetzung über die Bedeutung der Zahlzeichen aufgeben und sich unter ihnen unbestimmte Andeutungen eines gewissen Inhalts vorstellen, die nach bestimmten Vorschriften der Rechnung mit einander verbunden werden sollen.

§. 42. Polynom. Jede Verallgemeinerung der Grundoperationen verlangt ferner, daß die Zahlformen, an denen sie vorgenommen werden sollen, als Polynome, d. h. aus beliebig vielen Zahlen zusammengesetzt, betrachtet werden. Der allgemeinste Ausdruck eines solchen Polynoms ist:

$$P=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\varphi+ \text{ꝛc.},$$

worin durch die + Zeichen nur die Verbindung der Zahlenglieder überhaupt angedeutet, die positive oder negative Beschaffenheit derselben aber völlig unbestimmt gelassen wird. Soll diese näher angegeben werden, so sind die additiven und subtractiven Glieder durch die Zeichen + und — ausdrücklich zu unterscheiden, wie z. B. in

$$P=\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon+\varphi+ \text{ꝛc.},$$

Sollen ferner die einzelnen Glieder als ein Vielfaches gewisser Zahlen A, B, C, D . . . . angesehen werden, so ist dieses durch Verbindung derselben mit Coefficienten zu bezeichnen, wie in

$$P=3A-4B+7C+8D-16E+4F+ \text{ꝛc.},$$

oder allgemeiner in der Form

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D+\varepsilon E+\varphi F+ \text{ꝛc.}$$

§. 43. **Umformung des Polynoms.** Sei P der Inhalt eines beliebigen Polynoms, z. B.

$$(1)\ P=\alpha A-\beta B+\gamma C-\delta D-\varepsilon E+\varphi F \text{ ꝛc.},$$

so läßt sich durch Addition aller subtractiv bezeichneten Glieder auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen (nach Ax. 1) eine Summengleichung

$$P+\beta B+\delta D+\varepsilon E=\alpha A+\gamma C+\varphi F$$

bilden, aus welcher durch Subtraction des zu P addirten Polynoms $(\beta B+\delta D+\varepsilon E)$ endlich (nach Ax. 3) die Differenzgleichung

$$(2)\ P=(\alpha A+\gamma C+\varphi F)-(\beta B+\delta D+\varepsilon E)$$

hervorgeht. Da man nun bei jeder beliebigen Umstellung der Glieder im Ausdruck (1) stets zu der nämlichen Form (2) gelangen muß, so ergeben sich aus dem Vorstehenden folgende Lehrsätze:

1. Eine vieltheilige, aus theils additiven, theils subtractiven Gliedern bestehende Zahlform kann immer als eine Differenz der beiden Summen jener verschiedenartigen Glieder betrachtet werden.

2. In jeder vieltheiligen Zahlform kann man, ohne den Inhalt zu ändern, die einzelnen Glieder beliebig unter einander versetzen (Aufg. 1—3, §. 52.)

§. 44. **Addition von Polynomen.** Sollen vieltheilige Zahlformen addirt werden, so läßt eine wirkliche Vereinigung oder Zusammenziehung sich nur an **gleichnamigen** Gliedern der gegebenen Polynome vornehmen. Um diese nun leichter übersehen und verbinden zu können, ist eine Anordnung der Glieder in der nämlichen Reihefolge erforderlich. Die Verbindung der unter einander gesetzten Polynome geschieht, nach folgendem Satze:

Man addirt Polynome, indem man von den gleichnamigen Gliedern jeder Verticalreihe zuerst die additiven, dann die subtractiven zusammenzieht, die kleinere Summe von der größeren subtrahirt und dem Reste das Zeichen der letzten ertheilt.

$$\begin{array}{rl} \text{Sei z. B. } P= & a+5b-7c+3d-\tfrac{1}{4}e+f \\ Q= & 3a-b+3c-3d \quad -7f \\ R= & \quad 4b-4c+\tfrac{3}{5}d+\tfrac{1}{4}e+9f \\ \hline \text{so ist } (P+Q+R)= & 4a+8b-8c+\tfrac{3}{5}d+3f. \end{array}$$

Den Beweis für die Richtigkeit des hier angegebenen Verfahrens enthalten die Lehrsätze 1. des §. 43. und 2. des §. 33. (Aufg. 4—12, §. 52.)

§. 45. Subtraction von Polynomen. Wie beim Addiren ist auch beim Subtrahiren vielgliedriger Zahlformen eine gleichmäßige Anordnung der Glieder nothwendig, von denen die gleichnamigen unter einander zu stehen kommen. Ihre Verbindung geschieht dann nach folgender Vorschrift:

Man subtrahirt Polynome, indem man die Vorzeichen sämmtlicher Glieder des Subtrahends in die entgegengesetzten verwandelt und die so veränderten Glieder zu denen des Minuends addirt. (Die Veränderung der Zeichen wird gewöhnlich durch Untersetzen der entgegengesetzten angedeutet.)

$$\begin{array}{rl} \text{Sei z. B. } P = & 3f + 5g - \tfrac{1}{4}h + 7k - m \\ Q = & f - 16g + 9h - 3k - 5m \\ & - \quad\; - + \quad - \quad + \quad + \\ \hline \text{so ist } P - Q = & 2f + 21g - 9\tfrac{1}{4}h + 10k + 4m. \end{array}$$

Vorstehende Regel der Subtraction ist nur die Wiederholung derjenigen, welche im (§. 35.) allgemein in Beziehung auf positive und negative Zahlen ausgesprochen wurde. Auch kann die Richtigkeit des, nach ihr erhaltenen, Restes in jedem Falle dadurch erkannt werden, daß durch seine Addition zum Subtrahend der Minuend wieder hervorgeht, wie es die Erklärung der Subtraction (§. 10.) fordert.

Wird der Subtrahend, in Klammern eingeschlossen, mit dem Zeichen der Subtraction hinter den Minuend gesetzt, so ist die obige Regel dahin auszusprechen: daß man mit Weglassung der Klammern sämmtlichen Gliedern des Subtrahends das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben habe. So ist z. B.

$$(4a + 7b + 13c - 8d) - (a - 6b + 7c + 11d)$$
$$= 4a + 7b + 13c - 8d - a + 6b - 7c - 11d$$

zu setzen, worauf alsdann die gleichnamigen Glieder weiter vereinigt werden können. (Aufg. 13—19, §. 52.)

§. 46. Multiplication von Polynomen. Soll ein Polynom $P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ durch irgend eine Zahl $\pm k$ multiplicirt werden, so kann diese Multiplication nur schrittweise an den einzelnen Gliedern des Multiplicands geschehen, indem man jedes derselben kmal setzt und im Falle, daß der Multiplicator negativ ist, überdies jedem Partialproducte (nach §. 36.) das entgegengesetzte Vorzeichen von demjenigen des multiplicirtes Gliedes ertheilt. Dadurch entsteht eine Reihe von eben so vielen Partialproducten, als der Multiplicand Glieder enthält, welche in ihrer Gesammtheit das gesuchte Totalproduct geben. So erhält man als Product der Factoren P und Q, wenn z. B. $P = (3a + 5b - 7c + d)$ und $Q = 4b$ angenommen wird, das Polynom $P.Q = 12ab + 20b^2 - 28bc + 4bd$; hingegen wenn man $Q = -5d$ setzt, $P.Q = -15ad - 25bd + 35cd - 5d^2$.

Ist aber nicht allein der Multiplicand, sondern auch der Multiplicator eine vielgliedrige Zahlform, so nimmt mit der Anzahl von dessen Gliedern auch nothwendig die Anzahl der Partialproducte zu. Da nämlich ein zweitheiliger Multiplicator vorschreibt, daß mit jedem seiner beiden Glieder multiplicirt werden soll, so wird die Anzahl der Partialproducte doppelt so groß, als die Menge der Glieder des Multiplicands. Durch das Hinzukommen eines dritten Gliedes im Multiplicator wird jene Anzahl verdreifacht u. s. f., wonach die Anzahl sämmtlicher Partialpropucte überhaupt so groß werden muß, als das Product aus der Gliedermenge beider Polynomialfactoren. So würde man z. B., wenn der Multiplicand 5 und der Multiplicator 4 Glieder enthielte, ein Totalproduct von 5.4 =20 Gliedern bekommen. Um jene Partialproducte nun aber so viel als möglich vereinigen zu können, ist sogleich in deren Anordnung darauf zu achten, daß alle gleichnamige unter einander zu stehen kommen, weil sie dann nach Vorschrift der Addition (§. 44.) sogleich zusammengezogen werden können. Hierauf gründet sich folgende allgemeine Regel der Multiplication:

Man multiplicirt Polynome, indem man sämmtliche Glieder des Multiplicands der Reihe nach durch diejenigen des Multiplicators multiplicirt und die gleichnamigen Partialproducte addirt.

Sei z. B. $P = 10a^3 + 2a^2b - 3ab^2$

$Q = 3a^2 - 5ab + b^2$

$$\text{so ist } P.Q = \left\{\begin{array}{l} 30a^5 + 6a^4b - 9a^3b^2 \\ \quad - 50a^4b - 10a^3b^2 + 15a^2b^3 \\ \qquad + 10a^3b^2 + 2a^2b^3 - 3ab^4 \end{array}\right.$$

$$\text{oder} = 30a^5 - 44a^4b - 9a^3b^2 + 17a^2b^3 - 3ab^4.$$

§. 47. Specielle Regeln der Multiplication. Verfolgt man das Verfahren der Multiplication an vorstehendem Beispiele, so ergeben sich für die einzelnen Schritte, welche beim Zusammenfassen je zweier Glieder zu beobachten sind, folgende besondere Vorschriften:

(1) Das Vorzeichen des Partialproducts wird positiv, wenn beide Glieder gleiche, hingegen negativ, wenn beide ungleiche Vorzeichen haben.

(2) Der Coefficient jedes Partialproducts entsteht durch Multiplication der Coefficienten beider zu multiplicirenden Glieder.

(3) Die Buchstaben, welche das Partialproduct enthält, sind die jener beiden Glieder zusammengenommen. Als Factoren kann man sie entweder nur neben einander stellen oder, wenn unter ihnen mehre gleiche sind, ihr mehrfaches Vorkommen durch Exponenten angeben.

(4) Die Exponenten jedes Partialproducts entstehen durch Addition der in beiden Gliedern enthaltenen Exponenten des nämlichen Buchstabens.

In Absicht der Addition, wodurch sämmtliche Partialproducte zum Totalproduct zusammengezogen werden, ist zu bemerken, daß nur solche gleichnamig zu nennen sind, welche die nämlichen Buchstaben in gleicher Anzahl (oder mit dem nämlichen Exponenten) enthalten. (Aufg. 20—28, §. 52.)

§. 48. Division von Polynomen. Soll eine vielgliedrige Zahlform $R=\alpha k+\beta k-\gamma k+\delta k+$ ꝛc. durch irgend eine Zahl $\pm k$ dividirt werden, so ist die Division an allen einzelnen Gliedern dadurch vorzunehmen, daß man die Zahl k als Factor (nach §. 13.) aus ihnen ausscheidet, wobei in Absicht der Vorzeichen (nach §. 37.) die Regel gilt, daß einstimmige Zahlen einen positiven, entgegengesetzte aber einen negativen Quotienten haben. So ist z. B., wenn $R=21a^3-35a^2b+14ab^2$ und $P=7a$, der Quotient:

$$R:P \text{ oder } Q=3a^2-5ab+2b^2.$$

Umgekehrt kann der Dividend R sämmtliche Glieder eines mehrgliedrigen Divisors P mit einem gleichen Factor k enthalten. Tritt dieser Fall ein, so darf man (nach §. 46.) den, allen Gliedern von R gemeinschaftlichen, Factor k durch Einklammerung derselben absondern, und erhält dadurch ein Vielfaches (kmaliges) des Divisors, also die Zahl k zum Quotienten. Ein Beispiel solcher Division liefern die Polynome $R=15a^4+10a^2b+5a^2$ und $P=3a^2+2b+1$, wovon das erste in allen Gliedern den gemeinschaftlichen Factor $5a^2$ enthält, durch dessen Absonderung die Quotientenform sich zusammenzieht auf

$$\frac{R}{P}=\frac{(3a^2+2b+1)\ 5a^2}{3a^2+2b+1}=5a^2.$$

Wichtiger, als die beiden vorerwähnten Fälle, in denen entweder Divisor oder Quotient als eingliedrige Zahl erschien, ist der allgemeine Fall einer Division von Polynomen, wobei der Quotient ebenfalls eine mehrgliedrige Zahlform wird. Diese Form muß er nothwendig dann annehmen, wenn ein Product aus 2 Polynomen P, Q durch einen seiner Factoren P dividirt wird, da alsdann kein anderer Quotient, als das Polynom Q, mit dem Divisor P multiplicirt, den gegebenen Dividend ($R=P.Q$) hervorbringen kann. So ist z. B., wenn der Dividend $R=30a^5-44a^4b-9a^3b^2+17a^2b^3-3ab^4$, und der Divisor $P=10a^3+2a^2b-3ab^2$ angenommen wird, der Quotient das Polynom $Q=3a^2-5ab+b^2$, da (nach §. 46.) durch Multiplication von P und Q das Polynom R als Product gebildet wird.

Ein solcher vielgliedriger Quotient kann augenscheinlich durch Vergleichung von Dividend und Divisor nur schrittweise gebildet werden, und ist als eine Summe von Partialquotienten anzu-

sehen, deren ersten man erhält, indem man die Anfangsglieder beider vergleicht. Mit diesem ersten Partialquotienten den ganzen Divisor multiplicirend, erhält man nun einen Theil des Dividends, der von diesem abgezogen, einen Rest zu weiterer Vergleichung mit dem Divisor übrig läßt. Indem man solche nun aufs Neue an den Anfangsgliedern anstellt, ergiebt sich ein zweiter Partialquotient, womit der Divisor wieder multiplicirt werden muß, um einen neuen Theil des Dividends zu erzeugen. Sollte dieser dem Reste gleich sein, so ist der Dividend durch allmählige Subtraction erschöpft und damit die Division zum Schluß gelangt. Bleibt aber wieder ein Rest, so wird das bezeichnete Verfahren fortgesetzt, bis jener Umstand eintritt. Hiebei wird freilich vorausgesetzt, daß der Dividend **R** aus dem Divisor **P** und einem andern **Q** wirklich durch Multiplication gebildet und also wieder in diese zwei mehrtheiligen Factoren zerlegbar sei, wie in folgendem vollständig ausgeführten Beispiele:

Dividend.	Divisor.
$52m^5 - 93m^4p - 70m^3p^2 + 48m^2p^3 - 27mp^4$	$13m^3 - 7m^2p + 3mp^2$
$52m^5 - 28m^4p + 12m^3p^2$	
$- \quad + \quad -$	Quotient.
1 Rest $- 65m^4p - 82m^3p^2 + 48m^2p^3 - 27mp^4$	$4m^2 - 5mp - 9p^2$
$- 65m^4p + 35m^3p^2 - 15m^2p^3$	
$+ \quad - \quad +$	
2. Rest ... $- 117m^3p^2 + 63m^2p^3 - 27mp^4$	
$117m^3p^2 + 63m^2p^3 - 27mp^4$	
0	

§. 49. **Specielle Regeln der Division.** Wenn man das in vorstehendem Beispiele dargestellte Verfahren der Division bis ins Einzelne verfolgt, so findet man dasselbe aus folgenden Schritten zusammengesetzt:

(1) Divisor und Dividend sind in Beziehung auf irgend einen ihnen gemeinschaftlichen Buchstaben so anzuordnen, daß die Exponenten dieses Buchstabens in den Anfangsgliedern am größten sind und in den folgenden Gliedern immer mehr abnehmen.

(2) Man dividirt das erste Glied des Dividends durch das des Divisors und erhält dadurch den ersten Partialquotienten. Hiebei hat man nun aber

I. die Regel der Vorzeichen (nach §. 37.) zu beobachten;

II. die Coefficienten beider Glieder durch einander zu dividiren;

III. von den Buchstaben der in ihnen gemeinschaftlich vorkommenden auszuscheiden, folglich den Exponenten des Dividends um denjenigen des Divisors zu vermindern.

(3) Man multiplicirt sämmtliche Glieder des Divisor durch den erhaltenen Partialquotienten und subtrahirt das Product vom Dividend.

(4) Der dadurch entstehende Rest wird von Neuem als Dividend behandelt, indem man durch Division seines ersten Gliedes durch das des Divisors einen zweiten Partialquotienten bestimmt.

Hierauf wiederholen sich die Schritte (2) (3) (4) so lange, bis durch fortgesetzte Subtraction sämmtliche Glieder des Dividends erschöpft sind, sofern dieser anders wirklich ein Vielfaches des gegebenen Divisors ist. (Aufg. 29–39, §. 52.)

§. 50. Polynomialbrüche. Die Form $\frac{R}{P} = Q$, worin die Buchstaben P, Q, R als einfache Andeutungen von Polynomen zu betrachten sind, stellt eine auszuführende Division von R durch P dar und enthält somit die Voraussetzung, daß R ein Product der Polynome P und Q sei. Sofern nun aber R nicht durch eine solche Multiplication gebildet ist und also diese Voraussetzung nicht stattfinden darf, bleibt es augenscheinlich völlig ungewiß, ob es überhaupt eine mehrgliedrige Zahlform Q gebe, durch deren Multiplication mit P der Dividend R hervorgehen werde. Die Form $\frac{R}{P}$ ist dann vielmehr als Bruchform zweier Polynome zu betrachten und durch wirklich angestellte Division erst zu untersuchen, ob R ein Vielfaches von P (also $= P.Q$) sei, oder nicht. Im letzten Falle wird ein Rest bleiben, der keine fernere Division zuläßt, weil der Buchstabe, nach welchem Dividend und Divisor geordnet waren, in dessen Anfangsgliede nicht mehr vorkommt. Dieses ist z. B. der Fall bei folgender Division:

$$5a^4 + 3a^2b + 4b^2 - b^3 : a^2 - 2b \quad | \; 5a^2 + 13b$$
$$5a^4 - 10a^2b$$
$$+$$
$$\text{1. Rest} \ldots\ldots + 13a^2b + 4b^2 - b^3$$
$$+ 13a^2b - 26b^2$$
$$+$$
$$\text{2. Rest} \ldots + 30b^2 - b^3$$

wo man die Division beim zweiten Reste nicht weiter fortzusetzen vermag, da die Anfangsglieder verschiedene Buchstaben enthalten. Es würde mithin dem unvollständigen Quotienten $5a^2 + 13b$ die Andeutung der nicht weiter auszuführenden Division, d. h. die Bruchform

$$\frac{30b^2 - b^3}{a^2 - 2b}$$

noch angehängt werden müssen, um ihn zu vervollständigen. Statt dessen zieht man aber in der Regel vor, die anfängliche Bruchform beizubehalten, so daß sogar Formen, aus einem Polynom und angehängtem Polynomialbruche bestehend $\left(P + \frac{M}{N}\right)$ in jene einfachere

Form umgesetzt zu werden pflegen, indem man alle Glieder auf gleiche Benennung bringt $\left(\text{d. h. } \frac{P.N+M}{N} \text{ setzt}\right)$. So ist z. B.

$$3x^2 - \frac{2x^4+3y}{4x^2-2y^2} = \frac{10x^4-6x^2y^2-3y}{4x^2-2y^2}.$$

§. 51.* Größter gemeinschaftlicher Divisor von Polynomen. Eine Bruchform $\frac{R}{P}$, deren Zähler und Nenner mehrgliedrige Zahlen sind, ist der Vereinfachung fähig, wenn beide einen gemeinschaftlichen Factor enthalten. So ist z. B.

$$\frac{3m^2n - m^2p - 6mn^2 + 2mnp}{12mn - 15n^2 - 4mp + 5np} = \frac{m^2-2mn}{4m-5n},$$

da Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $(3n-p)$ haben, durch dessen Ausscheidung beide zu Binomen werden. Einen solchen größten gemeinschaftlichen Divisor zweier Polynome, **P**, **R** aufzufinden, dient das nämliche Verfahren, welches früher (§. 15.) zur Bestimmung desselben für ganze Zahlen aufgestellt wurde und darin besteht, daß man den bei der Division entstehenden Rest in den Divisor dividirt und dieses so lange wiederholt, bis kein Rest weiter übrig bleibt. Indessen erleidet jenes Verfahren bei Polynomen mancherlei Schwierigkeiten, denen man vornehmlich dadurch ausweichen kann, daß man alle Glieder des einen Polynoms mit einer Zahl, welche nicht gemeinschaftlicher Factor aller Glieder des andern ist, entweder multiplicirt oder dividirt, je nachdem das Eine oder das Andere die Division erleichtert. Denn durch eine derartige Formveränderung bloß eines der beiden Polynome wird ein gemeinschaftlicher Factor für beide weder eingeführt noch ausgeschieden, so daß sie hiebei den nämlichen größten gemeinschaftlichen Divisor behalten, wie vorhin. Man überzeugt sich hievon leicht an dem Beispiele der oben gegebenen Bruchform, indem man darauf das Verfahren des §. 15. anwendet und damit die (durch Klammern angedeutete) Einführung oder Ausscheidung von Factoren verbindet:

I.	$4\,(3m^2n - m^2p - 6mn^2 + 2mnp)$	$12mn - 4mp - 15n^2 + 5np$
	$= 12m^2n - 4m^2p - 24mn^2 + 8mnp$	m
	$12m^2n - 4m^2p - 15mn^2 + 5mnp$	
	$- \quad + \quad + \quad -$	
	1. Rest $\quad -9mn^2 + 3mnp$	
II.	$12mn - 4mp - 15n^2 + 5np$	$-9mn^2 + 3mnp$
	$12mn - 4mp - 15n^2 + 5np$	$= -3mn\,(3n-p)$
	$- \quad + \quad + \quad -$	$4m - 5n.$
	0	

Hier ist zuerst der Factor 4, wodurch der Divisor nicht theilbar ist, in den Dividend eingeführt, und dann der Factor $-3mn$, welchen der Dividend nicht enthielt, aus den Gliedern des Divisors abgeson-

dert, wodurch nur $3n - p$ zur Vergleichung übrig blieb, und da dieses Binom im neuen Dividend vollständig aufgeht, so ist es der gesuchte größte gemeinschaftliche Divisor beider Polynome.

§. 52. Aufgaben.

1. Das Polynom $3 - 5 + 7 - 9 + 16 - 21 + 14 - 19 + 20$ zusammenzuziehen.
2. Eben so $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{5}{6} - \frac{16}{19} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{5}{19} - \frac{17}{24} + \frac{1}{3} - \frac{13}{11} + \frac{121}{19} + \frac{17}{24} - \frac{5}{9} - \frac{14}{15}$.
3. Eben so $7\frac{3}{5} + 6\frac{4}{9} - 13\frac{1}{3} - 6\frac{7}{11} + 8\frac{2}{7} - 21\frac{6}{7} - 4\frac{3}{11}$.
4. Eben so $c + 2d - 2c - 3d + 3c + 4d - 4c - 5d + c + d$.
5. Eben so $3a - 2b + 5a - 6c + 3b - 9c + a - b + 121c$.
6. Eben so $k - \frac{a}{4} - \frac{m}{5} - \frac{k}{20} - \frac{m}{7} - \frac{a}{13} - \frac{k}{8} - \frac{m}{9}$.
7. Eben so $3a - \frac{1}{4}b + 6a - 3\frac{2}{5}b + 10\frac{1}{2}a - 22\frac{5}{9}b - \frac{3}{5}a$.
8. Man addire $(a - 2b) + (3a + 4b) + (5a - 6b) + (8b + 7a) + b$.
9. Eben so $(a - 2b + 3c) + (5c - 2a + b) + (3b + 3a - 2c)$.
10. Eben so $(7x - 3y + 9z) + (y + 5x - 3z) + (2y - 6z - 12x)$.
11. Eben so $\left(\frac{3}{4}a + b - \frac{4}{5}c\right) + \left(\frac{5}{4}a - \frac{3}{7}b + c\right) + \left(\frac{7}{15}c + a - \frac{5}{14}b\right) + \left(7c - \frac{3}{8}a - \frac{110}{14}b\right)$.
12. $\left(x - \frac{3}{5}y + \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{2}{7}z - 2y + \frac{1}{5}x\right) + \left(z + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}y\right)$.
13. Man subtrahire $(7k - 4g + 3m - 9n) - (k + 5g - 3m + n)$.
14. Eben so $(5p - 10 + 8r - 4t) - (8r + 4t - p - 20 + 16n)$.
15. Eben so $(20x^2 - 13a^4 + 4h) - (19a + 21x^2 - 16h^4 + 8g - h)$.
16. Eben so $\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q + \frac{1}{6}r + \frac{1}{8}s\right) - \left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{5}q\right) + \left(\frac{1}{7}r + \frac{1}{9}s\right) - \left(\frac{3}{4}p + \frac{4}{5}q + \frac{7}{8}r\right)$.
17. Eben so $(p + q) - (12a + 6q) - (4a + 8q) - (10a - 100q)$.
18. Eben so $\left(\frac{5}{11}r - \frac{4}{7}s - \frac{3}{8}t\right) - \left(\frac{2}{5}r - s\right) - \left(\frac{1}{4}s + \frac{3}{4}t\right)$.
19. Eben so $(125m^3 - 10p^2 + q) - \left(\frac{23}{29}p^2 - q\right) - \frac{31}{44}m^3 + \left(\frac{1}{9}p^2 - \frac{3}{7}m^3\right) - 17\left(\frac{5}{6}q - 3p^2 + \frac{5}{8}m^3\right)$.
20. Man multiplicire $\left(7a - 12g + 4k - 8m + \frac{4n}{7}\right)13b$.

21. Eben so $\left(5m^2 - 10n^3 + 7p^4n - 5q^6m - 11n^2 + \frac{3}{16}n\right)8n^3m^2$.

22. Eben so $\left(23p - \frac{5}{8}q - 8r\right)\left(101a - \frac{25}{32}b\right)$.

23. Eben so $(a+b)\times(a+b)\times(a+b)$.

24. Eben so $(g+h)\times(g+h)\times(g-h)\times(g-h)$.

25. Eben so $(p+q)\ (p+2q)\ (p+3q)\ p+4q)$.

26. Eben so $(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d)$.

27. Eben so $(z-3)\ (z-5)\ (z-7)\ (z-9)$.

28. Eben so $(a^3+5a^2b-3ab^2-7b^3)\ (a^2-2ab+b^2)$.

29. Man dividire $(24am-48bm+96cm):12m$.

30. Eben so $(69a^2b^3d-6acd+45bc^2d):3d$.

31. Eben so $(4k^2g-12k^3g^2+20k^4g^3-48k^5g^4):4k^2g$.

32. Eben so $(33a^3b^3-77a^2b^4+121a^2b^5):(3a^2b-7ab^2+11ab^3)$.

33. Eben so $(6p^5-12pq^3-6p^4q+12q^4):(p-q)$.

34. Eben so $(100a^5-440a^4k+235a^3k^2-30a^2k^3):(5a^3-2a^2k)$.

35. Eben so $(g^4-4g^3h+6g^2h^2-4gh^3+h^4):(h^2-2hg+g^2)$.

36. Eben so $(37a^2m^2-26a^3m+3a^4-14am^3):(3a^2-5am+2m^2)$.

37. Eben so $\frac{392p^{10}r^4+24p^2qr^5-r^6-72p^4q^2r^4}{14p^5r^2-r^3-6p^2r^2q}$.

38. Eben so $(a^6-b^6):(a-b)$ und $(a^6+b^6):(a+b)$.

39. Eben so $(a^7-b^7):(a-b)$ und $(a^7+b^7):(a+b)$.

40. Die Polynomialbrüche $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$ zu verbinden.

41. Eben so $\frac{1}{m^2+n^2}-\frac{1}{m^2-n^2}+\frac{2(m^2-n^2)}{m^4-n^4}$.

42. Eben so $\frac{a}{a+b-c}+\frac{b}{b+c-a}+\frac{c}{c+a-b}$.

43. Eben so $\left(\frac{c+k}{c^2+2ck+k^2}\right):\left(\frac{c-k}{c^2-2ck+k^2}\right)$.

44. Eben so $\left(a+\frac{b-c}{b+c}\right):\left(a-\frac{b-c}{b+c}\right)$.

45. Eben so $\left(\frac{3m^2-4mr+5r^2}{7k^3-5k^2h+4kh^3}\right):\left(\frac{10k^2+kh-2h^2}{m^2-mr+r^2}\right)$.

46. Man suche den größten gemeinschaftlichen Divisor der Polynome $(a^3+5a^2b+6ab^2+2b^3)$ und $(a^3-a^2b-ab^2+b^3)$. Antw. $a+b$.

47. Eben so von $(p^3-2p^2q+pq^2-2q^3)$ und $(p^3-8pq^2+8q^3)$. Antw. $(p-2q)$.

48. Eben so von $(12a^2m^4+7a^3m^3+7a^4m^2+27a^5m-5a^6)$ und $(3am^3-5a^2m^2+7a^3m-5a^4)$. Antw. $3m^2-2ma+5a^2$.

Fünftes Capitel.

Die einfachen Gleichungen.

§. 53. Gleichungen. Kann der Inhalt einer Größe, indem dieselbe (nach Einl. VII.) auf irgend ein gleichartiges Maaß, als willkürlich gewählte Einheit, bezogen wird, in zweifacher Weise ausgedrückt werden, so entsteht eine Gleichung. Diese ist mithin ein doppelter Ausdruck des nämlichen Inhalts und giebt sich durch das, zwischen die gleichbedeutenden Ausdrücke gestellte, Gleichheitszeichen zu erkennen. So wird z. B. der Inhalt von 12 Einheiten eben so wohl ausgedrückt, indem von 4 Einheiten 3mal, als wenn man 5 und 7 Einheiten setzt: oder auch, indem man 20 um 8 Einheiten vermindert oder 24 Einheiten zur Hälfte setzt. Man darf demnach von den verschiedenen Zahlformen 4.3, $5+7$, $20-8$, $\frac{24}{2}$, irgend zwei als inhaltsgleich zusammenstellen um dadurch eine Gleichung zu bilden; z. B.

$$4.3=5+7;\ 5+7=20-8=\frac{24}{2};\ 4.3=\frac{24}{2}.$$

Als doppelter Ausdruck wirklicher Größen (z. B. von Geldsummen, Gewichten, Flächenräumen) enthält eine Gleichung nothwendig benannte Zahlen. Es leuchtet aber ein, daß beide Ausdrücke derselben auf die nämliche Einheit bezogen, also die in ihnen enthaltenen benannten Zahlen gleichnamig sein müssen, da man sonst unvermeidlich auf Widersprüche gerathen würde, wie wenn z. B. der Umstand, daß 3 Pfund und 96 Loth gleichbedeutend sind, durch die Gleichung $3=96$ ausgedrückt werden sollte.

§. 54. Form der Gleichungen. Der Ausdruck eines Größeninhalts an Einheiten und Einheitstheilen kann entweder durch eine geschlossene Zahl oder durch die Art, wie mehre Zahlen mit einander verbunden werden sollen, angedeutet werden. Im letzten Falle ist jener Ausdruck nothwendig eine bestimmte Zahlform, und wenn die vorgeschriebene Verbindung nicht über die vier Grundoperationen hinausgeht, entweder die reine Form von Summe, Differenz, Product oder Quotient:

$$(1)\ A+B+C \quad (2)\ A-B \quad (3)\ P.Q.R \quad (4)\ \frac{R}{Q},$$

oder aus solchen einfachen Formen durch Vermischung von Addition Subtraction, Multiplication und Division zusammengesetzt, wie z. B.

$$(5)\frac{(A+B)\ P}{Q}\ (6)\ \frac{(A-B)\ P}{Q}\ (7)\frac{P.Q.R}{A+B}\ (8)\frac{R}{(A-B)\ Q}.$$

Gleichungen, welche auf beiden Seiten die nämliche Form enthalten, unterscheiden sich demgemäß als

I. Summengleichungen von der Form $A+B=C+D$;
II. Differenzgleichungen . . . . $A-D=C-B$;
III. Productengleichungen . . . . $P.Q=R.S$;
IV. Quotientengleichungen . . . . $P:S=R:Q$;
und diese Benennungen bleiben auch dann gültig, wenn die einzelnen Glieder nicht geschlossene Zahlen, sondern Polynome andeuten.

§. 55. Umformung der Gleichungen. Da zwei Zahlformen gleichen Inhalts, um Gleiches vermehrt oder vermindert und (in Folge dessen auch) durch die nämliche Zahl vervielfacht oder getheilt, einander gleich bleiben müssen, so läßt sich jede gegebene Gleichung durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Division mit irgend einer beliebigen Zahl oder Zahlform auf die mannigfaltigste Weise zu neuen Gleichungen umformen. Wählt man z. B. die Gleichung $A+B-C=P.Q$, so verwandelt sich dieselbe durch Addition oder Subtraction eines Gliedes D in
(1) $A+B-C+D=P.Q+D$ u. (2) $A+B-C-D=P.Q-D$
durch Multiplication oder Division mit der Summenform $R+S$ aber in

$$(3)\ (A+B-C)\ (R+S)=P.Q\ (R+S) \text{ und}$$

$$(4)\ \frac{A+B-C}{R+S}=\frac{P.Q}{R+S}.$$

Offenbar kann man von jeder dieser vier Gleichungen zur ursprünglichen zurückkehren, indem man D von (1) auf beiden Seiten subtrahirt, zu (2) aber addirt; oder indem man durch $(R+S)$ die Gleichung (3) dividirt, (4) hingegen multiplicirt, woraus hervorgeht, daß Gleichungen von ganz verschiedenen Formen die nämlichen Beziehungen zwischen den in ihnen enthaltenen Zahlen ausdrücken können. Es ergeben sich aus diesem Allen folgende Sätze über Gleichungen:

1. Der bestimmte Zusammenhang, in welchem mehre Zahlen $A, B, C \ldots P, Q$ zu einander stehen, kann durch eine unbegränzte Menge verschieden geformter Gleichungen dargestellt werden.

2. Um eine gegebene Gleichung umzuformen, darf man nur auf beiden Seiten derselben die nämliche Veränderung vornehmen.

3. Kommt auf beiden Seiten einer Gleichung irgend eine Zahl in der nämlichen Bedeutung (d. h. als Summand, Subtrahend, Factor oder Divisor) vor, so kann man dieselbe weglassen, ohne dadurch die Gleichung im Wesentlichen zu ändern.

4. Jede von den Zahlen, welche die eine Seite einer gegebenen Gleichung bilden, wird dadurch aus derselben weggeschafft, daß man auf beiden Seiten das Entgegengesetzte der Andeutung vornimmt. Demnach ist ein Summand durch Subtraction, ein Subtrahend durch Addition, ein Factor durch Division, ein Divisor durch Multiplication wegzuschaffen.

5. Durch allmähliges Wegschaffen der einzelnen Zahlen von der einen Seite werden dieselben in entgegengesetzter Weise auf die andere hinübergetragen (transponirt). Durch solche Transposition wird mithin der Summand zum Subtrahend, der Factor zum Divisor und umgekehrt.

6. Enthält eine Gleichung zwei- oder mehrgliedrige Zahlformen (Polynome), so sind dieselben in Klammern einzuschließen und so lange als einfache Glieder zu behandeln, bis die Entwickelung zu beiden Seiten vorgenommen werden soll.

§. 56. Identische Gleichungen. Gleichungen, in denen eine Seite nur eine Umformung oder Entwickelung der andern ist, werden identische (auch analytische) genannt. Sie müssen demnach richtig sein, was auch immer die einzelnen Zahlen, welche die beiden Seiten bilden, bedeuten mögen. Gleichungen solcher Art sind z. B.

(1) $a+b-c+d-e+f=(a+b+d+f)-(c+e)$.

(2) $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

(3) $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a+b}=a^2+2ab+b^2$.

Da jede Gleichung nur dadurch umgeformt werden kann, daß man auf beiden Seiten derselben die nämliche Veränderung vornimmt, so folgt, daß durch alle möglichen Umgestaltungen einer identischen Gleichung stets neue derselben Art hervorgehen müssen. Auch ist eine Gleichung, von welcher man durch beliebige Umformungen endlich zu einer augenscheinlich identischen gelangt, nothwendig selbst identisch, weil man, von dieser ausgehend, zu der gegebenen Gleichung zurückgelangen kann. So ist z. B.

$$\frac{(a-b)^3}{ka-kb}+\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+\frac{a^2-2ab+b^2}{k}$$

eine identische Gleichung, weil man durch die Entwickelung der in ihr enthaltenen Quotientenform eine solche erhält.

§. 57. Bedingungsgleichungen. Gleichungen, in denen die eine Seite nicht durch Umformung oder Entwickelung der andern gebildet werden kann, in welchen also beide Seiten wesentlich verschiedene Ausdrücke enthalten, werden Bedingungsgleichungen genannt. Dadurch nämlich, daß ein Zahlenausdruck einem andern, der Andeutung nach von ihm abweichenden, an Inhalt gleich sein soll, wird eine Bestimmung über die einzelnen Zahlen getroffen oder eine Bedingung festgestellt, welcher sie genügen müssen, sofern die Gleichung richtig sein soll. Sei z. B.

$$(1)\ a-5=7-b;\ (2)\ 4p=\frac{12}{q};$$

so müssen (1) die Zahlen a und b, zu einander addirt, die Summe 12, und (2) die Zahlen p und q, mit einander multiplicirt, das Pro-

duct 3 geben. Würden anderweitig für die nämlichen Zahlen die beiden Gleichungen

$$(3)\ a-7=9-b;\ (4)\ 5p=\frac{20}{q};$$

aufgestellt, wonach $a+b=16$ und $p.q=4$ sein würde, so fände zwischen (1) und (3), so wie zwischen (2) und (4) ein Widerspruch statt, in Folge dessen diese Gleichungen nicht zugleich richtig sein können. Eine gegebene Bedingungsgleichung ist demnach unrichtig, wenn sie einer anderweitigen Voraussetzung über die in ihr enthaltenen Zahlen widerspricht, welches bei identischen Gleichungen nie der Fall sein kann.

Bei allen Umgestaltungen, welche eine Bedingungsgleichung erleiden mag, bleibt sie immer eine solche und der Unterschied in ihren verschiedenen Darstellungen besteht nur darin, daß die nämliche Bedingung in der einen einfacher, in der andern verwickelter ausgedrückt wird. Von solcher Art sind z. B. die Gleichungen:

(1) $4a+m=3n-p$,

(2) $(a^2-b^2)\left(\frac{20a+5m}{a+b}\right)=(15n-5p)\ (a-b)$.

§. 58. Unbekannte Zahlen. Eine Zahl, welche in einer Gleichung, da ihr Inhalt unbekannt ist, durch einen Buchstaben nur angedeutet, aber auf bestimmt angegebene Weise mit andern bekannten Zahlen verbunden erscheint, wird im Gegensatz gegen diese eine unbekannte Zahl oder kürzer eine Unbekannte genannt. Man pflegt derartige Zahlen allgemein durch die letzten Buchstaben des Alphabets (z. B. u, v, w, x, y, z) anzudeuten, während man die früheren (a, b, c u. s. f.) vorzugsweise gebraucht, um gegebene oder bekannte Zahlen zu bezeichnen. Nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen Unbekannten unterscheidet man Gleichungen mit einer, zwei, drei oder mehren solchen Zahlen. Dergleichen sind z. B.

(1) $ax+b=4c$. (2) $ax+by=k$.

(3) $mx+py=qz+r$. (4) $3x+7y=z+5w$.

Je nachdem eine Unbekannte nur als einfacher, oder aber als zweifacher, dreifacher, überhaupt vielfacher Factor in einer Gleichung vorkommt, nennt man dieselbe eine Gleichung vom ersten, zweiten, dritten, allgemein von höherem Grade. Beispiele sind:

(1) $94x-23=117$ (2) $ax^2+mx=p$.

(3) $nx^3-x=px^2+r$. (4) $10z^7-z=1334$.

Gleichungen des ersten Grades werden auch einfache genannt.

§. 59. Auflösung der Gleichungen. Unter der Auflösung einer Gleichung versteht man die Bestimmung der Unbekannten aus den gegebenen (bekannten) Zahlen gemäß der Bedingung, welche die Gleichung ausdrückt. Es kann daher nur eine Bedingungsgleichung aufgelöst werden, während den Zahlenandeutungen in einer

identischen Gleichung, da für sie durchaus keine Bedingung ausgesprochen ist, alle beliebigen Werthe genügen würden. So ist in den Gleichungen:

(1) $4x=36$; (2) $4(2z-3)=8z-12$;

x der Bedingung unterworfen, daß sein 4maliges die Zahl 36 hervorbringen soll, also $=9$, während für z jeder beliebige Zahlenwerth angenommen werden darf. Um nun aber eine Gleichung der ersten Art aufzulösen, d. h. eine in ihr enthaltene Unbekannte der gegebenen Bestimmung gemäß zu bestimmen, oder mit andern Worten: einen Ausdruck zu erhalten, der — an die Stelle der Unbekannten gesetzt — die Gleichung in eine identische verwandelt, muß man diese Unbekannte von allen, außer ihr gegebenen, Zahlen befreien, so daß sie auf der einen Seite der Gleichung allein stehe. Ein solches Alleinstellen (Isoliren) der Unbekannten kann aber (nach §. 55. L. 5.) durch Transposition bewirkt werden, indem man nämlich jede neben ihr vorhandene Zahl durch das der Andeutung entgegengesetzte Verfahren auf die andere Seite hinüberschafft. Sind in der Gleichung die bestimmenden Zahlen zugleich bestimmt gegebene (also in Ziffern ausgedrückt), so wird die Unbekannte am Schlusse jener Umsetzungen durch eine, aus jenen zusammengezogene gleichfalls bestimmt gegebene Zahl dargestellt; enthält dagegen die Gleichung außer der unbekannten andere bestimmende Zahlen in Buchstaben angedeutet, so wird der endliche Ausdruck der Auflösung eine Formel, welche als allgemeine Vorschrift für eine unendliche Menge besonderer Fälle der Rechnung angesehen werden kann. So ergiebt sich z. B. aus

(1) $8x-16=40$ (2) $az=4b+1$

der Werth $x=7$, $z=\frac{4b+1}{a}$

Die Gleichungen selbst werden in dieser Beziehung als numerische und algebraische, oder als Zahlen- und Buchstabengleichungen unterschieden.

§. 60. Auflösung der Gleichungen mit einer Unbekannten. Ist in einer Gleichung eine Unbekannte mit andern bestimmenden Zahlen durch beliebige Andeutungen der Grundoperationen verbunden, wie z. B. in dem Ausdruck

$$\frac{ax-7b}{4cx}=5a-\frac{3b}{5a}-c,$$

so ist das nächste Erforderniß, die Divisoren durch Multiplication fortzuschaffen. In der dadurch umgeformten Gleichung

$$5a(ax-7b)=100a^2cx-12bcx-20ac^2x.$$

ist alsdann die durch Einklammerung angedeutete Multiplication wirklich auszuführen:

$$5a^2x-35ab=100a^2cx-12bcx-20ac^2x$$

und nunmehr eine Zusammenstellung sämmtlicher Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf einer Seite der Gleichung vorzunehmen, welches durch Transposition mit den entgegengesetzten Vorzeichen erreicht wird:

$$-35ab = 100a^2cx - 12bcx - 20ac^2x - 5a^2x.$$

Es bleibt dann nur noch übrig, die Unbekannte als gemeinschaftlichen Factor mehrer Glieder auszuscheiden und beide Seiten der Gleichungen durch das Polynom, welches sie multiplicirt, zu dividiren, d. h. es ist:

$$-35ab = (100a^2c - 12bc - 20ac^2 - 5a^2)x$$

folglich $x = \dfrac{-35ab}{(100a^2c - 12bc - 20ac^2 - 5a^2)}$.

So wie im vorstehenden Beispiele läßt eine jede Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten sich durch die (im §. 55.) angegebenen Umformungen schließlich auf die allgemeine Form $x = \frac{A}{B}$ bringen, wo unter A und B Zahlformen aus bekannten oder bestimmenden Zahlen zu verstehen sind. Ob aber eine Gleichung vom ersten Grade sei, geht erst deutlich hervor, nachdem man die Divisoren derselben weggeschafft hat, da durch Multiplication mit solchen, welche die unbekannte Zahl enthalten, leicht Glieder entstehen können, welche diesen als mehrfachen Factor enthalten, wie dies z. B. mit der Gleichung $\frac{ax - b}{cx} = mx + n$ der Fall sein würde, die sich in $ax - b = cmx^2 + cnx$ verwandelt, also vom zweiten Grade ist.

§. 61. Auflösungen und Gleichungen mit zwei Unbekannten. Eine Gleichung, welche zwei Unbekannte enthält, wird sich allerdings in Beziehung auf jede von beiden nach den vorhergehenden Vorschriften auflösen lassen. So erhält man z. B. aus der Gleichung I. $4x - 5y = 9$ die beiden Werthe:

$$(1)\ x = \frac{9 + 5y}{4} \text{ und } (2)\ y = \frac{4x - 9}{5}.$$

Da hier aber in dem Ausdruck jeder Unbekannten die andere Unbekannte vorkommt, also keine von beiden wirklich bestimmt wird, so ist eine eigentliche Auflösung (nach §. 59.) für eine Gleichung mit zwei Unbekannten gar nicht möglich. Anders verhält es sich, wenn eine zweite Gleichung mit den nämlichen Unbekannten gegeben ist; z. B. II. $3x + 2y = 20$, woraus sich wiederum zwei Werthe ergeben:

$$(3)\ x = \frac{20 - 2y}{3} \text{ und } (4)\ y = \frac{20 - 3x}{2}.$$

Denn da nunmehr jede der Unbekannten auf zweifache Art ausgedrückt ist, so erhält man durch Gleichsetzung von (1) und (3) oder

auch von (2) und (4) eine Gleichung, worin nur eine Unbekannte vorkommt und die daher (nach §. 60.) aufzulösen ist.

Aus (1) und (3) folgt $\frac{9+5y}{4} = \frac{20-2y}{3}$, also $y = 2\frac{7}{23}$.

Aus (2) und (4) folgt $\frac{4x-9}{5} = \frac{20-3x}{2}$, also $x = 5\frac{3}{23}$.

Außer dem, im Vorstehenden bezeichneten Verfahren der Auflösung, welches man die Combinatiosmethode zu nennen pflegt, giebt es noch zwei andere Methoden, einfache Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen. Man kann nämlich entweder den aus der Gleichung I. erhaltenen Werth von x oder y in II. substituiren; oder man sucht die Gleichungen durch Multiplication mit einem entsprechenden Factor so einzurichten, daß bei ihrer Addition und Subtraction die Glieder mit einer der beiden Unbekannten einander aufheben.

Sei z. B. I. $3x = 4y$ und II. $x + 2y = 12$,
so ist $x = \frac{4}{3}y$ und demnach durch Substitution in II.:

$$\frac{4}{3}y + 2y = 12, \text{ also } y = \tfrac{18}{5}.$$

Sei ferner I. $5x + 2y = 30$ und II. $8x - y = 7$,
so ist, indem man I. mit 8, dagegen II. mit 5 multiplicirt oder auch II. allein verdoppelt:

$$\begin{array}{rcl} 40x + 16y = 240 & \text{oder} & 16x - 2y = 14 \\ 40x - 5y = 35 & & 5x + 2y = 30 \\ \hline \text{folglich die Diff. } 21y = 205; & \text{oder d. Summe} & 21x = 44. \end{array}$$

Nach allen drei Verfahrungsarten wird zunächst eine der Unbekannten entfernt (eliminirt) und dadurch eine einzige Gleichung gewonnen, worin nur die andere vorkommt. Ist aber deren Werth bestimmt, so findet sich ebenfalls leicht der Werth der ersten durch Substitution jenes Werthes in die gegebene Gleichung.

Aus dem Vorhergehenden (vergl. mit §. 57.) ergeben sich folgende Bedingungen für die Auflösbarkeit einfacher Gleichungen mit zwei Unbekannten:

1. Es müssen der Gleichungen wenigstens zwei gegeben sein.

2. Beide Gleichungen müssen wesentlich verschiedene Bedingungen ausdrücken, weil sonst die eine nur eine Wiederholung der andern sein würde.

3. Es darf zwischen den Bedingungen beider Gleichungen kein Widerspruch stattfinden.

4. Sind mehr als zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben, so sind diese nur dann aus ihnen bestimmbar, wenn die Gleichungen durch Umformung auf zwei wesentlich verschiedene zurückgeführt werden können. — Denn angenommen, drei Gleichungen I., II. und III. wären von einander unabhängig, so erhielte man durch Verbindung von I. und II., I und III., oder endlich von II. und III., drei

verschiedene Auflösungen für die nämlichen Zahlenandeutungen x, y, wider die Voraussetzung, daß jede derselben nur einen Werth haben könne.

§. 62. Auflösung von Gleichungen mit mehren Unbekannten. Sind Gleichungen zur Auflösung gegeben, worin drei oder mehr Unbekannte (x, y, z ...) vorkommen, so lassen die vorhergehenden Betrachtungen und Regeln sich leicht auf sie ausdehnen und bedürfen nur einiger Erweiterung. Zunächst wird sich nämlich x eliminiren lassen, indem man (nach §. 61.) die erste Gleichung mit allen übrigen der Reihe nach combinirt, wodurch man eine Gleichung weniger erhält, als ihrer gegeben waren. Aus diesen neuen Gleichungen läßt sich dann auf gleiche Weise y eliminiren, wodurch die Anzahl derselben wieder um eine vermindert wird. Indem man dieses Verfahren fortsetzt, kommt man endlich zu einer Gleichung, in welcher nur eine der Unbekannten übrig geblieben ist, durch deren Bestimmung und Substitution alsdann auch die übrigen leicht abzuleiten sind. Wären z. B. folgende Gleichungen aufzulösen gewesen:

$$\text{I.}\quad 30x + 8y + 5z = 150,$$
$$\text{II.}\quad 24x + 2y + 3z = 94,$$
$$\text{III.}\quad 15x + 12y + 6z = 129,$$

so findet sich, indem man I. mit II. und dann mit III. combinirt:

$$(1)\quad \frac{150 - 8y - 5z}{30} = \frac{94 - 2y - 3z}{24}$$

$$(2)\quad \frac{150 - 8y - 5z}{30} = \frac{129 - 12y - 6z}{15}$$

oder nach einiger Umgestaltung:

$$(1)\ 132y + 30z = 780.\quad (2)\ 16y + 7z = 108,$$

und durch Combination dieser beiden Gleichungen ferner:

$$\frac{780 - 30z}{132} = \frac{108 - 7z}{16},$$

woraus sich z = 4, und wenn man diesen Werth in die obigen Gleichungen substituirt, y = 5, x = 3 ergiebt. Es bedarf übrigens keiner Erwähnung, daß außer der Combinationsmethode sich auch hier zur Auflösung jene andern beiden Verfahrungsarten anwenden lassen, welche oben (§. 61.) für Gleichungen mit zwei Unbekannten angewandt wurden. Zugleich gelten die dort aufgestellten Bedingnngen der Auflösbarkeit in folgender erweiterten Gestalt:

1. Es müssen der Gleichungen eben so viele, als Unbekannte gegeben sein.

2. Keine dieser Gleichungen darf aus irgend einer oder mehren andern nothwendig folgen.

3. Es darf zwischen den einzelnen Gleichungen kein Widerspruch stattfinden.

4. Sind mehr Gleichungen, als Unbekannte gegeben, so sind ihrer eben so viele, als über die Anzahl dieser gegeben sind, entweder überflüssig, oder unzulässig. Jenes ist der Fall, wenn die Bedingungen, welche sie ausdrücken, bereits in den übrigen enthalten sind; dieses, wenn sie Bedingungen ausdrücken, welche denen der übrigen widersprechen.

§. 63. Behandlung von Aufgaben. Da eine Gleichung doppelter Ausdruck des nämlichen Inhalts ist, so läßt sich in jedem besondern Falle, wo man irgend eine Größe durch zweifache Zahlenverbindung arithmetisch auszudrücken im Stande ist, eine Gleichung bilden. Hiezu geben aber alle Aufgaben Veranlassung, welche eine zur Bestimmung des Gesuchten hinreichende Menge von Zahlen liefern, indem jenes, durch irgend einen Buchstaben (x, y, z ....) vorläufig angedeutet, den Bedingungen der Aufgabe gemäß mit den gegebenen Zahlen verbunden, und der nämliche Inhalt in doppelter Form ausgedrückt wird. So erhält man z. B. durch die Angabe, daß ein um 5 Procent vermehrtes und um 1250 Thaler vermindertes Capital zu 7380 Thalern geworden sei, die Gleichung

$$\left(x + \frac{5}{100}x\right) - 1250 = 7380.$$

Bei der Bildung von Gleichungen in Folge der gegebenen Bedingungen einer Aufgabe verdient der Umstand, daß darin Zahlen von verschiedener Benennung vorkommen können, besondere Rücksicht, indem sämmtliche Glieder (nach §. 53.) gleichnamig sein müssen. Man muß daher verschieden benannte Zahlenangaben gleichartiger Größen (z. B. Ruthen, Fuße, Zolle) zuvor durch Reduction gleichnamig machen, oder die Werthe jener verschiedenen Einheiten in Beziehung auf ein, ihnen gemeinschaftliches, Einheitsmaß durch Buchstaben andeuten, welche dann als gleichnamige Zahlen zu betrachten sind. Das Letztere geschieht z. B., wenn man zur Lösung der Aufgabe:

Wie viel portugiesische Meilen sind 138 spanische, wenn 266 von diesen = 150 geographischen und deren 5 = 6 portugiesische Meilen gerechnet werden?

in Beziehung auf eine beliebig gedachte Linieneinheit den Zahlenwerth einer portugiesischen Meile = A, den einer spanischen = B, und einer geographischen = C setzt. Denn alsdann führt die Aufgabe zu den Gleichungen:

$$(1)\quad x\,.\,A = 138B$$
$$(2)\quad 266B = 150C$$
$$(3)\quad 5C = 6A,$$

$$\text{folglich } 5\,.\,266\,.\,xABC = 6\,.\,150\,.\,138ABC$$
$$\text{oder } 5\,.\,266\,.\,x = 6\,.\,150\,.\,138.$$

Anmerkung 1. Eine solche Verbindung von Productengleichungen ist es, worauf die bekannte, höchst brauchbare Kettenregel sich gründet. Dies wird sogleich deutlich, wenn man die herkömmlichen Zeichen benannter Einheiten (z. B. ℔., Ctr., Rℓ.) durch Buchstaben ersetzt und diese als Andeutungen gleichnamiger Zahlen auf irgend eine beliebige Werth-Einheit bezieht.

Anmerkung 2. In den meisten Fällen wird der, durch die Auflösung gefundene Werth der Unbekannten positiv sein. Doch können auch die in der Aufgabe ausgesprochenen Umstände von der Art sein, daß jener Werth negativ wird, wodurch dann die Rechnung aussagt, daß die gesuchte Zahl im entgegengesetzten Sinne genommen werden müsse.

§. 64. Aufgaben für die Lösung einfacher Gleichungen.

A. Gleichungen mit einer Unbekannten.

I. Leichtere Gleichungen.

1. $4x - 3\frac{1}{2} + \frac{5}{7}x = 5\frac{1}{2} - 2x + 13.$

2. $ax - b + cx = f - gx + h.$

3. $8x - 7\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x + 10 - 5x - 2\frac{3}{4} = 0.$

4. $ax - b - cx + d - ex - f = o.$

5. $7x + 13\frac{3}{4} - \frac{x}{2} = \frac{4x}{5} - 8\frac{3}{4} + \frac{41x}{5}.$

6. $px + q - \frac{x}{r} = \frac{ax}{m} - b + \frac{cx}{m}.$

7. $\frac{8x}{5} + \frac{7}{5} + \frac{1}{20}x = \frac{11x}{5} - \frac{23}{5} - \frac{1}{20}x.$

8. $\frac{ax}{m} + \frac{b}{m} + \frac{cx}{k} = \frac{px}{m} - \frac{q}{m} - \frac{rx}{k}.$

9. $\frac{9x}{5} - \frac{21x}{10} + \frac{9x}{4} - \frac{21x}{8} = -45.$

10. $\frac{ax}{m} - \frac{bx}{2m} + \frac{ax}{k} - \frac{bx}{2k} = -d.$

11. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 2x + 34.$

12. $x + \frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + \frac{x}{d} = mx + k.$

13. $\frac{6}{7}x - \frac{9}{11} - \frac{5}{7}x = \frac{9}{7}x + \frac{57}{11} - \frac{26}{7}x - 18.$

14. $\frac{ax}{m} - \frac{b}{k} - \frac{cx}{m} = \frac{px}{m} + \frac{r}{k} - \frac{sx}{m} - q.$

15. $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{4x}{5} = \frac{5x}{6} + 678.$

16. $\frac{x}{k} + \frac{ax}{2k} + \frac{bx}{3k} + \frac{cx}{4k} = \frac{mx}{k} + p.$

17. $4\left(5x + 7 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(3x + 9 - 4)$.

18. $r(ax + b - c) = c(px + q - r)$.

19. $\dfrac{x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x}{21 - \frac{4}{5}} = \dfrac{20x - 25}{101}$.

20. $\dfrac{x + px - qx}{p - q} = \dfrac{mx - n}{m}$.

II. Verwickeltere Gleichungen.

1. $10\frac{3}{4} + 5x - 9 - \frac{8x}{5} + 14\frac{3}{7} = \frac{5x}{6} - 42 + x$.

2. $14y - 33 - \frac{12}{7}y + 15\frac{1}{4} = \frac{5y}{21} - \frac{13}{8} + 3\frac{3}{8}y$.

3. $az - b + \frac{c}{m} - \frac{dz}{n} = bz - a + \frac{d}{m} - \frac{cz}{n}$.

4. $(10a - 3b)(5x + 4) = (3a - 10b)(7x + 8)$.

5. $\left(\frac{3}{4}m + p\right)\left(\frac{2}{7}x - 3r\right) = \left(\frac{5}{8}m + 2p\right)\left(\frac{3}{8}x - 7r\right)$.

6. $(a - 2b + 3c)(5x - c) = (7c - 4a + 5b)(7x + 3c)$.

7. $\frac{x}{a} + 1 - \frac{bx}{c} + 5d = \frac{3x}{4} - 4\left(\frac{bx}{c} - 3d\right)$.

8. $\dfrac{m^2x}{n} - \dfrac{h^2}{g} + 5nx = \dfrac{4m^2x - h^2n - 8n^2gx}{5ng}$.

9. $\dfrac{13\left(5ax - 22\frac{3}{7}b\right)}{9ck^2} = \dfrac{24\left(3ax - 20\frac{2}{5}b\right)}{7c^2k}$.

10. $\frac{4}{5}x - 43 + \frac{2}{3}x + 7 - \frac{3}{7}x - 321 + 10\frac{1}{9}x = 0$.

11. $\frac{ax}{m} + \frac{bx}{n} + \frac{cx}{p} + \frac{dx}{q} = ax^2 + bx^2 + cx^2 + dx^2$.

12. $\dfrac{abc}{m} - \dfrac{(a + m)^2x}{b} - mx = (ac + 5bx)\,7m$.

13. $\dfrac{17 + x}{x} - 231 = \dfrac{23 - x}{4x} + 216$.

14. $\dfrac{4(3a^2 - 5x)}{17mx} + 1 = \dfrac{7(4a^2 - 3x)}{33mx} - 49$.

15. $\dfrac{3a^2 - 2ab + 5b^2}{a - 5x} = \dfrac{7a^2 + 16ab - 8b^2}{2a + x}$.

16. $\dfrac{14a^3 - 2a^2bx}{17mx} - 31c^5 = \dfrac{21a^3 + 5a^2bx}{33mx} + 20c^5$.

17. $\dfrac{4m(k^2 - 5x^2)}{8x} = 7mp + \dfrac{5m(g^3 - 2x)}{4}$.

18. $\dfrac{24x^8}{3 - 5x} = \dfrac{5x^8}{7 - 3x}$ und $\dfrac{ax^n}{b + cx} = \dfrac{mx^n}{p + qx}$.

19. $\frac{13m - 7x}{m + p} + \frac{4m - x}{m - p} = \frac{m + p}{m - p} - kx.$

20. $\frac{3abc}{a + b} + \frac{(2a + b) b^2 x}{a (a + b)^2} + \frac{a^2 b^2}{(a + b)^3} = 3cx + \frac{bx}{a}.$

B. Gleichungen mit zwei Unbekannten.

1. $x + y = 311$; $x - y = 83$; und $x + y = a$; $x - y = b$.
2. $5x + \frac{2}{3} y = 131 \frac{1}{4}$; $13x - y = 142 \frac{1}{3}$.
3. $6 \frac{2}{7} x - 14y = 5y + 119 \frac{3}{5}$; $7x + 140 = 2y$.
4. $13x - 341 + 7z = 43 \frac{1}{2} x + 17 \frac{3}{4} z$; $4x + z = 2$.
5. $9x = 4y$; $x + y = 26$; und $ax = by$; $x + y = c$.
6. $ax + by = c$; $mx + ny = p$.
7. $\frac{21}{14 + x} = \frac{14}{84 + y}$; $21x + 28y = 334$.
8. $\frac{a + 4b}{m + x} = \frac{2a - 3b}{3m - y}$; $5ax - 2by = c$.
9. $b^2 y + \frac{a (c^3 - b^3)}{bc} - \frac{2b^3}{c} = c^3 x$; $b (cx + 2) = cy$.
10. $17x - \frac{33b}{x + f} + (b + 10f) y = f^2 x$; $4x + 5y = \frac{9b - 2f.}{b^2 - f^2}$.

C. Gleichungen mit drei Unbekannten.

1. $x + y = 36$; $x + z = 49$; $y + z = 53$.
2. $v + w + z = 30$; $v + w - z = 18$; $v - w + z = 14$.
3. $x + y + z = a$; $by = cx$; $dz = fx$.
4. $u + \frac{1}{2} v = 164$; $v + \frac{1}{4} w = 82$; $u + \frac{1}{5} w = 136$.
5. $ax + by = c$; $my + nz = p$; $fx + gz = q$.
6. $54x - \frac{19}{5} = 17z + y$; $3x = \frac{4}{7} y - 1$; $32z - x = 17 \frac{3}{4}$.
7. $x + y + z = 90$; $2x + 4y + 8z = 150$; $3x + 9y + 27z = 192$.
8. $3 (ax + by) = z$; $5y = 7 (x + 3a)$; $11x = \frac{3}{8} z + 121$.
9. $\frac{5}{z} = \frac{7}{x - 5}$; $\frac{9}{y} = \frac{11}{z - 9}$; $\frac{13}{x} = \frac{15}{y - 13}$.
10. $\frac{a}{a + x} = \frac{b}{b - y}$; $\frac{b}{b + y} = \frac{c}{c - z}$; $\frac{d + x}{d + z} = \frac{c}{a}$.

D. Aufgaben zur Bildung von Gleichungen.

1. Welche Zahl ist es, die um 9 vermindert und dann mit 3 multiplicirt, oder zu 55 addirt, dasselbe giebt?
2. Eine gewisse Primzahl kommt wieder zum Vorschein, wenn man sie 3 mal nimmt, 15 hinzufügt und zu den sechsten Theil der Summe noch 6 addirt. Welche Zahl ist es?
3. Von einem Hofraume, der zwischen zwei Nachbarn getheilt wird, erhält der eine 26 Q. R. über $\frac{1}{4}$, der andere 4 Q. R. über $\frac{4}{7}$ des Flächenraums. Wie groß ist dieser?
4. Jemand kauft ein altes Clavier und bezahlt für dessen erste Reparatur die Hälfte, für die zweite $\frac{1}{4}$, für die dritte $\frac{1}{8}$ des Kaufpreises und so 21 Thlr. mehr, als diesen. Wie viel also?
5. Ein Schäfer, der von seiner Herde $\frac{3}{5}$ weniger 18 Stück verkauft, behält noch 45 über den vierten Theil übrig. Wie groß war die Herde?
6. Zwei Personen theilen sich in einen gemeinschaftlichen Gewinn, wobei der Eine $16\frac{1}{6}$ Thlr. mehr als $\frac{1}{3}$, der Andere $8\frac{5}{6}$ Thlr. weniger, als die Hälfte bekommt. Wie viel beträgt das Ganze?
7. Jemand vermehrt eine Summe um $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{10}$ derselben, und behält nach Ausgabe von 120 Thlr. noch 60 übrig. Wie viel hatte er zuerst?
8. Zum Ankauf von 13 Morgen Landes fehlen Jemandem 180 Thlr. Er kauft daher nur ein Feld von $9\frac{1}{2}$ Morgen und behält nun 100 Thlr. übrig. Wie viel kostet der Morgen?
9. Von dem Kaufpreise eines Grundstücks bezahlt der Käufer einmal $\frac{5}{8}$ und 12 Thlr. darüber, ein anderesmal $\frac{3}{10}$ weniger 3 Thlr., im Ganzen 749 Thlr. Wie viel bleibt er noch schuldig?
10. Wie viel hat ein Instrument, das mit Einschluß von 12 pro Cent Eingangssteuer und 8 Thlr. Transportkosten auf 176 Thlr. zu stehen kommt, an Ort und Stelle gekostet?
11. Ein Reisender hat $110\frac{1}{2}$ Thlr. bei sich, und zwar $7\frac{1}{2}$ mal so viel in Gold, als in Silber. Wie viel also in jeder Münzsorte?
12. Eine Wiese von 7776 Q. R. soll unter **A**, **B**, **C** so getheilt werden, daß **A** so viel bekomme, als die andern beiden zusammen, und **B** 240 Q. R. mehr, als **C**. Wie viel erhält Jeder?
13. Von zwei Freunden ist der Eine 24, der Andere 22 Jahre alt. Wann war der Aeltere 3 mal so alt, wie der Jüngere?
14. Ein Knabe der in die gegrabenen Löcher eines Beetes Blumenknollen legen will, behält 3 übrig, wenn er zwei in jedes legt; dagegen fehlen ihm 8, wenn er drei nimmt. Wie viel hat er also?
15. Man theile 100 dergestalt in zwei Theile, daß wenn der größere durch 3 dividirt und der kleinere mit 3 multiplicirt wird, Quotient und Product zusammen wieder 100 ausmachen.

16. Von den Passagieren eines Schiffes waren $\frac{1}{4}$ Deutsche, $\frac{1}{5}$ Franzosen, $\frac{1}{6}$ Engländer, $\frac{1}{8}$ Holländer und die übrigen 31 Americaner. Wie groß war ihre Anzahl?
17. Ein Legat soll unter Kirche, Schule und Armenhaus eines Orts so vertheilt werden, daß die Kirche 300 Thlr. vorab und $\frac{1}{7}$ des Uebrigen, dann die Schule 200 Thlr. vorab und $\frac{1}{4}$ des Restes, das Armenhaus aber die noch übrig bleibenden 1200 Thlr. haben soll. Wie viel beträgt das Legat?
18. Jemand leihet 1100 Thlr. zu 4 pro Cent und $4\frac{1}{2}$ Jahr später 1600 Thlr. zu 5 pro Cent. Wann hat er für beide Summen gleich viel Zinsen bezahlt?
19. Nachdem **A**, der dreimal so viel, als **B** schuldig war, 52 Thlr. abgetragen hat, dieser hingegen nur 4 Thlr., bleiben beide noch gleich viel schuldig. Wie viel ist dies?
20. Um eine Uhr zu kaufen, hat **A** nur $\frac{1}{4}$, **B** nur $\frac{1}{7}$ des geforderten Preises bei sich. Beide zusammen haben $8\frac{1}{4}$ Thlr. Wie viel soll die Uhr kosten?
21. Zwei Geldbriefe für **A** und **B** werden verwechselt, wodurch **A** 26 Thlr. zuviel und **B** $\frac{2}{9}$ des ihm bestimmten zu wenig bekommt. Wie viel ist für jeden bestimmt?
22. Die Höhen zweier Thürme verhalten sich, wie 12 zu 13; dabei ist der eine 17 Fuß höher als der andere, wie hoch also jeder?
23. In einem Gefäß sind Alkohol und Wasser im Verhältniß von 7 : 3 gemischt und bilden 40 Maß. Wie viel Alkohol muß zugesetzt werden, wenn das Verhältniß der Mischung 11 : 4 werden soll?
24. Ein Goldarbeiter braucht 17 Mark 12löthiges Silber, und will deshalb 14löthiges und 9löthiges zusammenschmelzen. Wie viel Mark (zu 16 Loth) muß er daher von jeder Sorte nehmen?
25. Von zwei Reisenden hat der eine 72 Thlr. und 30 Franken, der andere 68 Thlr. und 45 Franken bei sich, also beide gleich viel. Wie verhält sich demnach der Werth beider Münzen zu einander?
26. Wie lassen sich 3 Thlr. theils in $\frac{1}{12}$, theils in $\frac{1}{6}$ Thalerstücken so bezahlen, daß dieses gerade durch 29 Stücke geschehe?
27. Ein Beamter bezieht ein Gehalt von 780 Thlr. aus zwei verschiedenen Cassen, und zwar aus der einen in 5 Monaten so viel, wie aus der andern in 8; wie viel also aus jeder?
28. Jemand, der jährlich 500 Thlr. verbraucht, vermehrt sein Vermögen, zwei Jahre hindurch, jährlich um 16 pro Cent und findet, daß er dasselbe um $\frac{1}{10}$ des anfänglichen Betrages und 148 Thlr. vergrößert hat. Wie viel hatte er Anfangs?
29. Die Stärke zwei feindlicher Heere verhielt sich, wie 4 : 5, nachdem aber das erste um 4000 Mann verstärkt, das andere um 11,000 Mann vermindert war, wie 4 : 3. Wie stark war jedes?

30. Ein Uhrmacher, der dreimal so viel silberne, als goldene Uhren hatte, verkaufte von jenen in Jahresfrist $\frac{2}{5}$, von diesen aber nur 4, und behält nun halb so viel goldene als silberne Uhren übrig. Wie viel hatte er?

31. Jemand kauft Messer, das Dutzend zu 4 Thlr. Gäbe der Kaufmann ihm 5 Stück zu, so würde es $\frac{5}{8}$ Thlr. weniger kosten. Wie viel Messer kaufte er demnach:

32. A und B tragen eine Last von 312 Pfund an einer 6 Fuß langen Stange, so daß dieselbe $3\frac{2}{3}$ Fuß von A und $2\frac{1}{3}$ Fuß von B entfernt ist. Wie viel Pfund trägt jeder?

33. Zwei silberne Gefäße, 8 und 10 Mark wiegend, enthalten zusammen 175 Loth fein Silber und in 4 Mark des ersten sind 5 Loth fein Silber mehr enthalten, als in 6 Mark des zweiten. Wie viel löthig sind beide Sorten Silber?

34. Für 9 Thlr. erhält man 20 Buch Briefpapier und 24 Buch Schreibpapier, für 11 Thlr. dagegen 24 Buch von dem ersten und 30 Buch von dem zweiten. Wie viel kostet jede Sorte?

35. Ein Thermometer stieg in gleichen Intervallen zuerst auf das Doppelte der Grade, ferner um 6°, fiel dann auf $\frac{3}{5}$ seines höchsten Standes, und sank noch um 5°, worauf es den anfänglichen Stand wieder einnahm. Welches war dieser?

36. Jemand hat einzelne Gulden, Thaler und Ducaten, von den beiden ersten im Ganzen 9 Stück, von den beiden letzten 13, dagegen Gulden und Ducaten zusammen 10 Stück. Wie viel von jeder Art?

37. Ein Pferd zum Preise von 300 Thlr. wird drei Officiren angeboten, von denen jedoch keiner das Geld zum Ankauf vorräthig hat. A bedürfte dazu der Hälfte vom Gelde des B, dieser $\frac{1}{3}$ des Geldes von C, und C $\frac{1}{4}$ des Geldes von A. Wie viel hat jeder?

38. Vier Personen haben zusammen 1710 Thlr. gewonnen. Wenn der Gewinn von A 3 mal und B 4 mal, von C 5 mal und von D 6 mal genommen wird, so erhält man stets dasselbe. Was hat jeder gewonnen?

39. Von vier Zimmern eines Hauses ist das erste 400 Q. F. größer als das zweite, und dieses doppelt so groß als das dritte, welches 40 Q. F. mehr enthält als das vierte. Die drei letzten zusammen enthalten nur 240 Q. F. mehr, als das erste allein.

40. A, B, C besitzen zusammen 910 Morgen Waldung. Tritt B dem A 100 Morgen ab, so hat dieser 80 mehr als B; bekäme B hingegen von C 35 Morgen, so würden beide gleich viel besitzen. Wie viel hat Jeder?

41. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden: durch die erste in 20, durch die zweite in 50, durch die dritte in 75 Minuten. In wie vielen Minuten durch alle drei zugleich?

42. In welchem Momente zwischen 6 und 7 Uhr stehen beide Zeiger einer Uhr genau über einander?

43. Wann treffen einander zwei Personen, von denen A 4 Stunden früher abgereist ist und in 3 Stunden 2 Meilen zurücklegt, während B in 4 Stunden 3 Meilen macht?

44. Wann hingegen, wenn B aus einem um 5 Meilen rückwärts liegenden Orte dem A nachreist, während alles Andere bleibt wie in voriger Aufgabe?

45. Der Klang einer Glocke, der in stiller Luft 1040 Fuß weit in jeder Secunde fortschreiten würde, durchlaufe mit einer durch den Wind um $\frac{1}{8}$ verzögerten Geschwindigkeit einen Raum von 5980 Fuß. Wie viele Secunden gehören dazu?

46. Das Quecksilber dehnt sich für jeden Centesimalgrad um $\frac{1}{5550}$ seines Volumens aus. Wie viel würde demnach der Barometerstand bei 0° betragen, wenn er bei 21° Wärme 27″ $8\frac{1}{2}$‴ beträgt?

47. Wie viel Centesimalgrade Wärme gehören dazu, um einen Barometerstand von 26″ 4‴ bei 0° auf 26″ 8‴ zu erhöhen?

48. Ein Stück Silber, dessen specifisches Gewicht gleich $10\frac{1}{2}$ ist, wiegt 84 Loth. Wie viel wird es daran durch Einsenken in Wasser verlieren?

49. Wie viel verlieren 100 Pfund Zink an Gewicht im Wasser, wenn man das spec. Gewicht des Zinks $= 7\frac{1}{8}$ setzt?

50. Ein Dampfwagen, welcher mit Einschluß seines eigenen Gewichtes 66 Centner mit 42 Fuß Geschwindigkeit fördert, wird mit einem andern verbunden, der 48 Centner mit 57 Fuß Geschwindigkeit fortschafft. Mit welcher Geschwindigkeit werden sie sich gemeinschaftlich bewegen?

51. In einer Masse aus Kupfer und Zink, 120 Pfund schwer, sind von jenem 8, von diesem 3 Theile enthalten. Wie viel Zink muß zugesetzt werden, damit das Verhältniß wie 14 : 5 werde?

52. An einem einarmigen Hebel wirken in den Abständen von 5, 7 und 9 Fuß gleiche Kräfte, denen eine Kraft von 80 Pfund im Abstande von 13 Fuß das Gleichgewicht hält. Wie groß sind jene?

53. An den Enden eines zweiarmigen Hebels, dessen beide Arme 16 und 21 Zoll lang sind, drücken zwei Gewichte, zusammen $65\frac{2}{3}$ Pfund. Wie viel beträgt jedes?

54. Zwei Lasten, 13 und 44 Centner, sind an den Endpunkten eines $5\frac{1}{7}$ Fuß langen Wagebalkens im Gleichgewicht. Beide Hebelarme sollen bestimmt werden.

55. Die Differenz der äußersten Thermometerstände betrug zu A in einem Jahre $44\frac{3}{10}$ Grad. Die Grade der Wärme verhielten sich zu denen der Kälte, wie 7 zu 4. Welches waren die Thermometerstände?

56. Zwei Körper, von denen der eine ein Gewicht von 33 Ctr. hat, bewegen sich in der nämlichen gradlinigen Bahn, jener mit 37, der andere mit 51 Fuß in der Secunde und nach dem Zusammenstoß mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit von $42\frac{3}{4}$ Fuß. Wie viel wiegt demnach der zweite?

57. Ein $10\frac{3}{7}$ Pfund schweres Gefäß von Zinn mit Bleigehalt verliert im Wasser $1\frac{1}{3}$ Pfund am Gewicht. Wie viel Blei befindet sich darin, wenn man das spec. Gewicht des Zinns $= 7$, des Bleis $= 11$ setzt (d. h. wenn jenes $\frac{1}{7}$, dieses $\frac{1}{11}$ verliert)?

58. Wie viel Centner Tannenholz sind erforderlich, um 23 Ctr. Eisen im Wasser schwebend zu erhalten, wenn das spec. Gewicht von diesem $= 7\frac{3}{5}$, von jenem $= \frac{9}{20}$ angenommen wird?

59. In einer Masse von 4000 Pfund Schießpulver sind 3240 Pfund Schwefel weniger, als Kohle und Salpeter, dagegen 2760 Pfund Kohle weniger, als Schwefel und Salpeter enthalten. Wie viel also von jedem dieser Körper?

60. Um Chlorgas zu bereiten, hat man eine Retorte mit einer $3\frac{5}{8}$ Pfund wiegenden Mischung von Kochsalz, Braunstein, Schwefelsäure und Wasser gefüllt. Die ersten beiden dieser Substanzen zusammen sind den beiden letzten, so wie diese unter einander am Gewicht gleich, und es ist $\frac{4}{3}$ mal so viel Salz als Braunstein genommen. Wie viel mithin von jeder Substanz?

Anmerkung. Zur erforderlichen Uebung in der völlig allgemeinen Behandlung solcher Aufgaben, welche zu Gleichungen des ersten Grades führen, ist es zweckmäßig, daß an den vorstehenden nach jeder, in bestimmten Zahlen ausgeführten, Auflösung dieselbe allgemein mit Buchstaben-Andeutungen der gegebenen Zahlen wiederholt werde, wo man dann als Endresultat eine Formel als Werth der Unbekannten erhält.

Sechstes Capitel.

Die Proportionen.

§. 65. Verhältnisse und Proportionen. Unter allen Gleichungen verdienen diejenigen besonders hervorgehoben zu werden, worin vier Zahlen sich mit einander zu zwei Differenzen oder Quotienten verbinden, also Gleichungen der Form:

$$\text{I.}\quad a - b = c - d.$$

$$\text{II.}\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ oder } a:b = c:d.$$

Es kommt nämlich bei der Vergleichung zweier Größen entweder ihr Unterschied oder die Wiederholbarkeit der einen in der andern in Betracht, oder nach dem mathematischen Sprachgebrauche, ihr arithmetisches oder geometrisches Verhältniß. Die Zusammenstellung zweier solcher gleichbedeutenden Verhältnisse wird nach eben diesem Sprachgebrauche eine arithmetische oder geometrische Proportion, besser aber eine Differenz- oder Quotientengleichung genannt. Nach beiden Benennungsarten können die vier Glieder a, b, c, d der Gleichung als äußere (a und d) und innere (b und c), ferner als vorangehende (a und c) und nachfolgende (b und d), oder ihrer ursprünglichen Folge nach als erstes, zweites, drittes und viertes Glied in den, aus ihrer Betrachtung sich ergebenden, Lehrsätzen unterschieden werden.

§. 66. Differenzgleichungen. Die allgemeine Form der Differenzgleichungen (arithmetischen Proportionen) d. i.

$$\text{I.}\quad a - b = c - d,$$

erlaubt einige Umgestaltungen, die als Lehrsätze ausgesprochen werden können; nämlich

$$(1)\ a + d = b + c, \text{ d. h.}$$

1. die Summe der äußern ist der Summe der innern Glieder gleich.

$$(2)\ a - c = b - d; \text{ d. h.}$$

2. die Differenz der vorangehenden ist der Differenz der nachfolgenden Glieder gleich.

In dem besondern Falle, daß in den mittlern Gliedern dieselbe Größe sich wiederholt, wird diese das arithmetische Mittel zwischen den äußern Gliedern und die Differenzgleichung eine stetige (stetige arithmetische Proportion) genannt. Dann wird der zweite der vorstehenden Ausdrücke, weil der Voraussetzung gemäß

$$a - b = b - d,$$

$$(3)\ a + d = 2b, \text{ also } b = \frac{a+d}{2}, \text{ d. h.}$$

3. Das arithmetische Mittel zwischen zwei Zahlen ist ihrer halben Summe gleich; z. B. wenn a=15, d=27 gegeben wäre, b=½ (15+27) =21.

(S. Aufg. 1—6, §. 70.)

§. 67. Verhältnißgleichungen. Ungleich wichtiger ist die Form a:b=c:d, worin zwei Quotienten einander gleichgesetzt werden, namentlich wegen ihrer vielfachen Anwendung auf Betrachtungen der Geometrie, weshalb man sie denn auch vorzugsweise eine geometrische Proportion genannt hat. Ist überhaupt von einer Proportion (ohne den Zusatz arithmetisch oder geometrisch) die Rede, so wird darunter in der Regel eine solche Form verstanden, und es wäre angemessen, das Wort allein in dieser Bedeutung zu gebrauchen, um die Irrungen zu vermeiden, welche leicht entstehen, wenn man dem nämlichen Worte in der Kunstsprache der Mathematik zwei ganz verschiedene Bedeutungen beilegen darf. Aus dem nämlichen Grunde sollte man das Wort Verhältniß nie gleichbedeutend mit Differenz gebrauchen, sondern lediglich folgende Erklärung davon gelten lassen:

Ein Verhältniß ist die Angabe durch Zahlen, wie oft ein beliebiges gemeinschaftliches Maß in zwei gleichartigen Größen enthalten sei. So sagt man z. B., die Linie **A** verhalte sich zur Linie **B**, wie 5 zu 20, wenn irgend ein Längenmaß 5mal in der ersten, und 20mal in der zweiten enthalten ist. Beide Zahlen werden Glieder des Verhältnisses genannt, und eine dritte Zahl, welche angiebt, wie oft das erste Glied in dem zweiten enthalten ist, heißt der Factor des Verhältnisses, indem man durch diese Zahl das erste multipliciren muß, um das zweite zu bilden. So ist 4 der Factor des Verhältnisses 5 zu 20, ¾ derjenige des Verhältnisses 16 zu 12. Von diesem Factor unterscheidet sich der Quotient des Verhältnisses als die Zahl, welche angiebt, wie oft das zweite Glied im ersten enthalten ist. Factor und Quotient des nämlichen Verhältnisses müssen also (nach §. 38.) stets entgegengesetzte Factoren sein. (S. Aufg. 7 und 6, §. 70.)

Da nun aber die Division zwei gleichartiger Zahlen (nach §. 14, 1) gleichfalls als eine Messung angesehen werden muß, wobei man anzugeben hat, wie viel mal die eine Zahl (der Divisor) in der andern (dem Dividend) enthalten ist, so kann das Verhältniß zweier Zahlen a und b als gleichbedeutend mit dem Ausdruck einer solchen Division, und folglich durch a:b oder (nach §. 22.) durch $\frac{a}{b}$ angedeutet werden. Was früher über die Veränderung der Bruch- oder Quotientenform (§. 23.) gesagt worden, gilt demnach auf gleiche Weise von dem Verhältniß zweier Zahlen, wonach ein solches ungeändert bleibt, wenn man beide Glieder desselben mit der

nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt. So ist z. B. $a : ab = 2a : 2ab = \frac{3}{4}a : \frac{3}{4}ab$, allgemein $= ka : kab$, oder $3 : 9 = 6 : 18 = 21 : 63$ u. s. f. Verhältnisse, wie die vorstehenden, sind einander gleich, wenn der Factor (wie hier z. B. b oder 3) in allen der nämliche ist. Eine Verhältnißgleichung entsteht durch Zusammenstellung zwei gleicher Verhältnisse. Stellt man deren drei oder mehre zusammen, so wird die Verhältnißgleichung eine fortlaufende genannt. (S. Aufg. 9—13, §. 70.)

§. 68. Lehrsätze über Verhältnißgleichungen. Unter den mannigfachen Umgestaltungen, welche die allgemeine Form aller Verhältnißgleichungen (geometrischen Proportionen):

$$\text{(II.)} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ oder } a : b = c : d$$

zuläßt, sind vorzüglich folgende als die einfachsten und unaufhörlich zur Anwendung kommenden zu beachten:

(1) $ad = bc$; d. h.

1. Die Producte der äußern und der innern Glieder sind einander gleich.

Anmerkung. Dieser Satz läßt sich nicht allein durch Transposition (nach §. 55. 4.), sondern auch aus der Form $a : af = c : cf$ einer Verhältnißgleichung beweisen, da (nach §. 12.), $a \times cf = af \times c$ gesetzt werden darf.

(2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ oder $a : c = b : d$, d. h.

2. die Verhältnisse der vorangehenden und der nachfolgenden Glieder sind einander gleich, oder das erste verhält sich zum dritten Gliede, wie das zweite zum vierten.

Wiederholt sich dieselbe Größe in den mittlern Gliedern, so nennt man die Verhältnißgleichung eine stetige (stetige geometrische Proportion) und jene Größe die mittlere (geometrische) Proportionale. Nun folgt aber aus der Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} \text{ oder } a : b = b : d.$$

(3) $ad = bb$; d. h.

3. die mittlere (geometrische) Proportionale ist eine Zahl, welche, mit sich selbst multiplicirt, das Product der äußern Glieder wiedergeben muß.

Sucht man sie zwischen 4 und 16, so folgt aus $\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$ oder $4 . 16 = x . x$, daß $x = 8$ sein müsse. (Die allgemeine Bestimmung einer solchen sogenannten Wurzelzahl ist im folgenden Abschnitt enthalten.) Aufg. 14, 15 §. 70.

Mehre andere Folgerungen, aus denen man besondere Lehrsätze bilden kann, ergaben sich aus der Addition oder Subtraction

derselben Zahl auf beiden Seiten der obigen Verhältnißgleichungen. So erhalten wir durch Addition

aus (2) $\frac{a}{c} + m = \frac{b}{d} + m$ oder $\frac{a + mc}{c} = \frac{b + md}{d}$,

nach L. 2. also (4) $\frac{a + mc}{b + md} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$; d. h.

4. das gegebene Verhältniß der ersten beiden Glieder einer Verhältnißgleichung bleibt ungeändert, wenn man das erste um ein beliebiges Vielfaches des dritten, das zweite um eben dieses Vielfache des vierten vermehrt.

Auf eine ähnliche Weise lassen sich folgende Ausdrücke ableiten und als Lehrsätze in Worten aussprechen:

Aus (II.) $\frac{a}{b} + m = \frac{c}{d} + m$ oder $\frac{a + mb}{b} = \frac{c + md}{d}$

mithin (5) $\frac{a + mb}{c + md} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$.

Aus (2) $\frac{a}{c} - m = \frac{b}{d} - m$ oder $\frac{a - mc}{c} = \frac{b - md}{d}$

mithin (6) $\frac{a - mc}{b - md} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

Aus (II.) $\frac{a}{b} - m = \frac{c}{d} - m$ oder $\frac{a - bm}{b} = \frac{c - md}{d}$

mithin (7) $\frac{a - mb}{c - md} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$.

und wenn man die gleichbedeutenden Ausdrücke, wie (4) und (6) oder (5) und (7) einander gleich setzt:

(8) $\frac{a + mc}{b + md} = \frac{a - mc}{b - md}$

(9) $\frac{a + mb}{c + md} = \frac{a - mb}{c - md}$

Verbände man die Einheit statt des allgemeinen Zeichens m mit den gegebenen Quotienten addirend oder subtrahirend, so würden die Gleichungen (4) . . . . (9) folgende einfachere und leichter in Worten auszusprechende Formen erhalten:

(10) $\frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

(11) $\frac{a + b}{c + d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$.

(12) $\frac{a - c}{b - d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

(13) $\frac{a - b}{c - d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$.

(14) $\frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d}$.

(15) $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d}$.

Zu einem für die Anwendung höchst wichtigen Lehrsatze giebt noch die fortlaufende Verhältnißgleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \text{etc.}$$

Veranlassung, wenn man den gemeinschaftlichen Zahlenwerth aller dieser Quotienten oder Verhältnisse durch q bezeichnet, also

$$\frac{a}{b} = q,\ \frac{c}{d} = q,\ \frac{e}{f} = q,\ \frac{g}{h} = q$$

$$\text{oder } a = bq,\ c = dq,\ e = fq,\ g = hq$$

setzt, und diese Gleichungen in der summarischen

$$a + c + e + g = (b + d + f + h)\, q$$

verbindet, woraus durch Transposition

$$(16)\quad \frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ u. s. w.}$$

folgt; d. h. in Worten ausgesprochen:

Wenn man in einer Reihe gleicher Verhältnisse die vorangehenden und die nachfolgenden Glieder abgesondert summirt, so ist das Verhältniß ihrer Summen jedem einzelnen gleich; z. B.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2 + 4 + 6 + 8}{3 + 6 + 9 + 12} = \frac{20}{30}.$$

§. 69. Verbinduug der Verhältnißgleichungen. Das, was man eine Zusammensetzung der Verhältnisse zu nennen pflegt, ist eine Verbindung von Verhältnißgleichungen durch Multiplication oder Division, wofür die Regeln in der Bruchrechnung (§. 27. und 28.) bereits gegeben sind. So folgt aus den Gleichungen:

$$(1)\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{oder } a : b = c : d$$

$$(2)\quad \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \qquad e : f = g : h$$

$$(3)\quad \frac{i}{k} = \frac{l}{m} \qquad i : k = l : m$$

$$(4)\quad \frac{aei}{bfk} = \frac{cgl}{dhm}, \text{ oder } aei : bfk = cgl : dhm$$

und auf die nämliche Weise setzen sich beliebig viele Verhältnisse oder Quotienten zu einem neuen zusammen, indem man Producte aus den gleichstelligen Gliedern bildet.

Sind die Verhältnißgleichungen stetige, so wird aus ihrer Vereinigung wieder eine solche entspringen:

$$(1)\quad \frac{a}{b} = \frac{b}{d} \quad \text{oder } a : b = b : d$$

$$(2)\quad \frac{e}{f} = \frac{f}{k} \qquad e : f = f : k$$

$$(3)\quad \frac{l}{m} = \frac{m}{o} \qquad l : m = m : o$$

$$(4)\quad \frac{ael}{bfm} = \frac{bfm}{dko}, \text{ oder } ael : bfm = bfm : dko$$

Wiederholen sich aber die nachfolgenden Glieder als vorangehend auf den nämlichen Seiten, so zieht das Resultat sich auf eine einfache Gleichung zwischen den äußersten Gliedern zusammen:

$$(1)\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ oder } a : b = c : d$$

$$(2)\ \frac{b}{f} = \frac{d}{h} \qquad b : f = d : h$$

$$(3)\ \frac{f}{k} = \frac{h}{m} \qquad f : k = h : m$$

$$(4)\ \frac{abf}{bfk} = \frac{cdh}{dhm}, \text{ oder } abf : bfk = cdh : dhm;$$

$$\text{d. i. } \frac{a}{k} = \frac{c}{m}, \text{ oder } a : k = c : m.$$

§. 70. Aufgaben.

1. Die Summengleichungen $4 + 11 = 6 + 9$, $10 + 8 = 5 + 13$, $100 + 12 = 58 + 54$ in Differenzgleichungen umzusetzen.
2. Eben so $p + q = r + s$; $3a + b = 4b + c$, $5m + 3n = 7n + q$.
3. Eine Linie ist durch Messung das eine Mal $= 36' \ 8''$, das andere Mal $= 37' \ 1''$ gefunden. Welcher Werth ist nun zu wählen?
4. Bei doppelter Abwägung eines Körpers findet man sein Gewicht $= 1286\frac{3}{4}$ und $1287\frac{1}{8}$ Gran. Welche Zahl soll man als die wahrscheinlichere annehmen?
5. Zwei Kreise sind mit den Radien von $7\frac{3}{8}$ und $12\frac{5}{9}$ Zoll beschrieben. Wie groß ist der Radius eines dritten, der zwischen beiden in die Mitte fällt?
6. Die Höhe eines Sterns ist bei seiner oberen Culmination $= 81^\circ \ 27' \ 36''$, bei der unteren $= 32^\circ \ 54' \ 24''$ beobachtet. Welches ist demnach die Polhöhe?
7. Von zwei Wegen ist der eine $457\frac{1}{2}$, der andere 877 Ruthen lang. Wie verhalten sich ihre Längen in Fußen, in Zollen und in Linien ausgedrückt?
8. Welches ist der Factor der Verhältnisse (1) $20\frac{2}{3} : 31$ und (2) $86\frac{2}{3} : 65$, und welche Zahl ist ihr Quotient?
9. Wie viel verlieren 333 Gran Platindraht am Gewicht im Wasser, wenn 49 Gran $2\frac{1}{3}$ Gran verlieren?
10. Wie ist das Verhältniß von $17\frac{3}{4}$ zu 23 Grad der Reaumürschen Thermometerskale in Centesimalgraden auszudrücken?
11. Ein Marmorblock von $83\frac{1}{2}$ Cubikfuß Inhalt wiegt 15690 Pfd. Wie viel wiegen 31 Cubikfuß desselben?
12. Wie groß ist das specifische Gewicht dieses Marmors, wenn 3 Cubikfuß Wasser 191 Pfund wiegen?

13. Ein Gewicht von $7\frac{5}{8}$ Pfund am 16zölligen Arme eines Hebels hält einem andern von $18\frac{3}{5}$ Pfund das Gleichgewicht. Wie lang ist der zweite Hebelarm und welches sind die statischen Momente?

14. Von welchen ganzen Zahlen kann 36 mittlere Proportionale sein?

15. Von welchen 64, 81, 144, 196, 256?

16. Welche Umformungen erlaubt die Proportion $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$, wenn man auf beiden Seiten die Einheit addirt?

17. Eben so $\frac{k}{n} = \frac{7}{3}$, wenn man die Einheit subtrahirt?

18. Eben so $\frac{r}{q} = \frac{10}{13}$, wenn man 5 addirt?

19. Eben so $\frac{a}{b} = \frac{33}{8}$, wenn man 4 subtrahirt?

20. Länge und Breite zweier Häuser verhalten sich, wie 5:8; wie ihr Umfang?

21. Ein Quecksilber-Barometer stehe 27″ $5\frac{3}{4}$‴ hoch und das specifische Gewicht seines Quecksilbers sei $= 13\frac{23}{40}$. Wie hoch würde ein Wasser-Barometer zu gleicher Zeit stehen?

22. Ein Druck von 2 Atmosphären preßt 24 Cubikzoll einer Gasart auf $13\frac{7}{8}$ C. Z. zusammen. Welcher Druck würde das Volumen auf $7\frac{3}{4}$ C. Z. vermindern?

23. Die Verhältnisse der Dichtigkeitszahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ mehrer Körper **A, B, C, D, E, F** sind:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{7}, \frac{\beta}{\gamma} = \frac{12}{23}, \frac{\gamma}{\delta} = \frac{15}{47}, \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{7}{24}, \frac{\varepsilon}{\varphi} = \frac{161}{45}.$$

Wie verhalten sich die Dichtigkeiten ze zweier von ihnen?

24. Ueber einer Fläche von $3\frac{3}{4}$ Quadratzoll steht Quecksilber $27\frac{7}{12}$ Zoll hoch, über einer andern von $7\frac{3}{5}$ Quadratzoll hingegen Wasser $32\frac{3}{4}$ Fuß hoch. Welches ist das Verhältniß des Drucks, welchen beide Flächen erleiden? (Vgl. Aufg. 21.)

25. Eine Saite gebe bei 144 Schwingungen einen Ton **F**. Von diesem schreitet man durch 5 Quinten (d. h. im Verhältniß 2:3) zu einem höhern Tone **E** fort. Wie viel Schwingungen entsprechen diesem in der Secunde?

26. Die Cohäsionskräfte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ von Gold (**A**), Silber (**B**), Kupfer (**C**), Zinn (**D**), Eisen (**E**), Blei (**F**) verhalten sich zu einander wie folgt?

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{19}{39}, \frac{\beta}{\delta} = \frac{578}{75}, \frac{\gamma}{\delta} = \frac{71}{11}, \frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{39}{23}, \frac{\varphi}{\gamma} = \frac{1}{42}.$$

Wie verhalten sich die Cohäsionskräfte je zweier der erwähnten Metalle?

27. Auf die Schaufeln eines Rades strömen $16\frac{1}{2}$ C. F. Wasser mit 12 Fuß Geschwindigkeit, auf die eines andern 9 C. F. mit 31 Fuß Geschwindigkeit. Wie verhalten sich die Wirkungen des Stoßes zu einander?

28. Eine mit comprimirter Luft gefüllte Hohlkugel erleidet von derselben bei einer Temperatur von 14° C. einen Druck nach außen von zwei Atmosphären. Wie groß wird der Druck bei dreimaliger Verdichtung der eingeschlossenen Luft, wenn man dieselbe außerdem noch bis auf 40° C. erhitzt? (Die Ausdehnung für 1° C. ist $= \frac{3}{800}$).

29. Um wie viel ist die Luft nach 8 Kolbenzügen unter dem Recipienten einer Luftpumpe verdünnt, wenn derselbe 340, der Stiefel aber 20 Cubikzoll Volumen hat?

30. Die Halbmesser von 3 Rädern, a, b, c mögen 4', $5\frac{1}{2}$' und $6\frac{1}{3}$', von ihren Wellen aber 1', $1\frac{1}{4}$' und $2\frac{2}{5}$' betragen. Eine Last von 31 Centnern an der Welle von a soll durch eine Kraft am Umfange des Rades c gehalten werden. Wie groß muß diese sein?

31. Wenn C als Grundton 264 Schwingungen in der Secunde macht, so macht Fis als Terz von D deren $371\frac{1}{4}$. Wie groß berechnet sich die Anzahl, wenn man den Ton Fis durch Hülfe von Quinten und Octaven stimmen wollte, indem man nach einander die Töne C, G, D', D, A, E', E, H Fis', Fis vermittelst der Verhältnisse 3:2 und 2:1 abstimmt?

32. Es verbinden sich chemisch mit einander:

7 Pfund Kalk mit 10 Pfund Schwefelsäure;
1000 Gr. Schwefelsäure mit 1913 Gr. Baryt;
382,6 Loth Baryt mit 110 Loth Kohlensäure;
11 Gr. Kohlensäure mit 18 Gr. Eisenoxydul.

Welches ist demnach das Verhältniß der Aequivalente aller genannten Körper, wenn in der Schwefelsäure 3 Gewichtstheile Sauerstoff (jeder = 100) sich mit 1 Theil Schwefel (= 200) verbinden?

Zweites Buch.

Die Rangoperationen.

---

§. 71. Rang der Zahlen. In den bisherigen Operationen wurden die zu verbindenden Zahlen als gleichartig auf dieselbe ursprüngliche Einheit bezogen, in Absicht ihres Inhalts aber nur in sofern unterschieden, als sie entweder ein Vielfaches dieser Einheit oder Theile derselben angeben, d. h. ganze oder gebrochene Zahlen bilden. Da nun aber die Reihe der ganzen Zahlen bis in's Unendliche ausgedehnt werden kann, so erfordert die Uebersicht derselben, daß man sie in Hinsicht auf ihren Inhalt in verschiedene Classen bringe oder in ihrer ursprünglichen Reihe eine Eintheilung nach bestimmten Grundsätzen vornehme, wodurch man Einheiten von verschiedenem Range erhält, deren jede höhere mehre niedere in sich faßt; eben so, wie bei der Eintheilung des Längenmaßes 12 Linien einen Zoll, 12 Zoll einen Fuß, 12 Fuß eine Ruthe bilden: denn ohne eine solche stufenweise, nach denselben Grundsätzen sich immer wiederholende Zusammenfassung, und eine derselben entsprechende einfache Bezeichnungsart würde die Behandlung der Zahlen mit den größten Schwierigkeiten verbunden sein, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann, wenn man nur ein Rechnungsexempel mit römischen Ziffern auszurechnen versucht.

§. 72. Potenz. Ist durch $a$maliges Setzen der ursprünglichen Einheit die Zahl $1 . a$ entstanden, so kann man aus ihr durch eben so oft wiederholtes Setzen eine Zahl $1 . a . a$ vom zweiten Range, durch $a$maliges Setzen der letztern eine vom dritten Range, $1 . a . a . a$, und auf diesem Wege fortschreitend Zahlen von jedem höhern Range erzeugen, die nichts Anderes als Product der Einheit und des mehrfach wiederholten Multiplicators a sein werden. Ein solches, aus gleichen Factoren bestehendes Product wird Potenz genannt

und (nach §. 12. Anm.) am einfachsten dadurch ausgedrückt, daß man die Wiederholung des Factors durch eine oben nebengesetzte Zahl bemerklich macht. So ist z. B. $1 . a . a . a . a . a = a^5$, $1 . b . b . b = b^3$, $2^5 = 32$, $8^2 = 64$. Den Factor, durch dessen Wiederholung eine Potenz gebildet wird, pflegt man vorzugsweise Grundfactor derselben zu nennen.

Diese, dem Grundfactor beigefügte, Zahl giebt dadurch, daß sie andeutet, wie oft man ihn als Multiplicator zur Einheit setzen solle, den Rang der Potenz an und darf insofern Rangzeiger genannt werden. Als das wesentliche, bestimmende Merkmal der Potenz heißt sie Exponent derselben. Der Wortausdruck für die Andeutung a^n ist: a zur n^{ten} Potenz, oder kürzer a zu n.

Anmerkung. Die Vorstellung eines Products aus gleichen Factoren mußte als besonderer Fall der Multiplication bereits früher (§. 12.) erwähnt, und durfte schon an jenem Orte durch Bezeichnung der Factorenwiederholung vermöge des Exponenten in der abgekürzten Form a^n dargestellt werden.

§. 73. Wurzel. So wie durch Zusammensetzung mehrer gleicher Factoren (oder Potenzirung) die Potenz als eine Zahl höheren Ranges entsteht, gelangt man umgekehrt durch Zerlegung in gleiche Factoren zu einer Zahl niedrigern Ranges, die den Namen Wurzel führt, weil man die gegebene, in gleiche Factoren zu zerfällende Zahl als eine aus der Wiederholung dieser Wurzel erwachsene Potenz betrachtet. Die Wurzel einer Zahl P ist demnach ein Factor, durch dessen wiederholtes Setzen zur Einheit die Zahl P entsteht, z. B. k, wenn $P = 1 . k . k . k$ ist. Die Bestimmung einer solchen Wurzel aus P wird Wurzelausziehung (oder Depotenzirung) genannt und angedeutet durch $\sqrt[n]{P}$, d. h. n^{te} Wurzel aus P, wo der Wurzelexponent n angiebt, wie viel gleiche Factoren zur Einheit gesetzt werden sollen, um P zu erzeugen. So ist z. B. $\sqrt[5]{1.a.a.a\,a.a} = a$, $\sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{1.b.b.b} = b$, $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$. Die zweite Wurzel pflegt man wegen ihres häufigen Vorkommens einfach mit $\sqrt{}$ zu bezeichnen.

§. 74. Logarithmus. Sowohl bei der Bildung einer höhern Potenz aus einem gegebenen Grundfactor a (der Potenzirung), als auch bei der Zerlegung einer gegebenen Potenz P in gleiche Factoren (der Wurzelausziehung) ist der Exponent eine nothwendig gegebene, bestimmende Zahl. Er kann indessen auch als abhängig von einem gegebenen Grundfactor und einer, als Potenz desselben gegebenen Zahl P angesehen werden (wie z. B. in $64 = 4^m$ oder $81 = 3^n$, wo $m = 3$, $n = 4$ ist) und heißt in diesem Falle Logarithmus der gegebenen Zahl. Die allgemeine Andeutung eines solchen ist

$m = \log. P_a$ oder $m = \log. P.$ (bas. a), d. h. Logarithmus der Zahl P in Beziehung auf den Grundfactor a, und aus ihr folgt unmittelbar die Gleichung $a^m = P$.

§. 75. Rangoperationen. Die im Vorhergehenden aus dem Begriffe einer wiederholten Multiplication entwickelten Ausdrücke

$$\text{I. } a^n = P; \quad \text{II. } \sqrt[n]{P} = a; \quad \text{III. } n = \log. P_a$$

enthalten die allgemeinen Andeutungen der, auf der Vorstellung eines verschiedenen Ranges der Zahlen beruhenden Operationen, nämlich der Potenzen-, Wurzeln- und Logarithmen-Rechnung, die man im Gegensatz der vier Grundoperationen, denen die Vorstellung von durchaus gleichartigen Einheiten zum Grunde liegt, mit dem gemeinsamen Namen Rangoperationen belegen kann. Die im Folgenden enthaltene ausführliche Betrachtung derselben hat die Anwendung des Begriffs von Potenz und Wurzel auf die Zifferrechnung, so wie die Verbindung, Umgestaltung und vermöge specieller Zahlenwerthe verschiedenartige Bedeutung der Ausdrücke I., II., III. zu verfolgen.

Erstes Capitel.

Die Zahlensysteme.

§. 76. Einheiten des höheren Ranges. Wenn man, von der Einheit ausgehend, bis zu einer beliebigen Zahl a fortschreitet und mit dieser das unmittelbare Zählen beendigt, um eine solche Abtheilung von a Einheiten wiederum amal zu setzen und dieses Verfahren unbestimmt zu wiederholen, so wird die Zahl a zur Grundzahl eines Zahlensystems. Die Abtheilungen, zu denen man auf diesem Wege gelangt, d. h. die wachsenden Potenzen

$$1.a, \quad 1.a.a, \quad 1.a.a.a, \quad 1.a.a.a.a, \quad 1.a.a.a.a.a, \ldots$$
$$\text{oder } a, \quad a^2, \quad a^3, \quad a^4, \quad a^5, \ldots$$

können im Gegensatz zur ursprünglichen Einheit, von welcher man ausging, höhere Einheiten oder Einheiten höheren Ranges genannt werden, während man 1 als von gar keinem Range (vom Range 0) anzusehen und in der vorstehenden Reihe der Potenzen durch a^0 anzudeuten hat, indem dieser Ausdruck (nach §. 72.) angiebt, daß der Factor a keinmal zur Einheit gesetzt werden solle. Die getroffene Wahl der Grundzahl bestimmt jedesmal das ganze Zahlensystem: denn es liegt in dem Begriff eines solchen, daß alle höhere Einheiten aus den nächstvorgehenden sich auf die

nämliche Weise bilden, wie die Grundzahl aus der ursprünglichen Einheit entstand. So erhält man als solche nach dem Schema: a, a^2, a^3, a^4 .... für das

dyadische System	....	2,	4,	8,	16 ...
triadische "	....	3,	9,	27,	81 ...
tedradische "	....	4,	16,	64,	256 ...
pentadische "	....	5,	25,	125,	625 ...
hexadische "	....	6,	36,	216,	1296 ...
heptadische "	....	7,	49,	343,	2401 ...
oktadische "	....	8,	64,	512,	4096 ...
enneadische "	....	9,	81,	729,	6561 ...
dekadische "	....	10,	100,	1000,	10000 ...

Die im dekadischen Zahlensysteme gebräuchliche Art, die höheren Einheiten mit einer durch Nullen immer weiter vorgeschobenen 1 anzudeuten, so daß man ihren Rang aus der Anzahl der angehängten Nullen erkenne, müßte auch in jedem andern Systeme angewendet werden, wenn man vermöge eines solchen wirklich rechnen wollte, weil diese ausdrucksvolle Art der Bezeichnung allein geeignet ist, die Behandlung der ursprünglichen Einheit auf ein (in's Unendliche fortschreitendes) Vielfaches derselben auszudehnen. Demnach bedeuten die Zeichen 10, 100, 1000 ... in den verschiedenen Zahlensystemen, je nachdem ihre Grundzahl zwei, drei u. s. w. ist, die oben dekadisch bemerkten verschiedenen Werthe, und müssen, so lange nicht etwa eine bestimmte Grundzahl (z. B. zehn) vorausgesetzt wird, als die völlig allgemeine Andeutung der höheren Einheiten irgend eines beliebigen Zahlensystems gelten. Man hat sie daher nicht als Zehn, Hundert, Tausend u. s. w., sondern unbestimmt als Einheiten vom 1sten, 2ten, 3ten .... Range auszusprechen.

Anmerkung. Da (nach §. 12.) $\overset{k}{10} . \overset{m}{10} = \overset{k+m}{10}$, also das Product zwei höherer Einheiten des Ranges k und m eine Einheit vom Range (k + m) ist, so ergiebt sich die Anzahl der Nullen, welche es enthält, indem man die seiner Factoren addirt.

§. 77. Zifferbezeichnung der Zahlen. Bei jeder höheren wird, wie bei der ursprünglichen Einheit, ein mehrmaliges Vorkommen immer durch die entsprechende Ziffer angedeutet und deren Rang durch die Menge der nachfolgenden Stellen bestimmt. So ist

$10000 + 1000 + 100 + 10 + 1$ sechsmal genommen

$= 60000 + 6000 + 600 + 60 + 6$, und da die Nullen nur den Mangel anderer Ziffern und den Rang zu bezeichnen dienen, so kann man diese verschiedenen Glieder bequemer in ein einziges $= 66666$ zusammenziehen, wie auch umgekehrt die Zahl 66666 in jene einzelnen Glieder wieder zerlegen. Auf gleiche Weise ist

$754362 = 7 . 10^5 + 5 . 10^4 + 4 . 10^3 + 3 . 10^2 + 6 . 10 + 2 . 1$
und allgemeiner eine aus beliebigen Ziffern gebildete Zahl

$$abc\ldots def = a . 10^n + b . 10^{n-1} + c . 10^{n-2} \ldots + d . 10^2 + e . 10 + f 1$$

zu setzen.

Der Rang jeder einzelnen Ziffer erscheint demnach von der Stelle abhängig, welche sie unter den sämmtlichen, eine Zahl bildenden, Ziffern einnimmt. Auf diese Weise sind wir im Stande, mit einer geringen Menge derselben jede beliebige Zahl darzustellen, indem deren Werth zugleich von der Stellung und dem Inhalte ihrer Ziffern bestimmt wird.

§. 78. **Rang der Zahlen.** Ueber den Rang einer vielzifferigen Zahl entscheidet stets die erste ihrer Ziffern; die Zahl 9405127 z. B. ist vom sechsten Range, weil die Anfangsziffer es ist, und die Gränzen, zwischen denen sie liegt, sind 10^6 und 10^7. Allgemein ist eine Zahl vom nten Range $=$ oder $> 10^n$, aber $< 10^{n+1}$.

Sollen zwei Zahlen A und B vom Range α und β (wobei $\alpha > \beta$ vorausgesetzt wird) d. h. zwei Zahlen, von denen

I. $A =$ oder $> 10^\alpha$, aber $< 10^{\alpha+1}$ und

II. $B =$ oder $> 10^\beta$, aber $< 10^{\beta+1}$ ist,

durch irgend eine der Grundoperationen verbunden werden, so läßt sich der Rang des Resultats durch folgende allgemeine Lehrsätze im Voraus bestimmen, bei denen indeß die Voraussetzung gemacht ist, daß die Grundzahl 10 größer als zwei sei.

1. Der Rang der Summe $A + B$ ist mindestens dem des höhern Summanden gleich, höchstens um 1 höher.

   Denn da $A + B > 10^\alpha$, aber $< 2 . 10^{\alpha+1}$ sein muß, so folgt, daß der Rang der Summe $= \alpha$ oder $\alpha + 1$ wird.

2. Der Rang der Differenz $R = A - B$ ist höchstens dem des Minuends gleich, übrigens aber ganz unbestimmt.

   Denn setzt man die Differenzform $A - B = R$ in die Summenform $A = B + R$ um, so ist (nach 1) der Rang α von A dem des höheren Summanden gleich oder noch um 1 höher. Folglich kann der Rang von R nicht höher als $= \alpha$ sein, wohl aber unbestimmt niedriger, sofern $B > R$ ist.

3. Der Rang des Products $A \times B$ ist mindestens die Summe der Rangzeiger beider Factoren, höchstens aber um 1 höher.

   Denn da $A \times B =$ oder $> 10^{\alpha+\beta}$, aber $< 10^{\alpha+\beta+2}$, so folgt, daß der Rang des Products $= \alpha + \beta$ oder aber $= \alpha + \beta + 1$ sein muß.

4. Der Rang des Quotienten $Q = A:B$ ist höchstens der Differenz der Rangzeiger vom Dividend und Divisor gleich, mindestens um 1 niedriger.

Denn wird die Quotientenform $Q = A:B$ in die Form des Products $A = B \times Q$ umgesetzt, so ist (nach 3) der Rang α von A entweder der Summe derer von B und Q gleich, oder noch um 1 höher. Folglich muß der Rang von Q entweder $= \alpha - \beta$ oder $= \alpha - \beta - 1$ sein.

§. 79. Verbindung der Zahlen. Bei der Verbindung mehrer nach einem bestimmten Zahlensysteme bezeichneter Zahlen, die (nach §. 77.) als Polynome ihrer, mit den Potenzen der Grundzahl versehenen, Ziffern zu betrachten sind, gelten nothwendig die für die Grundoperationen mit Polynomen gegebenen allgemeinen Vorschriften (§§. 44—49.), so weit dieselben auf die hier vorausgesetzte besondere Zahlform anwendbar sind, also namentlich ohne Rücksicht auf eine entgegengesetzte Bezeichnung der Glieder, welche hier ganz fehlt. In Rücksicht auf jene allgemeinen Vorschriften und die vereinfachende Darstellung von Zahlen durch neben einander gestellte Ziffern muß die sorgfältigste Rücksicht auf den Rang dieser einzelnen Ziffern genommen, nur das Gleichnamige (von gleichem Range) vereinigt, und dasjenige, was den Inhalt irgend einer höheren Einheit überschreitet, jedesmal auf die nächstfolgende höhere Einheit übertragen werden. Diese allgemeine (aus practischen Rechnungen hinlänglich bekannte) Regel gehört, als wesentlich verbunden mit der Ziffernbezeichnung, jedem Zahlensysteme ohne Ausnahme an, und mag hier für verschiedene derselben bei einzelnen Beispielen der vier Grundoperationen in Anwendung gebracht werden.

I. Addition. Man vereinige folgende, nach dem pentadischen Systeme gebildete, Zahlen:

Summanden	3 4 1 2
	2 0 3 4
	1 4 2 3
Summe	1 2 4 2 4.

Um die Richtigkeit des Resultats zu prüfen, bestimme man für jede einzelne Ziffer, was sie in unserem dekadischen Zahlensysteme bedeutet, und summire dann die Werthe. Hier ist:

$2 = 2$ Dek.	$4 = 4$ Dek.	$3. = 3$ Dek.
$1.5 = 5$ =	$3.5 = 15$ =	$2.5 = 10$ =
$4.5^2 = 100$ =	$0.5^2 = 00$ =	$4.5^2 = 100$ =
$3.5^3 = 375$ =	$2.5^3 = 250$ =	$1.5^3 = 125$ =
$3412 = 482$ Dek.	$2034 = 269$ Dek.	$1423 = 238$ Dek.

$4 = 4$ Dek.
$2.5 = 10$ =
$4.5^2 = 100$ =
$2.5^3 = 250$ =
$1.5^4 = 625$ =
$12424 = 989 = (482 + 269 + 238).$

Aufg. 1, 2. §. 86.

II. Subtraction. Wenn bei dem Abziehen gleichnamiger Ziffern der Subtrahend den Minuend übersteigt, so ist man genöthigt, der nächsten Ziffer vom höhern Range eine Einheit zu entziehen, und diese in niedrigere zu zerlegen. Folgende Zahlen aus dem tedradischen Systeme mögen als Beispiel dienen.

Min. $= 301203$
Subtr. $= 232312$
Diff. $= 2231$

Hier ist:	$3 = 3$ Dek.	$2 = 2$ Dek.
	$0.4 = 0$ =	$1.4 = 4$ =
	$2.4^2 = 32$ =	$3.4^2 = 48$ =
	$1.4^3 = 64$ =	$2.4^3 = 128$ =
	$0.4^4 = 0$ =	$3.4^4 = 768$ =
	$3.4^5 = 3072$ =	$2.4^5 = 2048$ =
Min.	$301203 = 3171$ Dk.	Subtr. $232312 = 2998$ Dek.

$1 = 1$ Dek.
$3.4 = 12$ =
$2.4^2 = 32$ =
$2.4^3 = 118$ =
Diff. $2231 = 173 = (3171 - 2998)$

Aufg. 3, 4, §. 86.

III. Multiplication. Bei der Erzeugung eines Products aus mehrziffrigen Factoren beginnt man mit den niedrigsten Stellen jeden Ueberschuß über die Einheitsmenge der Grundzahl der nächsthöheren Stelle hinzufügend und die gleichnamigen Ziffern der Partialproducte genau untereinander stellend, um sie zum Gesammtproducte zu summiren, wie folgendes Beispiel aus dem hexadischen Systeme zeigt.

	Multiplicand	532
	Multiplicator	243
Partialproduct		2440
		3412
		1504
Product	=	231400.

2	= 2 Dek.		3	= 3 Dek.	
$3 . 6$	= 18	"	$4 . 6$	= 24	"
$5 . 6^2$	= 180	"	$2 . 6^2$	= 72	"
Multipld. 532	= 200.		Multiplicator 243	= 99.	

0	= 0	Dek.
$0 . 6$	= 0	"
$4 . 6^2$	= 144	"
$1 . 6^3$	= 216	"
$3 . 6^4$	= 3888	"
$2 . 6^5$	= 15552	"

Product 231400 = 19800 = (200 . 99).

Aufg. 5, 6, §. 86.

IV. Division. Bei der Vergleichung von Dividend und Divisor beginnt man mit derjenigen der höchsten Stellen, um den Quotienten allmählig von seiner höchsten bis zur niedrigsten Ziffer zu erhalten, indem zu den Resten der höheren Einheiten stets eine folgende niedrigere Stelle gezogen und die Vergleichung immer von Neuem angestellt wird, bis der Divisor nicht ein einziges Mal mehr im Dividend enthalten ist. Hier ein Beispiel aus dem heptadischen Systeme:

```
Dividend. 3365241 | 354 Divisor.
          3153    | 6402 Quotient.
          ----
           2122
           2112
           ----
             1041
             1041
             ----
               0.
```

4	= 4 Dek.		2	= 2 Dek.	
$5 . 7$	= 35	"	$0 . 7$	= 0	"
$3 . 7^2$	= 147	"	$4 . 7^2$	= 196	"
			$6 . 7^3$	= 2058	"
Divis. 354	= 186.		Quot. 6402	= 2256.	

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \text{ Dek.} \\
4 \,.\, 7 &= 28 \text{ „} \\
2 \,.\, 7^2 &= 98 \text{ „} \\
5 \,.\, 7^3 &= 1715 \text{ „} \\
6 \,.\, 7^4 &= 14406 \text{ „} \\
3 \,.\, 7^5 &= 50421 \text{ „} \\
3 \,.\, 7^6 &= 352947 \text{ „} \\
\hline
\text{Divid. } 3365241 &= 419616 = (186 \,.\, 2256.)
\end{aligned}
$$

Aufg. 7, 8, §. 86.

§. 80. Einheiten niedern Ranges. Das Bildungsgesetz, nach welchem höhere Einheiten eines Zahlensystems aus den vorangehenden sich dadurch entwickeln, daß man diese mit der Grundzahl multiplicirt, erlaubt ebenfalls ein Zurückschreiten durch Division mit der Grundzahl, wodurch wir zu Einheiten eines niederen Ranges, als der ursprünglich gedachten, nämlich zu ächten Brüchen gelangen, deren Nenner Potenzen der Grundzahl sind. Die allgemeine Reihe der höhern und niedern Einheiten hat also für alle Zahlensysteme die Form:

$$. \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, 1000, \; 100, \; 10, \; 1, \; \frac{1}{10}, \; \frac{1}{100}, \; \frac{1}{1000} \, . \, . \, . \, . \, . \, .$$

oder, wenn man durch vorgesetzte Nullen den jedesmaligen niedern Rang der Ziffer 1 bezeichnen will:

$$. \, . \, . \, . \, . \, . \, 1000, \; 100, \; 10, \; 1, \; 01, \; 001, \; 0001 \, . \, . \, . \, . \, . \, .$$

und diese Reihe dehnt sich steigend und abnehmend in's Unendliche, d. h. bis zu jeder beliebigen höhern oder niedern Einheit aus. In gleichem Abstande von der 1 nach beiden Seiten erscheinen die Glieder der Reihe als entgegengesetzte Factoren, so daß das Product zweier gleichweit abstehender Zahlen immer $= 1$ ist. Betrachtet man nun in dem allgemeinen Ausdrucke $10^k \,.\, 10^n = 10^{k+n}$ den Rangzeiger k als den der höhern und n als den der niedern Einheit, so muß für den Fall $10^k \,.\, 10^n = 10^0$ der Rangzeiger n nothwendig $= -k$, also eine negative Zahl sein. Die den höheren Einheiten vom Range 1, 2, 3....n entgegengesetzten niedern Einheiten sind demnach vom Range $-1, -2, -3, \ldots n$, d. h. durch $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ u. s. w. anzudeuten.

Anmerkung. Werden zwei beliebige Glieder der unbegränzten Reihe positiver und negativer Zahlen

$$+n \ldots\ldots +4, +3, +2, +1, +0, -1, -2, -3, -4 \ldots\ldots -n$$

mit einander als Rangzeiger verglichen, so ist, ganz abgesehen von der Einheitsmenge, welche beide ausdrücken, die ihrer Stellung nach vorangehende Zahl stets die höhere, die spätere hingegen die niedrigere, z. B. $+1$ höher, als -4; -10 niedriger, als -3. Will man diese Rangbeziehung zweier Zahlen durch ein einfaches Zeichen bemerklich machen, so ist statt der Andeutung $+1 > -4$; $-10 < -3$, welche hier offenbar unrichtig sein würde, eine andere, der neuen Vor-

stellung eigenthümliche, z. B. das Zeichen $\rtimes$ zu wählen, so daß die obigen Fälle kürzer durch $+1 \rtimes -4$; $-10 \ltimes 3$ zu bezeichnen sein würden.

§. 81. Decimalbrüche. Wenn wir im dekadischen Zahlensysteme jedes Mehrfache der ursprünglichen Einheit nach der Grundzahl Zehn ordnen, bezeichnen und aussprechen, so erscheint es durchaus angemessen, auch die Theilung der Einheit nach dieser Grundzahl vorzunehmen und den Werth einer Zahl, die weniger als Eins beträgt, in Decimaltheilen, Zehn-, Hundert-, Tausendtheilen u. s. f. (z. B. den vierten Theil eines Ganzen durch $\frac{25}{100}$) anzugeben. Eine solche, nach den Potenzen der Grundzahl Zehn fortgesetzte Theilung (die Decimaltheilung) hat in Absicht auf Bequemlichkeit der Rechnung vor jeder andern (z. B. der Duodecimaltheilung) bedeutende Vorzüge, weil die Bezeichnungsart des Systems, wonach die Stelle den Rang andeutet, zehntheilige oder Decimalbrüche ohne ihre Nenner zu schreiben und mit ihnen eben so, wie mit ganzen Zahlen zu rechnen erlaubt.

Um nämlich eine aus ganzen Einheiten und Decimaltheilen bestehende Zahl auf die einfachste Weise zu bezeichnen, darf man nur der Zähler der, nach ihrem abnehmenden Range geordneten, zehntheiligen Brüche zusammenstellen und als Theile der Einheit von den Ganzen durch ein Comma oder einen Punkt absondern. So ist z. B.

$$24 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{7}{10000} = 24{,}3267.$$

Sind nur Decimaltheile, keine ganze Einheiten, vorhanden, so muß der Mangel derselben durch eine, dem Trennungszeichen vorgesetzte, Null angedeutet werden, wie in

$$\frac{5}{10} + \frac{4}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{9}{100000} = 0{,}50479.$$

Jenes Zeichen giebt mithin den Rang einer jeden einzelnen Ziffer des Decimalbruches an, der in demselben Maße höher oder niedriger sein wird, als die Ziffer nach der linken oder rechten Seite von den Einern entfernt steht.

Hieraus folgt, daß Alles von der Stelle des Comma's und seiner Versetzung, aber nichts von einer Hinzufügung von Nullen für den Werth des Decimalbruchs abhängt, und daß jene allein hinreicht, ihn durch höhere Einheiten zu multipliciren oder zu dividiren. Denn es ist $0{,}52 = 0{,}520 = 0{,}5200$ u. s. w., da die Nenner hier gleichmäßig mit dem Zähler wachsen; aber 05,2 und 0,052, durch die Stellung des Comma's verschieden von 0,52 bedeutet das Zehnfache und den zehnten Theil des Decimalbruches. Die hinter dem Comma folgenden Ziffern begreift man unter dem Namen Decimalstellen. Ihre Anzahl bestimmt jedesmal den zugehörigen Nenner des De-

cimalbruchs, weil derselbe eben so viele der 1 angehängte Nullen enthalten muß.

§. 82. Verbindung der Decimalbrüche. Die Rechnung mit Decimalbrüchen beruht nach allem Vorhergehenden auf denselben Gründen, wie diejenige mit ganzen Zahlen, und fordert daher nur dieselbe Rücksicht auf den Rang der einzelnen Ziffern, der durch ihre Stellen gegeben ist. Zusammenziehung des Gleichnamigen und Uebertragung dessen, was das Zehnfache jeder Einheit erreicht, auf die nächsthöhere Stelle, sind wiederum die allgemeinen Vorschriften, nach denen hier die Grundoperationen ausgeführt werden müssen.

I. Addition. Um Decimalbrüche zu addiren, hat man dieselben mit dem Comma senkrecht unter einander zu stellen, weil dadurch sämmtliche gleichnamige Decimalstellen so zu stehen kommen, daß sie leicht zu vereinigen sind. So findet man zum Beispiel aus den

$$\text{Summanden}\left\{\begin{array}{r} 16{,}703402.\\ 0{,}6763.\\ 4{,}1005376 \\ \hline \end{array}\right.$$
$$\text{die Summe } 21{,}4802396$$

Aufg. 9—12, §. 86.

II. Subtraction. Die nämliche Vorschrift ist zu befolgen, wenn Decimalbrüche subtrahirt werden sollen, wobei indessen statt einer Uebertragung von höheren Einheiten vielmehr eine Entziehung derselben von den nächsthöheren Ziffern des Minuends nothwendig wird, sofern die Ziffer des Subtrahends die größere ist. So ist z. B., wenn

$$\begin{array}{rl} \text{der Minuend} & = 3{,}450680521 \\ \text{der Subtrah.} & = 1{,}68129773025 \\ \hline \text{die Differenz} & = 1{,}76938279075. \end{array}$$

Aufg. 13—16, §. 86.

III. Multiplication. Da bei der Multiplication von Brüchen (nach §. 27.) das Product der Zähler den Zähler, das der Nenner den Nenner des ebenfalls gebrochenen Products giebt, so multiplicirt man Decimalbrüche ohne Rücksicht auf das Comma, schneidet aber im Producte so viele Decimalstellen von der Rechten zur Linken ab, als die Summe der in den Factoren enthaltenen beträgt, und ergänzt etwa mangelnde Stellen durch Nullen. So findet man z. B., wenn

$$\begin{array}{rl} \text{der Multiplicand} & = 0{,}00056 \\ \text{der Multiplicator} & = 0{,}137 \\ \hline \text{das Product} & = 0{,}00007672. \end{array}$$

Die Menge der Decimalstellen in jedem Factor bestimmt nämlich den zugehörigen Nenner als eine 1 mit eben so vielen angehängten Nullen, und das Product der Nenner enthält (nach §.

76, Anm.) so viele Nullen, als jene zusammengenommen. Dieses tritt am deutlichsten hervor, wenn man die Decimalbrüche in gewöhnlicher Bruchform ausdrückt, wie in folgendem Beispiele:

$$0{,}12 \times 0{,}6 \times 2{,}814 \times 0{,}0002 = 0{,}0000405216.$$

d. i. $\frac{12}{100} \times \frac{6}{10} \times \frac{2814}{1000} \times \frac{2}{10000} = \frac{405216}{10000000000}$.

Aufg. 17—20, §. 86.

IV. Division. Da die Summe der Decimalstellen in den Factoren deren Anzahl im Product bestimmt, so folgt umgekehrt für die Division der Decimalbrüche, daß man hier die Anzahl der Decimalstellen im Divisor (dem einen Factor) von derjenigen im Dividend (dem Producte) abziehen müsse, um die Menge der im Quotienten (dem andern Factor) enthaltenen zu gewinnen. Sollte der Divisor mehr Decimalstellen, als der Dividend enthalten, so müßte man dieser Vorschrift gemäß die dem letzten fehlende Anzahl von Decimalstellen (also — k subtrahiren, d. h. (nach §. 35.) dem Quotienten eben so viele Nullen hinzufügen. Am deutlichsten erscheint aber die Division der Decimalbrüche, wenn man Divisor und Dividend durch Anhängung von Nullen zuvor gleichnamig macht. So ist z. B.

$$(1)\quad \frac{0{,}738}{0{,}06} = \frac{0{,}738}{0{,}060} = 12{,}3.$$

$$(2)\quad \frac{0{,}144}{0{,}00024} = \frac{0{,}14400}{0{,}00024} = 600.$$

Aufg. 21—23, §. 86.

§. 83. Periode eines Decimalbruchs. Wenn bei der Division zweier Zahlen ein Rest bleibt, so kann man sie noch weiter treiben, indem man fortgesetzt Nullen anhängt, um neue Decimalstellen zu erhalten, die den Quotienten immer genauer angeben. Ist der Dividend nun wirklich ein Zehntheilig-Vielfaches des Divisors (d. h. eine durch Multiplication desselben mit Ganzen und Decimaltheilen zu bildende Zahl), so wird sich dieses durch Erschöpfung desselben ausweisen; im entgegengesetzten Falle kann aber die Division nie ein Ende erreichen, sondern muß willkürlich abgebrochen werden, wenn man den Quotienten für den Zweck der Rechnung hinlänglich genau bestimmt hat. Dabei ist zu bemerken, daß, wenn eine Ziffer als Rest bleibt, die bereits als solcher vorgekommen, dieselben Decimalstellen im Quotienten wiederkehren müssen, deren Inbegriff man die Periode eines solchen unvollständigen Decimalbruchs nennt. Beispiele finden wir in folgender ausgeführten Division der Quotienten 731 : 8 und 354 : 7.

(1) 731 | 8
72 | 91,375
11
8
30
24
60
56
40
40
0.

(2) 354 | 7
35 | 50, 571428 . . . .
40
35
50
49
10
7
30
28
20
14
60
56
4.

§. 84. **Verwandlung in Decimalbrüche.** Jede gebrochene Zahl läßt sich in der Gestalt eines Decimalbruchs darstellen, wenn man sie nur durch dieselbe höhere Einheit zugleich im Zähler und Nenner multiplicirt. Denn alsdann kann die Division des Zählers durch den einen Factor des Nenners zuerst vollzogen und der andere Factor des Quotienten als Nenner untergesetzt werden. So ist:

$$\frac{3}{4} = \frac{3\,.\,100}{4\,.\,100} \frac{\left(\frac{300}{4}\right)}{100} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

$$\frac{7}{800} = \frac{7\ \ .\,100000}{800\,.\,100000} = \frac{\left(\frac{700000}{800}\right)}{100000} = \frac{875}{100000} = 0{,}00875.$$

Für die Rechnung ist es bequemer, statt der, hier zur Erklärung des Verfahrens angewendeten Umformung des Bruchs, seinem Zähler (und dessen Resten) die erforderlichen Nullen einzeln anzuhängen, während man mit dem Nenner dividirt, wie solches im §. 83. ausgeführt ist. Aber nicht immer wird ein gegebener Bruch mit einer Potenz von 10 als Nenner oder in Form eines Decimalbruchs sich vollständig darstellen lassen, und es bleibt in solchem Falle nichts übrig, als sich mit einem Näherungswerthe zu begnügen, der jedoch bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit getrieben werden kann. Beispiele sind:

$$\frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots. \qquad \frac{3}{7} = 0{,}428571\ldots.$$

Da diese sechs Decimalziffern die Periode des Bruches $\frac{3}{7}$ bilden, so kann man denselben als Decimalbruch bis auf beliebige Theile

der Einheit genau, wenn auch nie erschöpfend, darstellen. In Tausendbillionentheilen angegeben ist er z. B.

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428.$$

Wie in dem vorstehenden Beispiele, wird die Periode eines jeden Decimalbruchs, der durch Umformung eines gewöhnlichen Bruchs entsteht, mindestens eine Ziffer weniger enthalten müssen, als der Nenner dieses Bruches Einheiten enthält, da (nach §. 83.) die Periode von der Wiederkehr eines Restes abhängt, und die verschiedenen Reste ihrer Anzahl nach mindestens um 1 geringer sein müssen, als die Menge der Einheiten im Nenner. Bezeichnet man allgemein den zur Umformung gegebenen Bruch durch $\frac{a}{n}$, so ist mithin die Anzahl der periodischen Ziffern im gleichbedeutenden Decimalbruche höchstens $= n - 1$. Aufg. 24—26, §. 86.

Wegen der Unvollständigkeit in der Darstellung der meisten gewöhnlichen Brüche durch Decimalen ist eine solche Verwandlung nicht immer, und im Allgemeinen mehr bei vorgeschriebener Addition und Subtraction, als bei Multiplication und Division anzurathen, da ohnehin jene beiden Operationen bei gewöhnlichen Brüchen in der Regel viel mühsamer, als die beiden letzten zu vollziehen sind. Um sich an einem Beispiele zu überzeugen, wie sehr die Rechnung an Leichtigkeit und Genauigkeit bei der vorläufigen Umsetzung in Decimalbrüche verlieren kann, bilde man die Producte der gleichbedeutenden Brüche:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{35} = (0{,}3333\ldots)\ (0{,}714285\ldots)\ (0{,}0857142\ldots)$$

Anmerkung. Einen gegebenen periodischen Decimalbruch in einen geschlossenen Bruch der gewöhnlichen Form umzusetzen, darf man nur beachten, daß

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots \quad \frac{1}{99} = 0{,}0101\ldots \quad \frac{1}{999} = 0{,}001001\ldots \text{ u. s. w.}$$

also z. B. $\frac{4}{9} = 0{,}4444\ldots \quad \frac{17}{99} = 0{,}1717\ldots \quad \frac{235}{999} = 0{,}235{,}235\ldots$ u. s. w.

wonach man allgemein die Periode des Decimalbruchs als Zähler zu setzen und mit einem gleichstelligen Nenner, aus Neunen gebildet, zu versehen hat.

§. 85. Abgekürzte Zifferrechnung. Da sehr häufig der Fall eintritt, daß die Zahlen, mit denen man zu rechnen hat, nicht als völlig genau, sondern nur als Näherungswerthe angesehen werden dürfen (sei es nun, daß sie als unvollständige Zahlformen, z. B. periodische Decimalbrüche, aus der Rechnung selbst hervorgegangen, oder als unsichere Angaben bei einer angestellten Messung gefunden sein mögen, so würde eine vollständige Berech-

nung mit sämmtlichen gegebenen Decimalstellen in solchen Fällen ganz zwecklos, und namentlich wenn ihre Anzahl beträchtlich ist, beim Multipliciren und Dividiren höchst weitläufig sein, ohne doch ein wahrhaft genaues Resultat zu verschaffen. Aus diesem Grunde darf man sich, um aus den gegebenen Näherungswerthen wiederum einen solchen abzuleiten, folgende Abkürzungen erlauben, die für die practische Anwendung der Zifferrechnung von Wichtigkeit sind.

1) Die Addition von Decimalbrüchen bedarf ihrer leichten Ausführbarkeit wegen wohl kaum einer Abkürzung. Soll die Summe indessen nur bis auf n Stellen angegeben werden, während die Summanden deren sehr viel mehr enthalten, so reicht es hin, bei wenigen Summanden (n + 1), bei mehren hingegen (n + 2) Stellen zu addiren. So findet man z. B. bis auf sechs Decimalstellen die Summe der Zahlen:

	4,079636	52031458
	0,634419	734001
	7,881666	552390234
	0,005432	8646
S =	12,601155	5

Wird nun aber, wie in dem vorstehenden Beispiele, die höchste der vernachlässigten Decimalstellen durch die Ziffer 5 oder eine noch größere ausgefüllt, so beträgt der Summenwerth sämmtlicher Folgestellen mehr als die Hälfte der Einheit, bis auf welche die Decimalen angegeben werden sollten. Zu genauerer Angabe des Näherungswerthes S hat man also in diesem Falle die letzte der anzugebenden Decimalziffern um 1 zu erhöhen, während man sie ungeändert läßt, wenn die erste Folgestelle eine kleinere Ziffer als 5 ist.

(2) Bei der Subtraction von Decimalbrüchen ist nur die (n + 1)te Stelle zu berücksichtigen, sofern die Differenz bis auf n Stellen angegeben werden soll. So findet man bis zu 7 Decimalstellen als Differenz der Zahlen:

	0,7304565	432850093
	0,4168228	8207631
D =	0,3136336	6.

3. Die Multiplication zweier Decimalbrüche bis auf n Decimalstellen im Producte auszuführen, hat man mit den Ganzen des Multiplicators (sofern er deren enthält) und der (n + 1)ten Stelle des Multiplicands anzufangen, den Inhalt nöthigenfalls (nach 1) zu übertragen und erst das (durch ihn vermehrte) Product aus der nten Stelle des Multiplicands wirklich anzumerken, dann aber wie gewöhnlich sämmtliche Stellen bis zur höchsten hinauf zu multipliciren. Nachdem nun die nte Decimalstelle durchgestrichen ist, wird die Multiplication so fortgesetzt, daß man die 1ste Stelle des Multiplicators mit der (n—1)ten des Multiplicands, eben

so die 2te mit der (n—2)ten u. s. f. verbindet, aber immer den Einfluß der nächstfolgenden (schon durchgestrichenen) Ziffer des Multiplicands berücksichti t. Alle auf solche Weise gebildete Partialproducte werden so unter einander gestellt, daß ihre letzten Ziffern eine **senkrechte Reihe** bilden, und dann addirt. So findet man z. B. bis auf 6 Decimalstellen das Product der Zahlen:

3,042105	821196
2,113061	28774537
6,084212	
304211	
30421	
9126	
182	
3	
P = 6,428155	

4) Die **Division** von Decimalbrüchen wird in ähnlicher Weise dadurch abgekürzt, daß man, nachdem Dividend und Divisor (nach §. 82, IV.) durch Anhängung der erforderlichen Nullen **gleichnamig** gemacht und mit den Ganzen des Quotienten der Divisor multiplicirt worden, dessen **letzte** Decimalstelle **durchstreicht**, um die nächste Multiplication durch die **zweite** Ziffer des Quotienten mit der **vorletzten** im Divisor u. s. f. vorzunehmen, wobei indessen die **Uebertragung** von Einheiten (durch Rücksicht auf die zuletzt durchgestrichene Stelle des Divisors) eben so, wie bei der Multiplication stattfindet. So erhält man z. B. als Quotienten bis auf 2 Decimalstellen für die Zahlen 16,603 und 0,738542634:

16,603000000	0,738042634
14,76085268	22,49 = Q.
1,842147320	
1,476085268	
366062052	
295217054	
70844998	

§. 86. Aufgaben.

1. Man addire 3502 + 403 + 11243 + 103, wenn 10 = 6.
2. Eben so 7367 + 50342 + 776 + 127345; wenn 10 = 8.
3. Man subtrahire 1653204 — 563206, wenn 10 = 7.
4. Eben so (7604 — 6745) — (346 — 288), wenn 10 = 9.
5. Man multiplicire 14302 × 2041, wenn 10 = 5.
6. Eben so 1202112 × 1222, wenn 10 = 3.
7. Man dividire 1333600 : 1250, wenn 10 = 7.
8. Eben so 1122320102 : 1213, wenn 10 = 4.
9. Man addire die Decimalbrüche 0,6153 + 0,739 + 0,41109.

10. Eben so 4,50071 + 11,063 + 0,9876 + 1,22908 + 7,00184 + 0,67733452 + 0,00321 + 0,7.
11. Eben so 0,00672 + 3,4067 + 19,99 + 5,3000047.
12. Eben so 127,631 + 11,4 + 7,906 + 6 + 13,04053.
13. Man subtrahire 5,23564301 — 4,346759.
14. Eben so (3,74630 — 1,98752) — 0,5427801.
15. Eben so (5,6243 — 3,209197) — 0,000999.
16. Eben so (94,7 — 8,000683) — (18,74 — 11,39648).
17. Man multiplicire 3,49175 × 4,5006.
18. Eben so 0,000000345 × 3765,00031.
19. Eben so 6,0052 × 3,050207 × 0,0008.
20. Eben so 33,041 × 10,0021 × 0,000091.
21. Man dividire 72000 : 0,05 und 720000 : 0,005.
22. Eben so 17,409117 : 4,378 und 17409,117 : 43,78.
23. Eben so 426,240711284 : 32,76859.
24. Man verwandle $\frac{34}{125}$ in einen Decimalbruch.
25. Eben so die Brüche $\frac{3}{80}, \frac{3}{128}, \frac{17}{40}, \frac{13}{32}$.
26. Eben so $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$.
27. Man multiplicire abgekürzt 3,7603542 × 2,31504 auf 5 Dec.
28. Eben so 12,004326 × 4,63302 × 0,00324.
29. Man dividire abgekürzt 10,30765421 : 6,216537 auf 4 Dec.
30. Eben so der Reihe nach 2, 3, 4, 5 durch 0,004632.

Zweites Capitel.

Die Wurzel-Ausziehung.

§. 87. Quadrat. Der Umstand, daß man den Flächeninhalt eines Quadrats berechnet, indem man die Zahl für das Längenmaß seiner Seite mit sich selbst multiplicirt, hat für ein aus zwei gleichen Factoren bestehendes Product ebenfalls den Namen Quadrat veranlaßt, so daß dieses Wort eine doppelte, geometrische und arithmetische, Bedeutung erhalten hat und in der letzten mit dem Ausdruck zweite Potenz einerlei ist. Dieses arithmetische Quadrat ist stets eine unbenannte Zahl, welche aus ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Zahlen entstanden sein kann, und hat in Beziehung auf diese folgende Eigenschaften:

1) Das Quadrat jeder ganzen Zahl giebt wieder eine solche, und zwar größere. Ist $a > 1$, so ist $a^2 > a$, z. B. $5 > 1$, $5.5 > 5$.

2) Das Quadrat eines Primbruchs kann nur wiederum ein solcher sein. Denn ist $\frac{a}{b}$ ein Bruch in seiner einfachsten Gestalt, so ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$ ebenfalls nicht weiter zu vereinfachen, da der Voraussetzung gemäß (nach §§. 29. und 18.) keiner der Primfactoren des Nenners unter denen des Zählers enthalten ist. So findet man z. B. $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$; $\frac{11}{8} \cdot \frac{11}{8} = \frac{121}{64}$.

Anmerkung. Der völlig strenge Beweis dieses Satzes kann erst in der höheren Zahlenlehre (im vierten Capitel des dritten Buchs) gegeben werden.

3) Das Quadrat jeder Zahl ist positiv; sie selbst sei positiv oder negativ. Denn man erhält:

1) $(+a)(+a) = +a^2$; z. B. $(+4)(+4) = +16$.

2) $(-a)(-a) = +a^2$; z. B. $(-4)(-4) = +16$.

4) Das Quadrat eines Products ist Product aus den Quadraten seiner Factoren $(ab)^2 = ab \cdot ab = a^2 b^2$, z. B. $(5 \cdot 6)^2 = 5^2 \cdot 6^2 = 900$.

§. 88. Quadrat eines Binoms. Soll eine aus mehren Theilen bestehende Zahlform zur zweiten Potenz erhoben werden, so erhält man durch die Multiplication derselben mit sich selbst ein aus mehren Partialproducten bestehendes Quadrat. Der einfachste und zugleich wichtigste Fall ist derjenige, wo die Zahlform nur aus zwei Theilen besteht, also unter der allgemeinen Form $(a + b)$ begriffen ist. Durch Quadriren eines solchen Binoms erhält man als Resultat $a^2 + 2ab + b^2$, also das Quadrat des ersten Theils, das doppelte Product beider Theile und das Quadrat des zweiten Theils. (Geometrisch kann dieser Satz versinnlicht werden durch die Verlängerung der Seite a eines gegebenen Quadrats um die Linie b und Construction eines neuen Quadrats mit der Seite $(a + b)$, welches aus den vier Flächenräumen $a^2 + ab + ab + b^2$ bestehen wird. S. Fig. 71.)

Ist der zweite Theil des Binoms negativ, dasselbe also von der allgemeinen Form $(a - b)$, so erhält man durch Multiplication $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, also ein Resultat, welches sich von dem obigen nur dadurch unterscheidet, daß hier das doppelte Product beider Theile des Binoms negativ erscheint. Wird in beiden Ausdrücken $b = 1$ gesetzt, so erhält man die Formeln:

$$\text{I.} \quad (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1;$$

$$\text{II.} \quad (a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1;$$

nach denen sich, wenn man von dem Quadrat einer gegebenen Zahl ausgeht, leicht eine auf- oder absteigende Reihe von Quadratzahlen berechnen läßt; z. B.

$$(40 + 1)^2 = 1600 + 81 = 1681$$
$$(41 + 1)^2 = 1681 + 83 = 1764$$
$$(42 + 1)^2 = 1764 + 85 = 1849$$
u. s. f.

§. 89. Quadrat eines Polynoms. Die Form des Quadrats einer vieltheiligen Zahl $(a + b + c + d + e + \text{etc.})^2$ läßt sich auf die des Binoms zurückführen, wenn man die oben stehende Quadratformel $a^2 + 2ab + b^2$ wiederholt anwendet, und zwar kann dieses auf zweierlei Weise geschehen:

I. Man setze den Inbegrifff aller Glieder nach dem ersten, $(b + c + d + e + \text{etc.}) = B$, ferner $(c + d + e + \text{etc.}) = C$, u. s. w. Dann ist

$$(a + b + c + d + e)^2 = (a + B)^2 = a^2 + 2aB + B^2$$
$$B^2 = (b + c + d + e)^2 = (b + C)^2 = b^2 + 2bC + C^2$$
$$C^2 = (c + d + e)^2 = (c + D)^2 = c^2 + 2cD + D^2$$
$$D^2 = (d + e)^2 = (d + e)^2 = d^2 + 2de + e^2$$

Also $(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 +$
$2\,(aB + bC + cD + de)$

d. h. das Quadrat eines Polynoms besteht aus den Quadraten seiner einzelnen Theile und dem doppelten Product eines jeden derselben in der Summe aller nachfolgenden.

II. Man wende die Formel des Binoms anfangs nur auf die beiden ersten Theile des Polynoms an, und dadurch, daß man jeden folgenden als zweiten Theil betrachtet, auch allmählig auf alle übrigen, indem man den Inbegriff aller vorhergehenden durch ein einfaches Zeichen, $a + b$ durch B, $a + b + c$ durch C u. s. w. andeutet. Dann ist:

$$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$B + c$ — $B^2 + 2Bc + c^2$

$C + d$ — $C^2 + 2Cd + d^2$

$D + e$ — $D^2 + 2De + e^2$.

§. 90. Quadrat dekadischer Zahlen. Da jede Zahl unsers dekadischen Systems als besonderer Fall des Polynoms $(a + b + c + d + \text{etc.})$ betrachtet werden kann, sofern man (nach §. 77.) unter diesen Buchstaben Ziffern von verschiedenem Range versteht, so werden die vorstehenden allgemeinen Regeln für die Quadrirung zwei= und mehrtheiliger Zahlformen auf solche Zahlen geradezu anwendbar sein. Da aber jede einzelne Ziffer ihre Bedeutung nicht nur durch die Menge ihrer Einheiten, sondern auch ihre, den Rang bestimmende Stelle erhält, so muß bei der Erhebung zur zweiten Potenz auch auf ihre Stellung die gebührende Rücksicht genommen werden. Sollte z. B. das Quadrat der Zahl

37695 nach der zweiten der obigen beiden Methoden gebildet werden, so wäre hier

$a = 30000,\ b = 7000,\ c = 600,\ d = 90,\ e = 5,$ und

$$
\begin{array}{lrr}
(30000 + 7000 + 600 + 90 + 5)^2 & = 30000^2 = & 900000000 \\
\underbrace{a + b} & 2.\ 30000.\ 7000 = & 420000000 \\
 & 7000^2 = & 49000000 \\
\hline
37000 + 600 & 2.\ 37000\ .\ 600 = & 44400000 \\
\underbrace{B + c} & 600^2 = & 360000 \\
\hline
37600 + 90 & 2.\ 37600\ .\ 90 = & 6768000 \\
\underbrace{C + d} & 90^2 = & 8100 \\
\hline
37690 + 5 & 2.\ 37690\ .\ 5 = & 376900 \\
\underbrace{D + e} & 5^2 = & 25 \\
\hline
37695 & & 1420913025
\end{array}
$$

§. 91. Rang der Quadratzahlen. Sollen zwei Zahlen vom Range n und p mit einander multiplicirt werden, so ist, nach (§. 78, L. 3.) das Product vom Range $(n + p)$ oder $(n + p + 1)$; das Quadrat einer Zahl vom $n$ten Range ist also als Product zweier Zahlen vom Range n mindestens vom Range $2n$, höchstens vom Range $2n + 1$.

Ist ferner eine gegebene Zahl $(a + b + c + d + \text{etc.})$, folglich ihre erste Ziffer a, vom Range n, so ist der Rang von $b = n - 1$, von $c = n - 2$ u. s. w., folglich derjenige von $a\,.\,b$ um 1 niedriger, als von a^2, von b^2 wieder um 1 niedriger, als von $a\,.\,b$ u. s. f., so daß man die Zahlenwerthe dieser Producte ihrer Rangverschiedenheit wegen, allmählig immer um eine Stelle weiter hinausrücken muß, wenn die gleichnamigen Ziffern unter einander zu stehen kommen sollen. Nach dieser Bemerkung konnte die Entwickelung der zweiten Potenz (im §. 90.) ohne Hinzufügung von Nullen einfacher auf diese Art vorgenommen werden.

$$
\begin{array}{lrl}
(3\quad 7\quad 6\quad 9\quad 5)^2 = & 3^2 = & 9 \\
a + b + c + d + e & 2\,.\,3\,.\,7 = & 42 \\
 & 7^2 = & 49 \\
\hline
\underbrace{37 + 6} & 2\,.\,37\,.\,6 = & 444 \\
B + c & 6^2 = & 36 \\
\hline
\underbrace{376 + 9} & 2\,.\,376\,.\,9 = & 6768 \\
C + d & 9^2 = & 81 \\
\hline
\underbrace{3769 + 5} & 2\,.\,3769\,.\,5 = & 37690 \\
D + e & 5^2 = & 25 \\
\hline
37695 & & 1420913025
\end{array}
$$

Aufg. 1. u. 2., §. 104.

§. 92. Quadratwurzel. Ist umgekehrt eine Zahl gegeben, die man als Quadrat einer andern unbekannten betrachten soll, so kann man vermittelst derselben Formel des Binoms, deren man sich bei der Zusammensetzung bediente, auch die Auflösung oder Wurzel-Ausziehung vornehmen. Ist nun die Zahl vom Range $2n$ oder $2n + 1$, so kann die Wurzel (nach §. 91.) nur vom Range n sein, oder sie enthält nie mehr, als die Hälfte der Ziffern, und weil bei der Bildung der zweiten Potenz die Quadrate der Einer stets weniger als 100, die der Zehner stets weniger als 10000, die der Hunderte weniger als 1000000 u. s. w. betragen, so darf man die Ziffern der gegebenen Quadratzahl nur von zweien zu zweien, d. i. nach den Potenzen 10^2, 10^4, 10^6 u. s. w. abtheilen, um im Voraus die Stellen für a^2, b^2, c^2 u. s. w. zu bezeichnen, wenn man die noch unbekannten Ziffern der Wurzel ihrer Reihenfolge nach durch a, b, c u. s. w. andeutet. Ist die erste Wurzelziffer a versuchsweise bestimmt worden, indem man für die erste Abtheilung der Quadratzahl das unmittelbar kleinere a^2 aus der Reihe der Quadrate von 1 bis 9, d. i. aus 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 sucht, so wird die Vergleichung von $2a$ mit dem Rest und der zweiten Abtheilung zur Entdeckung von b, und nachdem man $2ab + b^2$ davon abgezogen hat, die Wiederholung des nämlichen Verfahrens mit 2B, 2C u. s. w. allmählig zur Bestimmung der Ziffern c, d u. s. f. führen. Als Beispiel diene die Ausziehung der Wurzel aus der oben berechneten Quadratzahl.

```
                 √ 14|20|91|30|25 | 3 7 6 9 5
                a² = 9            | a b c d e
2a = 6)             520
              2ab = 42
               b² =  49
                    469
2B = 74)             5191
            2Bc =    444
             c² =     36
                     4476
2C = 752)             71530
           2Cd =      6768
            d² =        81
                      67761
2D = 7538)            376925
           2De =      37690
            e² =         25
                      376925
                           0
```

Die Wurzel-Ausziehung wird indessen dadurch einer bedeutenden Abkürzung fähig, daß man ihr statt der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ die gleichbedeutende $a^2 + (2a + b)b$ zum Grunde legt, worin die beiden letzten Glieder der ersten zu *einem* zusammengezogen sind. Ihrer Andeutung zufolge darf man nur den Ziffern $2a$ die neue, durch Vergleichung gefundene, Ziffer b unmittelbar beifügen, da sie dem Range nach um 1 geringer ist, und die aus $2a$ und b gebildete Zahl durch b multipliciren, wodurch die Ausziehung der Quadratwurzel zu einem ziemlich einfachen Rechnungsverfahren und dem der Division ähnlich wird. Man erkennt dies leicht aus nachstehender Behandlung des oben gegebenen Beispiels:

```
              √ 14|20|91|30|25| 37695
                 9            |
      6) 7       520
                 469
     74) 6        5191
                  4476
    752) 9         71530
                   67761
   7538) 5         376925
                   376925
```

S. Aufg. 3, 4, §. 104.

Anmerkung. Das im Vorhergehenden bezeichnete (erste) Verfahren der Ausziehung der Quadratwurzel aus dekadischen Zahlen ist augenscheinlich von dem Inhalte der Grundzahl *Zehn* völlig unabhängig und muß deshalb nicht nur für ein jedes *beliebige Zahlensystem*, sondern auch ganz allgemein für eine vielgliedrige *Buchstabenform*, welche Quadrat einer andern ist, anwendbar bleiben. Die einzelnen Schritte einer solchen Wurzel-Ausziehung aus *Buchstaben-Ausdrücken* beruhen durchaus auf den Regeln der §§. 44—49. Aufg. 11—14, §. 104.

§. 93. *Irrationale Quadratwurzeln.* Daß aus der Möglichkeit einer *vollkommenen Zusammensetzung* nicht immer die einer gleichen *Auflösung* folge, wovon uns bereits Multiplication und Division (§. 13. Anm.) ein Beispiel gegeben haben, erkennt man wiederum bei der Bildung und Auflösung der zweiten Potenz. Jene ist nach einer der oben vorgeschriebenen allmähligen Erzeugungsarten oder auch durch unmittelbares Multipliciren der gegebenen Wurzel mit sich selbst immer auszuführen: die *Zerlegung* einer ganzen Zahl in zwei gleiche Factoren oder die Ausziehung der Quadratwurzel wird sich nur dann vollständig leisten lassen, wenn diese eine wirkliche *Quadratzahl* aus der Reihe 1, 4, 9, 16, 25 . . u. s. w. ist, weil sonst ihre Wurzel nicht in der natürlichen Reihe der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. vorkommt. Daß aber ein unächter Bruch

$\left(a+\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{am+n}{m}\right)$ nie eine vollständige Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl sein kann, ergiebt sich daraus, daß das Quadrat desselben, sofern er (als Primbruch) auf seine einfachste Gestalt reducirt worden ist (nach §. 87, 2), nothwendig wieder ein Primbruch wird. Nichtsdestoweniger wird man durch Fortsetzung des oben angewendeten Verfahrens im Stande sein, die Wurzel näherungsweise aus jeder Zahl zu ziehen, auch wenn diese keine reine Quadratzahl ist, indem man nur fortlaufend zwei Nullen an die sich ergebenden Reste hängt, um nach den Einern der Wurzel auch Zehn-, Hundert-, Tausend-Theile u. s. w. zu bestimmen, wie in folgendem Beispiele:

	$\sqrt{1,53}$	1,23693
	1	
2) 2	53	
	44	
24) 3	900	
	729	
246) 6	17100	
	14796	
2472) 9	230400	
	222561	
24738) 3	783900	
	742149	
	41751.	

Der Umstand, daß die Rechnung in solchen Fällen nie zu geschlossenen Werthen für die Wurzel führen kann, hat zu der Benennung Irrationalzahlen für dieselben Anlaß gegeben. Diese können ihrer Natur nach, wie man sieht, nie vollständig, aber doch bis zu jeder gegebenen Gränze der Einheitstheilung genau dargestellt werden, sofern man nur die Operation der Wurzel-Ausziehung hinlänglich weit fortsetzt. Aufg. 7, 8, §. 104.

§. 94. Quadratwurzel aus Brüchen. Da die zweite Potenz eines Bruches (nach §. 87, 2.) aus dem Quadrat des Zählers dividirt durch das Quadrat des Nenners besteht, so erhält man die Wurzel eines, als Quadratzahl betrachteten, Bruches, indem aus seinem Zähler und Nenner abgesondert die Quadratwurzeln gezogen werden. Jedoch erscheint dieses Verfahren nur dann zweckmäßig, wenn man mit reinen Quadratzahlen zu thun hat, da sonst Zähler und Nenner der Wurzel beide Irrationalzahlen sein würden. Im letzten Falle ist es vortheilhaft, den Bruch (nach §. 84. in einen Decimalbruch zu verwandeln, um dann auf die obige Weise die Operation vorzunehmen, wobei man auf die etwanige Verbindung des Bruches mit einer ganzen Zahl gehörige Rücksicht nehmen, und die vorläufige Ein-

theilung in Ziffernpaare stets bei den Einern anfangen muß. Beispiele sind:

$$\sqrt{\frac{39}{81}} = \frac{7}{9}; \quad \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{2,6457}{2} = 1,3228 \ldots;$$

$$\sqrt{8\frac{15}{49}} = \frac{\sqrt{407}}{7} = 2,88203 \ldots; \quad \sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{0,875}$$

$$\sqrt{0,8757} = 0,9354 \ldots; \quad \sqrt{9\frac{2}{3}} = \sqrt{9,66 \ldots} = 3,0983 \ldots$$

Aufg. 5, 6; 9, 10; §. 104.

*Abgekürzte Berechnung. Sei eine Zahl, woraus die Quadratwurzel gezogen werden soll, näherungsweise bis auf 2n Decimalstellen angegeben, so läßt die Wurzel sich bis auf eben so viele Decimalstellen genau bestimmen, indem man nur die erste Hälfte derselben nach dem obigen Verfahren, die zweite hingegen durch einfache Division des Restes mit dem Doppelten des schon gefundenen Theils der Wurzel aufsucht.

Bezeichnet man nämlich diesen bis auf n Decimalen berechneten ersten Theil der Wurzel mit k und den Inbegriff der übrigen noch unbekannten n Decimalstellen mit z, so ist der Nenner von $k = 10^n$, also $z < \frac{1}{10^n}$ und deshalb in dem Ausdrucke der gegebenen Zahl

$$(k + z)^2 = k^2 + 2kz + z^2$$

das Endglied $z^2 < \frac{1}{10^{2n}}$. Da nun aber nur 2n Decimalstellen gegeben sein sollen, denen der Nenner 10^{2n} zugehört, so ist der Werth von z^2, welcher erst in spätern Stellen erscheinen könnte, als Null zu betrachten. Der nach geschehener Berechnung von k^2 gebliebene Rest r ist also nicht $= 2kz + z^2$, sondern kürzer $= 2kz$ zu setzen, woraus sich $z = \frac{r}{2k}$ ergiebt; d. h. die letzte Hälfte der Decimalen findet man, indem man mit dem Doppelten des schon berechneten Theils der Wurzel den Rest dividirt. Es ist übrigens einleuchtend, daß dieses abkürzende Verfahren seine volle Gültigkeit auch dann behält, wenn die gegebene Zahl weniger als 2n Decimalstellen (oder auch gar keine) hat.

Anmerkung. Weil das Quadrat einer negativen sowohl, als einer positiven Zahl jederzeit positiv ist, so wird man, wenn nicht anderweitige Umstände uns davon belehren, über das Zeichen der Wurzel im Allgemeinen ungewiß bleiben und deshalb z. B. $\sqrt{16} = \pm 4$. d. h. $+ 4$ oder $- 4$ setzen müssen, aus negativen Zahlen aber gar nicht im Stande sein, die Quadratwurzel zu ziehen, weil sich in der That keine wirkliche Zahl, positiv oder negativ, denken läßt, woraus z. B. $- 16$ durch Erhebung zur zweiten Potenz entstanden sein könnte. Da aber die

Rechnung zu solchen, wenn gleich nicht auszuführenden Andeutungen einer Wurzel-Ausziehung gar wohl führen kann und ihre allgemeinen, auf Zahlformen aller Art anwendbaren Operationen auch diese Zahlensymbole nicht ausschließen dürfen, so werden dieselben keineswegs von den Betrachtungen der Arithmetik verworfen, sondern durch Trennung in einen reellen und unmöglichen Factor, z. B. der Zahlenandeutung $\sqrt{-16}$ oder $\sqrt{-1.16}$ in $\sqrt{16}.\sqrt{-1}$ oder $4\sqrt{-1}$, unter dem Namen imaginärer oder unmöglicher Größen bei spätern Untersuchungen häufig in Betracht gezogen.

§. 95. **Cubus.** Da man die dritte Potenz einer Zahl dann erhält, wenn man aus einer gemessenen Seite den körperlichen Inhalts eines Würfels (Cubus) bestimmen will, insofern man nur Höhe mit Länge und Breite zu multipliciren braucht, so hat man überhaupt jedem, aus drei gleichen Factoren bestehenden Zahlenproducte ($a.a.a = a^3$) den Namen Cubus beigelegt. Es gelten von demselben folgende allgemeine Sätze:

1) Der Cubus einer ganzen Zahl ist wieder eine solche, und zwar größere. Ist $a > 1$, so ist $a^3 > a$, z. B. $6 > 1$; $6.6.6 > 6$.

2) Als Cubus eines Primbruchs erhält man durch Cubiren des Zählers und des Nenners (aus den nämlichen Gründen, wie in §. 87, 2.) wiederum einen solchen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}, \text{ z. B. } \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}.$$

3) Der Cubus einer positiven Zahl ist positiv, der einer negativen ebenfalls negativ: $a.a.a = +a^3$ und $(-a)(-a)(-a) = -a^3$; z. B. $(+4)^3 = +64$ und $(-4)^3 = -64$.

4) Der Cubus eines Products ist Product aus denen seiner Factoren $(a.b)^3 = ababab = a^3.b^3$, z. B. $(3.4)^3 = 3^3.4^3 = 1728$.

§. 96. **Cubus eines Binoms.** Die dritte Potenz von $(a+b)$, welche durch zweimalige Multiplication gefunden wird, ist $a^3 + 2a^2b + 3ab^2 + b^3$, besteht also aus dem Cubus jedes Theils und dem dreifachen Producte seines Quadrats in die erste Potenz des andern. (Zur geometrischen Versinnlichung dient die Construction eines Würfels, dessen Seite a um die Linie b verlängert wird, wodurch drei Parallelepipeda des Inhalts $a^2.b$, drei andere des Inhalts $a.b^2$ und ein Cubus, dessen Seite b ist, zu dem gegebenen Cubus a^3 hinzukommen.) Ist der zweite Theil des Binoms hingegen negativ, so findet man durch Erhebung desselben zur zweiten Potenz abwechselnde Vorzeichen in den Gliedern der Entwickelung, welche übrigens mit denen der vorstehenden Formel übereinstimmen:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Wird in diesen Ausdrücken $b = 1$ gesetzt, so erhält man die zur Berechnung einer Reihe von Cubikzahlen anwendbaren Formeln:

$$\text{I.}\quad (a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$$
$$\text{II.}\quad (a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1.$$

z. B. $(20+1)^3 = 8000 + 1200 + 60 + 1 = 9261$
$(21+1)^3 = 9261 + 1323 + 63 + 1 = 10648$
$(22+1)^3 = 10648 + 1452 + 66 + 1 = 12167$ u. s. f.

§. 97. Cubus eines Polynoms. Jede vieltheilige Zahlform von der Gestalt $(a + b + c + d + e + \text{etc.})$ kann durch wiederholte Anwendung dieser Binomialformel auf zweierlei Art zur dritten Potenz erhoben werden.

I. Man bezeichne alle nachfolgenden Glieder mit einfachen Zeichen, setze also $b + c + d + e = B$, $c + d + e = C$ u. s. w., so ist

$$\begin{aligned}
(a+b+c+d+e)^3 &= (a+B)^3 = a^3 + 3a^2B + 3aB^2 + B^3\\
B^3 = (b+c+d+e)^3 &= (b+C)^3 = b^3 + 3b^2C + 3bC^2 + C^3\\
C^3 = (c+d+e)^3 &= (c+D)^3 = c^3 + 3c^2D + 3cD^2 + D^3\\
D^3 = (d+e)^3 &= (d+e)^3 = d^3 + 3d^2e + 2de^2 + e^3\\
\hline
(a+b+c+d+e)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + 3\,(a^2B + b^2C + c^2D + d^2e) + 3\,(aB^2 + bC^2 + cD^2 + de^2)
\end{aligned}$$

Also besteht der Cubus eines Polynoms aus denen der einzelnen Theile, den dreifachen Producten ihrer Quadrate mit der Summe der nachfolgenden Theile und endlich den dreifachen Producten aller einzelnen Theile mit dem Quadrate der Summe ihrer nachfolgenden Theile.

II. Auch kann man anfänglich nur auf die ersten beiden Theile die Formel anwenden, dann diese in ein einfaches Glied zusammenziehen, und so fortfahren, indem man stets die Summe der vorangehenden Glieder als ein einfaches darstellt:

$$(\underbrace{\underbrace{\underbrace{a + b}_{B} + c}_{C} + d}_{D} + e)^3 = \underbrace{\underbrace{\underbrace{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}_{B^3 + 3B^2c + \text{etc.}}}_{C^3 + \text{etc.}}}_{D^3 + \text{etc.}}$$

§. 98. Cubus dekadischer Zahlen. Soll eine Zahl des dekadischen Systems zur dritten Potenz erhoben werden, so kann man diese Operation nach der zweiten der vorbemerkten Methoden eben so vornehmen, wie bei der Erhebung der zweiten Potenz die Quadratformel fortgesetzt angewendet wurde, indem man stets auf den Rang der einzelnen Ziffern die gehörige Rücksicht nimmt. Sei 135 die gegebene Zahl, so ist

$(100 + 30 + 5)^3$	$= 100^3$	$=$	1000000
$a + b + c$	$3 . 100^2 . 30$	$=$	900000
	$3 . 100 . 30^2$	$=$	270000
	30^3	$=$	27000
$130 + 5$	$3 . 130^2 . 5$	$=$	253500
$B + c$	$3 . 130 . 5^2$	$=$	9750
	5^3	$=$	125
			2460375

§. 99. Rang der Cubikzahlen. Da jede Zahl zwischen zwei benachbarten Potenzen von 10 allgemein zwischen 10^n und 10^{n+1} liegt, so ist ihr Cubus zwischen den dritten Potenzen von 10^n und 10^{n+1}, d. h. zwischen 10^{3n} und 10^{3n+3} enthalten, muß also wenigstens vom Range $3n$ sein und kann nie den Rang $(3n + 3)$, sondern höchstens $(3n + 2)$ erreichen. Da ferner die Ziffern a, b, c u. s. w. in ihrem Range stets um 1 verschieden sind, so werden bei der Cubirung der Reihe $(a + b + c + d + \text{etc.})^3$ die Partialproducte a^3, a^2b, ab^2 u. s. f. ebenfalls um 1 im Range abnehmen, und das vorstehende Zahlenbeispiel ist einfacher ausgeführt:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 3 . 1^2 . 3 &= 9 \\ 3 . 1 . 3^2 &= 27 \\ 3^3 &= 27 \\ \hline 3 . 13^2 . 5 &= 2535 \\ 3 . 13 . 5^2 &= 975 \\ 5^3 &= 125 \\ \hline & \quad 2460375. \end{aligned}$$

S. Aufg. 15 u. 16, §. 104.

§. 100. Cubikwurzel. Den im Vorhergehenden bezeichneten Weg der Bildung verfolgt man rückwärts, um zur Auflösung der dritten Potenz, d. h. zur Zerlegung einer Zahl in drei gleiche Factoren, oder zur Ausziehung der Cubikwurzel zu gelangen. Ist die Zahl vom Range $3n$, $3n + 1$, oder $3n + 2$, so muß die Cubikwurzel (nach §. 99.) vom Range n sein, oder sie enthält nie mehr, als den dritten Theil ihrer Ziffern, und weil die Werthe a^3, b^3, c^3 u. s. w. stets um 3 im Range verschieden sind oder drei Stellen nach einander folgen, so theilt man die gegebene Cubikzahl in Classen von 3 zu 3 Ziffern, bei den Einern anfangend. Die erste Wurzelziffer kann nur dadurch gefunden werden, daß man aus der Reihe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d. h.	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

denjenigen Cubus nimmt, welcher der ersten Ziffernabtheilung am nächsten kommt, während b durch Vergleichung des Products $3a^2$ mit dem Anfange des Restes gewonnen wird. Die Ziffern a und b

zusammengenommen $= B$ setzend, dessen Cubus bereits nach und nach durch die einzelnen Glieder von $(a + b)^3$ berechnet worden ist, findet man auf dem nämlichen Wege c, eben so d, e u. s. w. Als Beispiel der Wurzel-Ausziehung wählen wir die oben berechnete Cubikzahl:

$$\begin{array}{rcl}
 & & \sqrt[3]{2|460|375} = 135 \\
a^3 & = & 1 \qquad\qquad\quad a\ b\ c \\
 & & \overline{1460} \\
3a^2b & = & 9 \\
3ab^2 & = & 27 \\
b^3 & = & \underline{27} \\
 & & 1197 \\
3B^2 = 507) & & \overline{263375} \\
3B^2c & = & 2535 \\
3Bc^2 & = & 975 \\
c^3 & = & \underline{125} \\
 & & \underline{263375} \\
 & & 0.
\end{array}$$

S. Aufg. 17 u. 18, §, 104.

§. 101. Irrationale Cubikwurzel. Da man in der Regel nur bei absichtlicher Wahl berechneter Zahlen, wie in vorstehendem Beispiele, eine reine Cubikzahl erhalten wird, allgemein hingegen solche Zahlen vorkommen, die nicht durch Multiplication drei gleicher Factoren gebildet worden, so darf man nur in seltenen Fällen eine geschlossene Cubikwurzel erwarten. Fällt die Zahl zwischen die benachbarten ganzen Zahlen a und $a + 1$, so ist sie von der Form $\left(a + \frac{n}{m}\right) = \frac{am + n}{m}$ und darf als Primbruch, d. h. auf die einfachste Bruchform reducirt, angesehen werden. Da nun aber (nach §. 95, 2) durch Cubirung eines Primbruchs wiederum ein solcher, folglich keine ganze Zahl, entsteht, so kann ein unächter Bruch nie die geschlossene Cubikwurzel einer ganzen Zahl, sondern nur deren Näherungswerth sein. Einen solchen, bis zu jeder beliebigen Decimalstelle der Einheit berechneten Näherungswerth oder eine irrationale Cubikwurzel erhält man durch beliebig weit fortgesetzte Wurzelausziehung nach der Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, indem man nur an die Reste drei Nullen hängt, um nach und nach die Zehn-, Hundert-, Tausend-Theile u. s. w. zu bestimmen, wie in folgendem Beispiele:

$$\sqrt[3]{12} = 2{,}289$$

$$\begin{array}{lrl}
 & a^3 = & 8 \quad a, b c d \\
\hline
3a^2 = 12) & & 4000 \\
 & 3a^2b = & 24 \\
 & 3ab^2 = & 24 \\
 & b^3 = & 8 \\
\hline
 & & 2648 \\
3B^2 = 1452) & & 1352000 \\
 & 3B^2c = & 11616 \\
 & 3Bc^2 = & 4224 \\
 & c^3 = & 512 \\
\hline
 & & 1204352 \\
3C^2 = 155952 & & 147648000 \\
 & 3C^2d = & 1403568 \\
 & 3Cd^2 = & 55404 \\
 & d^3 = & 729 \\
\hline
 & & 140911569
\end{array}$$

§. 102. **Cubikwurzel aus Brüchen.** So wie man, um die dritte Potenz eines Bruches zu bilden, Zähler und Nenner zum Cubus erhebt, muß umgekehrt aus jedem besonders die Wurzel gezogen werden, wenn die Cubikwurzel des Bruches gefordert wird. Da aber in der Regel weder Zähler noch Nenner *reine* Cubikzahlen sein werden und man also einen aus Irrationalzahlen bestehenden Bruch als Wurzel erhalten würde, so erscheint es zweckmäßiger, die gegebene Zahl in der Gestalt eines Decimalbruches zu schreiben und dann nach Anleitung des Vorhergehenden die Cubikwurzel bis zu einer beliebigen Decimalstelle zu berechnen. Hiebei muß die Eintheilung zu drei und drei Ziffern von dem Comma ausgehen, welches Ganze und Decimaltheile trennt. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{687}{8000000}} = \frac{\sqrt[3]{687}}{200} = \frac{8{,}82373}{200} = 0{,}0441186\ ..;$$

$$\sqrt[3]{\frac{12167}{884736}} = \frac{23}{96};\quad \sqrt[3]{465\frac{31}{64}} = \frac{\sqrt[3]{29791}}{4} = \frac{31}{4};$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{0{,}833\ ..} = 0{,}\ 94103\ ....;$$

$$\sqrt[3]{15\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{15{,}6666\ .} = 2{,}0222\ ...$$ Aufg. 19—22, §. 104.

Anmerkung 1. Die nämlichen Regeln, wie für die Ausziehung der Cubikwurzel aus bestimmten dekadischen Zahlen, gelten ebenfalls für die allgemeineren Ausdrücke in Buchstaben. S. Aufg. 23—25, §. 104.

Anmerkung 2. Da jede positive Zahl eine positive, jede negative eine negative Cubikzahl giebt, so ist die Cubikwurzel stets einstimmig mit der gegebenen Zahl, z. B.

$$\sqrt[3]{729} = +9 \text{ und } \sqrt[3]{-512} = -8.$$

§. 103. Wurzel-Ausziehung überhaupt. Auf dem nämlichen Wege, welcher im Vorhergehenden eingeschlagen worden, um nach vorheriger Bildung der zweiten oder dritten Potenz die Quadrat- oder Cubikwurzel einer gegebenen Zahl zu finden, wird man ebenfalls Wurzeln höherer Grade zu berechnen im Stande sein. Die dazu nöthigen Formeln aber, und aus diesem Grunde die Berechnung selbst, werden unvermeidlich in demselben Maße weitläufiger ausfallen, je höher der Grad der geforderten Wurzel-Ausziehung ist. So würde man z. B. zur Ausziehung der 5ten Wurzel die Entwickelung von $(a+b)^5$, d. i.

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$$

zur Ausziehung der 7ten Wurzel die Entwickelung von $(a+b)^7$:

$$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

zum Grunde legen müssen. Die gesteigerte Schwierigkeit und Weitläufigkeit einer solchen Wurzel-Ausziehung läßt sich aber leicht aus einer Vergleichung der Cubik- und Quadratwurzel-Ausziehung beurtheilen. Glücklicherweise kann man eine solche ursprüngliche Berechnung der Wurzeln durch Anwendung eines höchst sinnreichen arithmetischen Hülfsmittels umgehen, welches auf dem erweiterten Begriffe der Potenz beruht. Es sind dieses die Logarithmen, von denen in einem der folgenden Capitel ausführlich die Rede sein wird. Indessen ist zu bemerken, daß Wurzeln, deren Grad ein Product der Zahlen 2 und 3, z. B. $=4, 6, 8, 9, 12 \ldots$ ist, durch wiederholte Anwendung der Quadrat- und Cubikwurzel-Ausziehung zu berechnen sind, da man

$$\sqrt[4]{a^4} = \sqrt{\sqrt{a^4}} = \sqrt{a} = a$$

$$\sqrt[6]{a^6} = \sqrt[3]{\sqrt{a^6}} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

u. s. f. setzen darf, indem nach diesen Andeutungen die vorgeschriebene Zerlegung in gleiche Factoren allmählig statt mit einem Male vorgenommen wird. Aufg. 27—30, §. 104.

§. 104. Aufgaben.

1. Das Quadrat der Zahl 540321 (nach §. 91.) zu bilden.
2. Eben so das Quadrat der Zahlen 36842 und 4047032.
3. Die Quadratwurzel aus 78011249 zu ziehen.
4. Eben so $\sqrt{166423202500}$ und $\sqrt{2328676}$.
5. Eben so $\sqrt{860{,}8356}$ und $\sqrt{7027{,}301241}$.

6. Eben so $\sqrt{0,4137443}$ und $\sqrt{0,00734621}$.
7. Eben so $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ bis auf Tausend-Theile.
8. Eben so $\sqrt{20}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{50}$ bis auf Zehntausend-Theile.
9. Eben so $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{5}}$, $\sqrt{\frac{1}{6}}$, $\sqrt{\frac{1}{7}}$, $\sqrt{\frac{1}{8}}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$.
10. Eben so $\sqrt{3\frac{4}{9}}$, $\sqrt{6\frac{3}{8}}$, $\sqrt{10\frac{6}{7}}$, $\sqrt{122,666\ldots}$
11. Die Quadratwurzel von $(a^6 + 6a^3b^8 + 9b^{16})$ zu finden.
12. Eben so $\sqrt{(k^4 - k^3z + \frac{1}{4}k^2z^2)}$ und $\sqrt{(9p^2 - 5pq + \frac{25}{36}q^2)}$.
13. Eben so $\sqrt{(9a^2 - 30ma - 3m^2a + 25m^2 + 5m^3 + \frac{1}{4}m^4)}$.
14. Eben so $\sqrt{\left(\frac{a^2 - 14ab + 49b^2}{x^4 + 4x^2y + 4y^2}\right)}$ und $\sqrt{\left(\frac{16 - 8z^5 + z^{10}}{9 - 42z^4 + 49z^8}\right)}$
15. Den Cubus der Zahl 3072 (nach §. 99.) zu bilden.
16. Eben so den Cubus der Zahlen 11423 und 700635.
17. Die Cubikwurzel aus 97336000 zu ziehen.
18. Eben so $\sqrt[3]{9528128}$ und $\sqrt[3]{74088}$.
19. Eben so $\sqrt[3]{8108,486729}$ und $\sqrt[3]{7880,599}$.
20. Eben so $\sqrt[3]{854,670349}$ und $\sqrt[3]{510,082399}$.
21. Eben so $\sqrt[3]{0,03476}$ und $\sqrt[3]{1,00100309}$.
22. Eben so $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ bis auf Hundert-Theile.
23. Die Cubikwurzel von $(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$ zu finden.
24. Eben so $\sqrt[3]{(27x^3 - 135x^2 + 225x - 125)}$.
25. Eben so $\sqrt[3]{(8x^6 + 48zx^5 + 60z^2x^4 - 80z^3x^3 - 80z^4x^2 + 108z^5x - 27z^6)}$.
26. Die 6te Wurzel aus 22345,54239 zu ziehen.
27. Eben so $\sqrt[6]{504321,2366}$.
28. Eben so $\sqrt[8]{1164532,07234}$.
29. Eben so $\sqrt[9]{233416517309451}$.
30. Eben so $\sqrt[12]{282429536481}$.

Drittes Capitel.

Die quadratischen Gleichungen.

§. 105. **Form und Umbildung quadratischer Gleichungen.** Die verschiedenen Formen, unter denen eine quadratische Gleichung, d. h. (nach §. 58.) eine solche, welche die zweite Potenz der unbekannten Zahl enthält, gegeben sein mag, lassen sich immer auf eine der beiden folgenden

$$\text{I. } Ax^2+Bx+C=0 \text{ oder II. } Ax^2+C=0.$$

zurückführen, indem man die allgemeine Regeln für die Umformung von Gleichungen (§. 55.) auf sie in Anwendung bringt, wodurch alle Divisoren hinweggeschafft und die Glieder dergestalt vereinigt werden können, daß die x^2, und eben so die x enthaltenden zusammengezogen, und die übrigen von x freien Glieder ebenfalls in einer Summe vereinigt werden. Man hat demnach im Allgemeinen unter A, B, C unbestimmte und jedes beliebigen Werthes fähige (ganze oder gebrochene, positive oder negative) Zahlen sich vorzustellen, die aus der Verbindung anderer hervorgegangen sein mögen. So entsteht z. B. aus der Gleichung

$$(1)\ \frac{4}{5x}=\frac{7}{3x-2}+1.$$

durch Umformung der Ausdruck $12x-8=35x+15x^2-10x$, oder zusammengezogen:

$$15x^2+13x+8=0.$$

Eben so folgt aus

$$(2)\ \frac{16-x}{3(x+7)}=\frac{10x+8}{20-3x}-\frac{4}{5}$$

durch Umgestaltung die Gleichung

$$5(16-x)(20-3x)=3(x+7).5(10x+8)-4(20-3x).3(x+7),$$

oder entwickelt und zusammengezogen:

$$171x^2+1522x-2440=0.$$

Zu einer quadratischen Gleichung der Form II. führt die Umgestaltung von

$$(3)\ \frac{7}{x-4}=\frac{2}{x+8}+\frac{6}{x-8},$$

woraus $7(x^2-64)=2(x^2-12x+32)+6(x^2+4x-32)$ und abgekürzt $x^2+320=0$ hervorgeht. S. Aufg. 1—4, §. 113.

Anmerkung. Die letzte der hier betrachteten Formen, welche die Unbekannte nur in der *zweiten* Potenz enthält, nachdem die Gleichung geordnet worden, pflegt durch die Benennung einer *reinen* quadratischen Gleichung von der ersten allgemeinen Form unterschieden zu werden. Man darf sie als einen speciellen Fall derselben betrachten, insofern der

unbestimmte Coefficient B des zweiten Gliedes jener Form durch Vereinigung entgegengesetzter Zahlenglieder $= 0$ geworden sein kann, wie das dritte der obigen Beispiele dieses wirklich zeigt.

§. 106. * **Bildung quadratischer Gleichungen.** Wird das Zeichen x als Andeutung zwei verschiedener, bestimmter Zahlen angesehen, so daß x entweder a oder b bedeute, so lassen sich die einfachen Gleichungen

$$x - a = 0 \text{ und } x - b = 0,$$

welche jene Werthe von x darstellen, durch Multiplication zu der neuen quadratischen Gleichung

$$(1)\ x^2 - (a + b)\, x + ab = 0$$

verbinden. Setzt man in dieser einen der beiden Werthe a oder b an die Stelle von x, so erhält man die identischen Gleichungen

$$(1)\ a^2 - (a + b)\, a + ab = 0$$

$$(2)\ b^2 - (a + b)\, b + ab = 0$$

und darf demnach a und b, als Zahlenwerthe der Unbekannten, welche der in (1) aufgestellten Bedingung Genüge leisten, die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung nennen.

Wird $b = a$ angenommen, so erhält die Gleichung (1) die specielle Form

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

d. i. $(x - a)(x - a) = 0$, wo beide Wurzeln einander gleich sind. Setzt man aber $b = -a$, also $x = +a$ und $x = -a$, oder $x - a = 0$ und $x + a = 0$, so entsteht durch Multiplication dieser einfachen Gleichungen eine quadratische von der reinen Form

$$(II)\ x^2 - a^2 = 0,$$

deren Wurzeln dem Inhalte nach einander gleich, in Hinsicht ihrer Bezeichnung aber einander entgegengesetzt sind.

Wird nun eine gegebene quadratische Gleichung der allgemeinen Form $Ax^2 + Bx + C = 0$ durch den Coefficienten von x^2 in ihren sämmtlichen Gliedern dividirt und in der einfacheren Gestalt

$$x^2 + Px + Q = 0$$

ausgedrückt, um mit der oben gebildeten Gleichung (1) verglichen zu werden, so darf man, ihre noch unbekannten Wurzeln durch a und b bezeichnend,

(1) den Coefficienten von x, d. h. $P = -(a + b)$

(2) das von x freie Glied, d. h. $Q = +ab$

setzen. Hieraus ergeben sich folgende Sätze über die Wurzeln einer quadratischen Gleichung der allgemeinen Form

$$x^2 + Px + Q = 0:$$

1) der Coefficient des zweiten Gliedes ist die Summe beider Wurzeln mit entgegengesetztem Zeichen;
2) das dritte Glied ist das Product beider Wurzeln.

Ist die gegebene Gleichung von der reinen quadratischen Form $Ax^2+C=0$, woraus durch Division mit A die einfachere $x^2+Q=0$ folgt, so hat man das dieser Form fehlende Glied Px als durch seinen Coefficienten annullirt anzusehen, also in der allgemeineren Form $P=0$, d. h. $a+b=0$, also $b=-a$ zu setzen. Zu dem Ergebniß, daß beide Wurzeln der reinen quadratischen Gleichung $x^2+Q=0$ nur dem Zeichen nach verschieden, dem Inhalt nach aber einander gleich sind, führt übrigens auch ihre unmittelbare Vergleichung mit der, oben durch Multiplication von $x-a=0$ und $x+a=0$ gefundenen, Form $x^2-a^2=0$, indem man $Q=a^2$, also $a=\sqrt{Q}$, d. i. $=+\sqrt{Q}$ oder $-\sqrt{Q}$ setzt.

§. 107. ° Bestimmung der Wurzeln. Die im Vorstehenden für die Coefficienten einer quadratischen Gleichung der allgemeinen Form $x^2+Px+Q=0$ gefundenen Ausdrücke:

$$(1)\ P=-(a+b) \quad (2)\ Q=+ab.$$

geben von einander unabhängige Beziehungen zwischen den bekannten Zahlen P, Q und den noch unbekannten beiden Wurzeln a, b an, wonach diese weiter zu bestimmen sind. Wären nun die Gleichungen für P und Q (wie sie scheinen) wirklich beide vom ersten Grade, so würde die Bestimmung der Unbekannten a und b sich in der That (nach §. 61.) ausführen lassen. Man findet aber, wenn man aus (1) den Werth von a oder von b, d. i. $a=-b-P$ oder $b=-a-P$ in (2) substituirt, die Ausdrücke

$$Q=-b^2-bP \text{ oder } Q=-a^2-aP,$$

also wiederum in Bezug auf jede der Unbekannten a, b eine quadratische Gleichung, die mit der zur Auflösung gegebenen $x^2+Px+Q=0$, identisch ist, sofern man a oder b für x substituirt. Der Grund dieses vergeblichen Versuchs der Auflösung liegt darin, daß (2) keine Gleichung des ersten, sondern eine solche des zweiten Grades ist, da sie das Product der beiden Unbekannten enthält (s. §. 110.), mithin die Behandlung einfacher Gleichungen im vorliegenden Falle gar nicht anwendbar ist. Dagegen werden sich die Werthe von a und b aus den Gleichungen (1) und (2) durch P und Q ausdrücken lassen, wenn man die (im §. 89. entwickelten) beiden Formeln

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ und } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

zu Hülfe nimmt. Ihnen zufolge ist nämlich

$$1)\ P^2 \quad =a^2+2ab+b^2$$
$$2)\ -4Q= \quad -4ab$$

$$\text{also } 3)\ P^2-4Q=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$\text{oder } 4)\ a-b=\sqrt{(P^2-4Q)}$$
$$\text{und da } a+b=-P$$

$$\text{so folgt I. } a=-\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2-4Q)}.$$
$$\text{II. } b=-\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2-4Q)}.$$

Nach diesen Formeln findet man z. B. für die quadratische Gleichung

$$3x^2 - 24x + 45 = 0 \text{ oder } x^2 - 8x + 15 = 0$$

die Wurzeln

$$\text{I. } a = +4 + \tfrac{1}{2}\sqrt{(64-60)} = 5.$$
$$\text{II. } b = +4 - \tfrac{1}{2}\sqrt{(64-60)} = 3.$$

§. 108. Auflösung durch Ergänzung. Auf dem einfachsten Wege gelangt man zu den Ausdrücken für die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$, indem man ihr die Form $x^2 + Px = -Q$ ertheilt und die vordere Seite dieser Gleichung als unvollständige Entwickelung des Ausdrucks

$$(x + \tfrac{1}{2}P)^2 = x^2 + Px + \tfrac{1}{4}P^2$$

betrachtet. Es ist nämlich jenes Binom zum vollständigen Quadrat von $(x + \frac{1}{2}P)$ leicht dadurch zu ergänzen, daß man auf beiden Seiten ten der Gleichung das Quadrat des halben Coefficienten von x addirt. Aus der dadurch gewonnenen neuen Form der gegebenen Gleichung:

$$x^2 + Px + \tfrac{1}{4}P^2 = \tfrac{1}{4}P^2 - Q$$

ergiebt sich unmittelbar durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x + \tfrac{1}{2}P = \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)},$$

aus welcher man, da die Quadratwurzel einer jeden positiven Zahl (nach §. 95.) sowohl negativ, als positiv sein kann, die beiden Werthe

$$\text{I. } x_1 = -\tfrac{1}{2}P + \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}$$
$$\text{II. } x_2 = -\tfrac{1}{2}P - \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}$$

erhält, welche mit den oben abgeleiteten Werthen der Wurzeln (a und b) nach einiger Umgestaltung völlig zusammenfallen. Die dem Zeichen der Unbekannten angehängten Ziffern 1 und 2 sollen ausdrücklich den Umstand hervorheben, daß das x der gegebenen Gleichung im Allgemeinen zwei ganz verschiedene Werthe, aber immer nur einen von beiden besitze, also entweder x_1, oder x_2 sei. Das hier bezeichnete Verfahren hat den Vorzug, daß es für die Auflösung der quadratischen Gleichung sich immer ursprünglich anwenden läßt, ohne daß man eine allgemeine Formel zum Grunde zu legen hätte. So findet man z. B. als Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - \frac{11}{3}x + 2 = 0 \text{ oder } x^2 - \frac{11}{3}x = -2,$$

durch Ergänzung zum Quadrat umgeformt in

$$x^2 - \frac{11}{3}x + \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{121}{36} - 2.$$

nach Ausziehung der Quadratwurzel

$$\text{I. } x_1 = \frac{11}{6} + \sqrt{\left(\frac{121}{36} - 2\right)} = \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = 3.$$

$$\text{II. } x^2 = \frac{11}{6} - \sqrt{\left(\frac{121}{36} - 2\right)} = \frac{11}{6} - \frac{7}{6} = \frac{2}{3}.$$

S. Aufg. 5—16, §. 113.

Eben so anwendbar als für numerische erscheint diese Auflösungsmethode für **Buchstabengleichungen**. Sei z. B. die gegebene Gleichung

$$acx^2 + bcx - adx - bd = 0$$

$$\text{oder } x^2 + \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)x = \frac{bd}{ac},$$

$$\text{also } x^2 + \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)x + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)^2 + \frac{bd}{ac},$$

$$\text{so ist } x + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)^2 + \frac{bd}{ac}},$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1b^2}{4a^2} + \frac{2bd}{4ac} + \frac{1d^2}{4c^2}\right)} = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right),$$

$$\text{folglich } x_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right) = \frac{d}{c},$$

$$\text{und } x_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right) = -\frac{b}{a}.$$

S. Aufg. 13—18, §. 113.

Anmerkung. Gleichungen von höherem Grade, wenn sie von der Form $x^{2n} + Px^n + Q = 0$ sind, lassen sich augenscheinlich wie die quadratischen auflösen, wenn man $x^n = z$ setzt, und z aus der Gleichung $z^2 = Pz + Q = 0$ bestimmt.

§. 109. **Imaginäre Form der Wurzeln.** Die im Vorhergehenden abgeleiteten allgemeinen Formeln für die Bestimmung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung geben durch die im zweiten Gliede enthaltene Andeutung der Quadratwurzel aus einer **Differenzform** zu erkennen, daß keineswegs in allen Fällen, sondern nur dann, wenn diese Differenz zu einer positiven Zahl wird, ein **reeller** Zahlenwerth der Wurzeln zu erwarten ist. Nun muß aber in $\frac{1}{2}\sqrt{(P^2 - 4Q)}$ oder $\sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$ der Minuend, als Quadrat (nach §. 87, 3.) nothwendig eine positive Zahl sein, so daß die Differenz nur dann negativ ausfallen wird, wenn Q an sich positiv und daneben $> \frac{1}{4}Pz$ ist. Vereinigen sich beide Umstände, so wird die angedeutete Ausziehung der Quadratwurzel (nach §. 94, Anm.) unmöglich und der Ausdruck beider Wurzeln zu den **imaginären Zahlformen**:

$$\text{I. } x_1 = -\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}R\sqrt{-1}.$$

$$\text{II. } x_2 = -\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}R\sqrt{-1}.$$

Aus diesem Allen geht hervor, daß eine quadratische Gleichung der allgemeinen Form

$$\text{I. } x^2 + Px + Q = 0$$

entweder zwei reelle, oder zwei imaginäre Wurzeln hat, was für die einfachere Form der reinen quadratischen Gleichung

$$\text{II. } x^2 - Q = 0$$

an sich einleuchtend ist, da für diese der Werth $x = \pm\sqrt{Q}$ sich unmittelbar ergiebt.

Beispiele quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln sind

$$(1)\ 5x^2 - 85x + 350 = 0.$$
$$(2)\ 2x^2 - 26x - 234 = 0.$$
$$(3)\ 3x^2 - 1{,}7x - 104 = 0.$$

Von imaginärer Form dagegen sind die Wurzeln der Gleichungen

$$(1)\ 4x^2 + 40x + 260 = 0.$$
$$(2)\ 7x^2 - 42x + 238 = 0.$$
$$(3)\ 3x^2 - 11x + 21{,}9 = 0.$$

§. 110. * **Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten.** Die vollständige Form einer Gleichung mit zwei Unbekannten, x und y, welche dieselben in ihren Gliedern theils vom zweiten, theils vom ersten Grade enthalten soll, ist:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

worin unter den Coefficienten beliebige (ganze oder gebrochene, positive oder negative) Zahlen mit Einschluß von Null zu verstehen sind. Jedoch werden die Coefficienten, a, b, c der ersten drei Glieder nicht zugleich $= 0$ sein dürfen, da die Gleichung dann aufhören würde, eine quadratische zu sein. Scheinbar ist sie schon beim Ausfallen des ersten und dritten Gliedes vom ersten Grade, weil ihr dann x^2 und y^2 fehlen; indessen deutet ein Glied, welches (wie bxy) das Product zweier Unbekannten enthält, eine, wenn auch nur unvollständige, quadratische Gleichung an [s. §. 107. (2)]. Die obige Gleichung kann in Beziehung auf jede in ihr enthaltene Unbekannte nur so gelöst werden, daß eine durch die andere ausgedrückt erscheint. So findet man:

$$\text{I. } y = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{(b^2-4ac)x^2 + 2(bd-2ae)x + (d^2-4af)}}{2a}$$

$$\text{II. } x = \frac{-(by+e) \pm \sqrt{(b^2-4ac)y^2 + 2(be-2cd)y + (e^2-4cf)}}{2c}$$

Die Auflösung zwei solcher quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten kann hier deshalb nicht weiter verfolgt werden, weil man durch Combination derselben zu einer höheren Gleichung (vom vierten Grade) gelangt.

§. 111. * **Verbindung quadratischer und einfacher Gleichungen mit zwei Unbekannten.** Sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zur Bestimmung derselben gegeben, von denen die eine vom zweiten, die andere vom ersten Grade ist, also allgemein:

$$(1)\ ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0;$$
$$(2)\ py + qx + r = 0;$$

so kann man den aus (2) gezogenen Werth von $y = -\frac{qx+r}{p}$ in (1) substituiren und sie dadurch umformen in

$$(3)\ a\left(\frac{qx+r}{p}\right)^2 - bx\left(\frac{qx+r}{p}\right) + cx^2 - d\left(\frac{qx+r}{p}\right) + ex + f = 0.$$

Durch Wegschaffung des Divisors p und Entwickelung von $(qx+r)^2 = q^2x^2 + 2qrx + r^2$ läßt diese Gleichung in folgende sich umbilden:

$$(4)\ (aq^2 - bpq + cp^2)x^2 + (2aqr - bpr - dpq + cp^2)x + (ar^2 - dpr + fp^2) = 0,$$

welche von der Form $Ax^2 + Bx + C = 0$ ist und sich mithin (nach §. 108.) auflösen läßt. Indem man jede der beiden, für x sich ergebenden, Wurzeln in die Gleichung (2) substituirt, erhält man ebenfalls zwei ihnen correspondirende, verschiedene Werthe für die Unbekannte y.

Anmerkung. Sind beide Gleichungen (namentlich die erste) von einfacherer, unvollständiger Form, z. B. (1) $x^2 + y^2 = p$ und (2) $x + y = q$, so nimmt die Auflösung derselben einen viel einfachern Gang. Auch lassen sich unter dieser Voraussetzung zwei quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten häufig ohne Schwierigkeit auflösen.

§. 112. Behandlung von Aufgaben. Was über die Behandlung von Aufgaben durch Bildung und Auflösung von Gleichungen, worin die Unbekannten in Verbindung mit den zur Bestimmung derselben gegebenen Zahlen vorkommen, bei Gelegenheit der einfachen Gleichungen (§. 63.) gesagt worden, findet seine Anwendung auf Gleichungen aller Grade, folglich zunächst ebenfalls auf die quadratischen. Der Umstand indessen, daß jede solche Gleichung zwei im Allgemeinen verschiedene Wurzeln liefert, welche (nach §. 109.) entweder beide reell oder beide imaginär sind, verdient bei der Auflösung einer Aufgabe, deren arithmetischer Ausdruck zu einer quadratischen Gleichung führt, besondere Beachtung.

Sind nämlich beide Wurzeln reell, so wird es von der Beschaffenheit des Gesuchten abhängen, ob man jede der Wurzeln oder nur eine derselben als wirkliche Lösung der Aufgabe betrachten darf, insofern die vorgelegte Frage von der Art sein kann, daß negative Zahlen von ihrer Beantwortung ganz ausgeschlossen bleiben müssen. Sollte nun aber die Fassung der Aufgabe etwa eine unnöthige Beschränkung enthalten, so ist ihre Beantwortung durch zwei verschiedene Werthe, von denen nur einer erwartet wurde, als eine Berichtigung der Aufgabe selbst anzusehen, die auf eine umfassendere Weise wird ausgesprochen werden müssen. Es bedarf also in den Fällen, wo das Resultat der Rechnung wider Erwarten zu zwei verschiedenen Auflösungen führt, eine nähere Prüfung, entweder des Ausdrucks, wodurch die Aufgabe (vielleicht in zu großer Be-

schränkung) ausgesprochen, oder der (vielleicht nicht erschöpfenden) Vorstellungen, worauf sie begründet worden ist.

Sind beide Wurzeln der Gleichung, zu welcher die Aufgabe leitete, hingegen von imaginärer Form, so ist ein solches Ergebniß der Rechnung nur als Folgerung eines Widerspruchs anzusehen, welcher in den Bedingungen der Aufgabe auf versteckte Weise enthalten und erst im Resultate sichtbar geworden ist.

Folgende Beispiele der Behandlung von Aufgaben, welche zu quadratischen Gleichungen führen, werden hinreichen, die vorstehenden Bemerkungen näher zu erläutern.

1) Welche Zahl giebt, zu ihrem Quadrat addirt, hundert?

$$x^2 + x = 100, \text{ also } x^2 + x + \frac{1}{4} = 100{,}25.$$

$$\text{Also } x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{100{,}25} = -0{,}5 \pm 10{,}012\ \ldots$$

Hier genügen der Aufgabe die beiden Werthe $x = -10{,}512\ldots.$ und $+9{,}512\ldots.$, weil die Beschaffenheit derselben auch den negativen Werth zuläßt.

2) Durch den Tod zweier Geschwister erben die übrigen von einem Nachlaß von 46800 Thlr., welcher gleich unter Alle getheilt werden soll, Jeder 1950 Thlr. mehr. Wie viel waren der Erben also?

$$\frac{46800}{x-2} = \frac{46800}{x} + 1950.$$

$$46800x = 46800x - 93600 + 1950x^2 - 3900x$$

$$\text{oder } 1950x^2 - 3900x = 93600.$$

$$\text{Folglich } x^2 - 2x = 48 \text{ und } x^2 - 2x + 1 = 49.$$

$$x = 1 \pm \sqrt{49}.$$

Augenscheinlich ist hier nur das positive Zeichen zulässig, also $x = 8$. S. Aufg. 19—38, §. 113.

3) Die Masse eines Himmelskörpers werde $= A$, die eines zweiten $= B$, der Abstand beider $= k$ gesetzt. In welchem Punkte ihrer Verbindungslinie wird ein zwischen ihnen befindlicher Körper C von beiden mit gleicher Kraft angezogen werden?

Da die anziehenden Kräfte α, β beider Körper im geraden Verhältniß ihrer Massen und im umgekehrten der Quadrate ihrer Entfernungen stehen, so erhält man, die unbekannten Abstände des Körpers C von beiden durch x und y bezeichnend, die Gleichungen:

$$(1)\ x + y = k$$

und da allgemein $\alpha : \beta = \frac{A}{x^2} : \frac{B}{y^2}$, im vorliegenden Falle aber $\alpha = \beta$ angenommen wird:

$$(2)\ Ay^2 = Bx^2.$$

Substituirt man nun in (2) den Werth $x = k - y$ aus (1), so entsteht die Gleichung

$$(3)\ Ay^2 = B\ (k - y)^2 = Bk^2 - 2Bky + By^2$$

$$\text{folglich}\ (A - B)y^2 + 2Bky = Bk^2$$

$$\text{oder}\ y^2 + \frac{2Bk}{(A-B)}\,y + \left(\frac{Bk}{A-B}\right)^2 = \left(\frac{Bk}{A-B}\right)^2 + \frac{Bk^2}{(A-B}$$

$$\text{und demnach}\ y = -\left(\frac{Bk}{A-B}\right) \pm \frac{k\sqrt{AB}}{A-B}$$

Von den beiden verschiedenen Werthen, welche diese Formel ausdrückt, ist keiner auszuschließen; denn obgleich es auf der, A und B verbindenden, geraden Linie zwischen beiden nur einen Punkt der bezeichneten Art geben kann, so läßt sich doch noch ein zweiter in ihrer Verlängerung denken. Die Aufgabe würde mithin allgemeiner zu fassen sein. Vgl. Aufg. 39—42, §. 113.

4) Von der unbekannten Pfundezahl einer Waare kostet jedes Pfund so viel Thaler, als Pfunde davon vorhanden sind, und das Ganze zwanzig Thaler weniger, als das Vierfache der Pfundzahl. Hier ist

$$x^2 = 4x - 20,\ \text{oder}\ x^2 - 4x = -20$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4 - 20 = -16.$$

Das Resultat $x = 2 \pm \sqrt{-16}$ oder $\sqrt{16}\,.\,\sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$ zeigt, daß die Aufgabe selbst gar keine Realität haben kann; die Pfundezahl wird aber durch eine imaginäre Zahl dargestellt, weil es in der That keine wirkliche giebt, die den fingirten Umständen der Aufgabe zu entsprechen im Stande wäre.

§. 113. Aufgaben.

1. Die Gleichung $\frac{3}{x} - \left(24 - \frac{5}{x}\right) = 7x - \frac{3}{5}$ umzuformen.
2. Eben so $\frac{7}{x-10} + \frac{5}{3\ (x-4)} = \frac{17}{9-2x}$.
3. Eben so $\frac{20-x}{5\ (4-x)} = \frac{3\ (20x-4)}{5\ (8+7x)}$.
4. Eben so $\frac{ax}{p-q} + \frac{a^2}{(p+q)\ x} = \frac{p-q}{x}$.
5. Die Gleichung $14 : x = x : 129$ aufzulösen.
6. Eben so $(x - \sqrt{142,334})\ (x + \sqrt{142,334}) = 27,22x$.
7. Eben so $23 : (132 - x) = (132 + x) : 1041$.
8. Eben so $(x + 6) : (3x + 12) = (3x - 12) : (x - 6)$.
9. Eben so $21z^2 - 1617z + 20748 = 0$.
10. Eben so $3,5y^2 - 11,75y - 41,25 = 0$.
11. Eben so $(3x + 1)\ (4x - 2) = (13x + 7)\ (5x - 3)$.
12. Eben so $\frac{x}{x+60} - \frac{7}{3x-5} = 0$.

13. Eben so $\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x} = \frac{c}{c+x} + 1.$

14. Eben so $(a+b)x^2 = cx + \frac{ac}{a+b}.$

15. Eben so $(1+ax):(1+bx) = (1+bx):(1-ax).$

16. Eben so $2(b-c)\,y\sqrt{2+a^2} = (b-c)^2 + ay^2.$

17. Zwei Zahlen zu finden, deren Product $= p$, und deren Quotient $= q$ sei

18. Eben so zwei Zahlen, deren Quadratsumme $= k$, und deren Quadrat-Differenz $= m$ sei

19. Zwei Zahlen im Verhältniß 1 : 4, deren Quadratsumme $= 287300$ ist, zu finden.

20. Eben so im Verhältniß p : q, wenn die Quadratsumme $= a$ ist.

21. Eben so im Verhältniß a : b, wenn die Quadrat-Differenz $= m$ ist.

22. Die Summe zweier Zahlen ist $= 141{,}55$, die Summe ihrer Quadrate $= 10121{,}07$. Beide zu finden.

23. Eben so, wenn ihre Summe $= 202{,}47$, die Differenz ihrer Quadrate $= 411{,}06$ ist.

24. Eine Zahl zu finden, deren Quadrat sie um a übertrifft.

25. Eben so eine solche, deren Quadrat b. weniger beträgt.

26. Die Zahl 100 so zu theilen, daß die Summe aus den Quadraten beider Theile und deren Producte $= 688$ sei.

27. Die Zahl 216 um so viel zu vermehren, daß das Quadrat der vermehrten Zahl $= 90000$ werde.

28. Die Zahl 518 um so viel zu vermindern, daß das Quadrat der verminderten Zahl $= 260043$ werde.

29. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist $= 5{,}6$. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

30. Die Diagonalen eines Parallelogramms betragen 8 und 11 Zoll, die Grundlinie 6,6. Wie groß ist sein Umfang?

31. Der Radius eines Kreises, $= 12$ Zoll, sei in vier gleiche Theile getheilt, aus jedem Theilpunkte eine Senkrechte errichtet, und deren Durchschnittspunkt durch eine Sehne mit dem Anfangspunkt des Durchmessers verbunden, wie lang sind dann die Senkrechten und Sehnen?

32. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= 10$, sein Umfang $= 24$. Wie groß also jede der Catheten?

33. Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes sind $= 26'$ und $18',5$; seine Höhe $= 12',75$. Den Radius eines inhaltsgleichen Kreises zu berechnen.

34. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei $= 14{,}22$. Wie groß ist die Diagonale eines inhaltsgleichen Quadrats.

35. Ein Rechteck, 62′ lang, und 27′ breit, soll durch gleiche Vermehrung seiner Seiten verdreifacht werden. Wie viel beträgt dieselbe?

36. Wie viel hingegen, wenn der Flächeninhalt $(7+\frac{3}{4})$mal so groß werden soll?

37. Ein Saal, dessen Grundfläche aus einem Rechteck von 52′ Länge und einem Halbkreise besteht, enthält 2146,5 Quadratfuß. Wie groß ist seine Breite?

38. Ein Körper hat im freien Fall einen Raum von 316 Fuß durchlaufen. Wie viel Secunden gehörten dazu?

39. In wie viel Secunden erreicht eine, mit 300 Fuß Geschwindigkeit senkrecht emporgeschossene Kugel die Höhe von 760 Fuß?

40. Das Geläute eines Thurmes ist dreimal so stark als das eines andern. An welchem Punkte zwischen beiden wird der Schall in gleicher Stärke gehört werden, wenn ihr Abstand 5480 Fuß beträgt?

41. Die Lichtstärke zweier Flammen A, B verhalte sich wie 7 : 17; ihre Entfernung betrage 132 Fuß. In welchem Punkte der Verbindungslinie wird ein Körper gleich stark beleuchtet werden?

42. Die allgemein behandelte Aufgabe 3. im §. 112. werde auf Erde und Mond angewendet, indem man die Masse der Erde $=1$, die des Mondes $=\frac{1}{70}=0{,}0143$ und die Entfernung beider Körper 51800 geogr. Meilen annimmt.

Viertes Capitel.

Die allgemeine Potenzenrechnung.

§. 114. **Potenz in erweiterter Bedeutung.** Sofern man unter Potenz (nach §. 72.) ein aus gleichen Factoren zusammengesetztes Product versteht, ist man genöthigt, den Exponenten, welcher anzeigt, wie viel mal der gegebene Grundfactor zur Einheit gesetzt werden soll, als eine ganze und positive Zahl anzusehen. Um auf diesen einfachen Begriff die Potenzenlehre in ihrer ganzen Allgemeinheit zu begründen, hat man zu untersuchen, welche Veränderungen mit der Potenz vorgehen, sofern der Exponent um eine andere Zahl vermehrt oder vermindert, durch dieselbe multiplicirt oder dividirt wird.

Deutet man zu dieser Absicht eine Potenz, deren Grundfactor und Exponent als unbestimmte, aber zunächst als ganze und positive Zahlen vorausgesetzt werden, durch $P=a^k$, und durch m

eine ebenfalls unbestimmte, aber ganze, positive Zahl an, so bezeichnen der (im §. 72. gegebenen) Definition der Potenz gemäß die Ausdrücke:

(1) a^{k+m}, es solle der Grundfactor a nicht nur kmal, sondern mmal mehr zur Einheit gesetzt, oder es solle dem Producte a^k noch eine Anzahl von m Factoren durch Multiplication hinzugefügt werden. Demnach ist $a^{k+m} = a^k . a^m$.

(2) a^{k-m}, es solle der Grundfactor nicht k, sondern mmal weniger, als kmal zur Einheit gesetzt, oder es solle aus dem Producte a^k eine Anzahl von m Factoren wieder ausgeschieden werden, welches (nach §. 13.) durch Division geschieht. Folglich ist $a^{k-m} = \frac{a^k}{a^m}$.

(3) a^{km}, es solle der Grundfactor nicht k mal, sondern k . m mal d. h. es solle das durch k maliges Setzen von a erzeugte Product m mal gesetzt werden. Also ist $a^{km} = \left(a^k\right)^m$.

(4) $a^{\frac{k}{m}}$, es solle der Grundfactor nicht k-, sondern nur zum m ten Theile kmal, oder es solle das, durch kmaliges Setzen von a gebildete Producte in m gleiche Producte durch Wurzel-Ausziehung zerlegt werden. Folglich ist $a^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{a^k}$.

Besonders wichtig erscheinen nun unter den vorstehenden Potenzformen die zweite und vierte, wenn man für den unbestimmt gelassenen Exponenten k specielle Zahlenwerthe substituirt. Sei nämlich:

I. $k = m$, so folgt aus (2), daß $a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1$, welches übrigens auch unmittelbar aus der Definition des Exponenten (§. 72.) gefolgert werden kann.

II. $k = 0$, so ist nach (2) $a^{-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$, also a^{-m} die Andeutung des a^m entgegengesetzten Factors (§. 38.), oder des m mal zur Einheit zu setzenden Divisors a.

III. $k = 1$, so ist nach (4) $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$, also Andeutung der m ten Wurzel aus a.

Es wird demnach die Bedeutung des Exponenten einer Potenz nicht auf ganze und positive Zahlen, wofür sie ursprünglich gegeben wurde, eingeschränkt bleiben, sondern ebenfalls auf negative

und gebrochene Zahlenwerthe ausgedehnt werden dürfen, indem man sich unter der Form a^{-m} die durch mmaliges Setzen des Divisors a zur Einheit entstehende Bruchform $\frac{1}{a^m}$, unter $a^{\frac{1}{m}}$ aber die durch Zerlegung von a in m gleiche Factoren hervorgehende Wurzel $\sqrt[m]{a}$ oder allgemeiner unter $a^{\frac{k}{m}}$ die mte Wurzel aus der Potenz a^k vorzustellen hat. Mit Rücksicht auf diese dreifache Form und Bedeutung des Exponenten läßt sich die Potenz allgemein als eine Zahl definiren, die eben so aus dem gegebenen Grundfactor, wie der Exponent aus der Einheit, zu bilden ist, indem man bei ihrer Erzeugung Multiplication, Division und Wurzel-Ausziehung anwendet, wo bei dem Exponenten Addition, Subtraction und Theilung vorgeschrieben ist. Werde z. B. der Grundfactor $a = 8$, der Exponent $= 3, -3$ und $\frac{2}{3}$ gesetzt, so entstehen Exponent und zugehörige Potenz auf folgende einander entsprechende Weise:

$$3 = (1 + 1 + 1); \; -3 = (-1 - 1 - 1); \; \frac{2}{3} = \frac{(1+1)}{3}$$

$$8^3 = 8 \times 8 \times 8; \; 8^{-3} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}; \; 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(8.8)}.$$

In dem hier ausgewählten Beispiele ist nun allerdings die geforderte Wurzel aus der Zahl $8.8 = 64$. eine ebenfalls vollständig gegebene Zahl, nämlich $= 4$; es ergiebt sich indessen aus den, bei Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln (§§. 83 u. 101) aufgestellten Bemerkungen über die Unmöglichkeit, aus jeder ganzen Zahl die Wurzel vollständig zu ziehen, daß die Andeutung $a^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{a^k}$ im Allgemeinen als Form einer irrationalen d. h. nicht vollständig angebbaren Zahl zu betrachten ist.

§. 115. Product- und Quotienten-Potenzen. Bei der Anwendung der Potenzirung auf die verschiedenen Zahlformen der Grundoperationen zeigen sich erhebliche, und erst durch spätere Betrachtungen zu überwindende Schwierigkeiten in Ansehung der Summen- und der Differenzform, während für die Bildung der Potenz eines Products oder einer Quotienform (Bruchform) folgende einfache und wichtige Sätze sich ohne Mühe erweisen lassen.

1) Die Potenz eines Products wird dadurch gebildet, daß man jeden einzelnen seiner Factoren zur vorgeschriebenen Potenz erhebt. Denn es ist

a) für ganze positive Exponenten:

$$(a.b.c.d)^n = a^n . b^n . c^n . d^n;$$

weil, wenn das Product (abcd) nmal zur Einheit gesetzt wird, dieses mit jedem seiner Factoren geschieht, welche (nach §. 12.) beliebig geordnet werden können. (Sind die Factoren alle einander gleich $=$ a, so wird der obige Ausdruck zu $(a^4)^n=(a^n)^4$; und wenn man, statt vier, unbestimmt k Factoren setzt, zu $(a^k)^n=(a^n)^k$. Ueberdies sind beide Ausdrücke nach §. 114. (3) gleichbedeutend mit der Form (a^{kn}).

Zusatz. Setzt man $a^n=\alpha$, $b^n=\beta$, $c^n=\gamma$, $d^n=\delta$, also $a=\sqrt[n]{\alpha}$, $b=\sqrt[n]{\beta}$, $c=\sqrt[n]{\gamma}$, $d=\sqrt[n]{\delta}$, so folgt aus:

$$\alpha.\beta.\gamma.\delta=\left(\sqrt[n]{\alpha}.\sqrt[n]{\beta}.\sqrt[n]{\gamma}.\sqrt[n]{\delta}.\right)^n,$$

daß man aus einem Producte $\alpha.\beta.\gamma.\delta$ die nte Wurzel zieht, indem man das Product aus den gleichnamigen Wurzeln seiner Factoren bildet.

b) für gebrochene positive Exponenten:

$$(a.b.c.d)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{(a.b.c..d)},$$

und (nach a) Zusatz) auch

$$=\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c}.\sqrt[m]{d}=a^{\frac{1}{m}}.b^{\frac{1}{m}}.c^{\frac{1}{m}}.d^{\frac{1}{m}}.$$

Allgemeiner erhält man für die Exponentenform $\frac{k}{m}$ als Entwickelung des Products (nach §. 114. (4)):

$$(a.b.c.d)^{\frac{k}{m}}=\sqrt[m]{(a.b.c.d)^k}=\sqrt[m]{a^k.b^k.c^k.d^k}$$
$$=\sqrt[m]{a^k}.\sqrt[m]{b^k}.\sqrt[m]{c^k}.\sqrt[m]{d^k}=a^{\frac{k}{m}}.b^{\frac{k}{m}}.c^{\frac{k}{m}}.d^{\frac{k}{m}}.$$

Zusatz. Werden die Factoren sämmtlich einander gleich angenommen und $=$a gesetzt, so verwandelt sich der erste der vorstehenden Ausdrücke in

$$\left(a^k\right)^{\frac{1}{m}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^k, \text{ d. i. } \sqrt[m]{\left(a^k\right)}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^k.$$

c) für ganze und gebrochene negative Exponenten:

$$(a.b.c.d)^{-n}=\frac{1}{(a.b.c.d)^n}=\frac{1}{(a^n.b^n.c^n.d^n.)};$$

und da man diesen Ausdruck auch $=\frac{1}{a^n}.\frac{1}{b^n}.\frac{1}{c^n}.\frac{1}{d^n}$

setzen kann, so ist $(a.b.c.d)^{-n}=a^{-n}.b^{-n}.c^{-n}.d^{-n}$.

2) Die Potenz einer Bruchform erhält man, indem man Zähler und Nenner derselben zur vorgeschriebenen Potenz erhebt; denn es ist:

a) für ganze positive Exponenten:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

nach der Regel der Multiplication der Brüche (§. 27.)

b) für gebrochene positive Exponenten:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^k} = \sqrt[m]{\frac{a^k}{b^k}} = \frac{\sqrt[m]{a^k}}{\sqrt[m]{b^k}} = \frac{a^{\frac{k}{m}}}{b^{\frac{k}{m}}}.$$

c) für ganze und gebrochene negative Exponenten:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{a^n}{b^n}\right)} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{\left(\frac{1}{a^n}\right)}{\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$$

Aus den im Vorstehenden abgeleiteten Gleichungen zwischen der Potenz einer Product- oder Quotientenform und den Potenzen der in ihnen enthaltenen Zahlen ergeben sich ferner noch folgende beiden Sätze:

3) Das Product gleich hoher Potenzen verschiedener Factoren kann zu der nämlichen Potenz des Products jener Factoren zusammengezogen werden.

4) Enthält eine Bruchform gleich hohe Potenzen des Zählers und Nenners, so darf man statt ihrer die nämliche Potenz des aus beiden gebildeten einfachen Bruches setzen.

§. 116. Umformung der Wurzel-Ausdrücke. Wie die Vereinigung verschiedener Brüche unter gleichem Nenner erfordert auch die Verbindung von Wurzel-Ausdrücken mit verschiedenen Exponenten eine Umgestaltung, die es möglich macht, sie unter demselben Wurzelzeichen zu vereinigen.

Diese Umformung beruht auf folgenden, die allgemeine Wurzelform $\sqrt[n]{\alpha^k}$ betreffenden Sätzen, in denen die Exponenten der Wurzel-Ausziehung und Potenzirung, n und k, zur Abkürzung des Ausdrucks als Exponenten über und unter dem Wurzelzeichen oder Wurzel- und Potenz-Exponent unterschieden werden mögen.

1) Aus einer Potenzform n^{pn} wird die nte Wurzel gezogen, indem man den Exponenten pn durch n dividirt.

Denn der Definition der Wurzel-Ausziehung (§. 73.) zufolge ist $a^p = \sqrt[n]{(a^p)^n} = \sqrt[n]{(a^{pn})}$. Auch stimmt dieses mit der von gebrochenen Exponenten (§. 114. 4) gegebenen Erklärung überein.

2) Eine Wurzelform $\sqrt[n]{\alpha^k}$ bleibt ihrem Werthe nach ungeändert, wenn man die Exponenten über und den unter dem Wurzelzeichen durch die nämliche ganze Zahl p multiplicirt.

Denn setzt man $\sqrt[n]{\alpha^k} = a$, also $\alpha^k = a^n$, so ist $\alpha^{kp} = a^{np}$, folglich $\sqrt[np]{\alpha^{kp}} = a = \sqrt[n]{\alpha^k}$.

Zusatz. Haben die Exponenten über und unter dem Wurzel-

zeichen ein gemeinschaftliches Maaß p, so dürfen sie ohne Aenderung des Werthes der Wurzelform durch dasselbe dividirt werden.

3) Eine Wurzelform $\sqrt[n]{a^k}$ wird zur pten Potenz erhoben, indem man den Exponenten unter dem Wurzelzeichen durch p multiplicirt.

Denn sei wiederum $\sqrt[n]{a^k} = a$, also $a^k = a^n$ und $a^{kp} = a^{np}$, so folgt (nach L. 1.) durch Wurzel-Ausziehung $\sqrt[n]{a^{kp}} = a^p = (\sqrt[n]{a^k})^p$.

4) Aus einer Wurzelform $\sqrt[n]{a^{kp}}$ wird die pte Wurzel gezogen, indem man den Exponenten über dem Wurzelzeichen durch p multiplicirt.

Denn es folgt unmittelbar aus L. 3, daß $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{kp}}} = \sqrt[n]{a^k}$, mithin auch (nach L. 2) $= \sqrt[np]{a^{kp}}$ ist.

Zusatz. Ist der Wurzel-Exponent in ganze Factoren zerlegbar, also von der Form $np = pn$, so läßt die vorgeschriebene Wurzel sich dadurch ausziehen, daß man entweder zuerst die nte und dann die pte, oder umgekehrt zuerst die pte und dann die nte Wurzel auszieht:

$$\sqrt[np]{a^{np}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{np}}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{np}}}.$$

S. Aufg. 1—4, §. 124.

§. 117. Addition und Subtraction der Potenzen. Da ein Züsammenzählen oder Abziehen von Zahlen als Bedingung voraussetzt, daß sie gleichartig seien, so sind Ausdrücke der Form $(a^n \pm b^n)$ oder $(a^n \pm a^k)$, worin die Grundfactoren oder die Exponenten verschieden sind, keiner weiteren Zusammenziehung fähig Es giebt mithin keine Vereinfachung solcher Potenzausdrücke, in denen verschiedene Potenzen als Zahlenglieder, positiv oder negativ verbunden, vorkommen, wenn nicht etwa in mehreren Gliedern dieselben Potenzen desselben Grundfactors enthalten sind, wo man freilich die Coefficienten solcher übereinstimmender Potenzen vereinigen kann.

So können z. B. $a^4 + a^5$ oder $4b^2 - b^3$ nicht weiter zusammengezogen werden, so lange man nicht besondere Zahlenwerthe für a oder b substituirt; eben so wenig

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} = a^{-4} + a^{-6} \text{ oder } \frac{1}{3c^4} + \frac{2}{c^2},$$

wie auch die Wurzel-Ausdrücke

$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{5}} \text{ oder } \sqrt[3]{b^4} - \sqrt[2]{b^3} = b^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{3}{2}}$$

Dagegen ist bei folgenden Summen oder Differenzen durch Addition oder Subtraction der Coefficienten eine Vereinfachung möglich.

$$4a\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{16a^3b}=4a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt[3]{2b}=6a\sqrt[3]{2b}.$$

$$10\sqrt[3]{32a^3b}-\frac{5}{a}\sqrt[3]{4a^6b}=20a\sqrt[3]{4b}-5a\sqrt[3]{4b}=15a\sqrt[3]{4b}.$$

$$\sqrt{18a^5b^3}+\sqrt{50a^3b^3}=3a^2b\sqrt{2ab}+5ab\sqrt{2ab}$$
$$=(3a+5)ab\sqrt{2ab}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{27a^5}{2b}}-\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b}}=3a\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b}}-\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b}}=(3a-1)\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b}}$$

S. Aufg. 5—21, §. 124.

§. 118. **Multiplication der Potenzen.** Sollen mehrere Potenzen desselben Grundfactors mit einander multiplicirt werden, so erhält man als ihr Product eine Potenz jenes Grundfactors, deren Exponent durch Addition derjenigen der einzelnen Factoren entsteht, oder kürzer ausgedrückt: Die Multiplication von Potenzen des nämlichen Grundfactors wird durch Addition ihrer Exponenten ausgeführt. Denn es ist

a) für ganze positive Exponenten:

$$a^m . a^n . a^p = a^{m+n+p},$$

weil nach beiden Andeutungen der Grundfactor $(m+n+p)$ mal zur Einheit gesetzt werden soll.

b) für gebrochene positive Exponenten:

$$a^{\frac{m}{p}} . a^{\frac{n}{q}} . a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[p]{a^m} . \sqrt[q]{a^n} . \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[pqs]{a^{mps}} \times \sqrt[pqs]{a^{nps}} \times \sqrt[pqs]{a^{rpq}}$$
$$= \sqrt[pqs]{a^{mqs+nsp+rpq}} = a^{\frac{mqs+nps+rpq}{pqs}} = a^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}+\frac{r}{s}}.$$

c) für ganze und gebrochene negative Exponenten:

$$a^{-m} . a^{-n} . a^{-p} = \frac{1}{a^m} . \frac{1}{a^n} . \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{(m+n+p)}} = a^{-(m+n+p)}.$$

d) für gemischte, positive und negative Exponenten:

$$a^m . a^{-n} . a^p . a^{-q} = \frac{a^m . a^p}{a^n . a^q} = \frac{a^{m+p}}{a^{n+q}} = a^{m+p-n-q}.$$

S. Aufg. 22—25, §. 124.

§. 119. **Division der Potenzen.** Wenn verschiedene Potenzen desselben Grundfactors einander dividiren, so ist der Quotient in der einfachsten Gestalt eine Potenz dieses Grundfactors, deren Exponent durch Subtraction des Exponenten des Divisors von dem des Dividends entsteht; oder kürzer ausgedrückt: Die Division von Potenzen des nämlichen Grundfactors wird durch Subtraction ihrer Exponenten ausgeführt. Denn es ist

a) für ganze positive Exponenten:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

welcher der beiden Exponenten auch der größere sein mag. Wenn nämlich $n < m$, so heben einander n gleiche Factoren im Zähler und Nenner, und es bleiben in jenem $m - n$. Ist aber $n > m$, so heben einander m gleiche Factoren, und im Nenner bleiben $n - m$, also wird $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$, übereinstimmend mit dem obigen Ausdrucke. In dem besonderen Falle, wo $m = n$, wird $\frac{a^m}{a^n}$ dem Werthe nach $= 1$, der Form nach $= a^{m-m} = a^0$.

b) für gebrochene positive Exponenten:

$$\frac{a^{\frac{m}{p}}}{a^{\frac{n}{r}}} = \frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[r]{a^n}} = \frac{\sqrt[rp]{a^{rm}}}{\sqrt[rp]{a^{pn}}} = \sqrt[rp]{\left(\frac{a^{rm}}{a^{pn}}\right)} = \sqrt[rp]{a^{rm-pn}} = a^{\frac{rm-pn}{rp}}$$

$$= a^{\frac{m}{p} - \frac{n}{r}}$$

c) für ganze und gebrochene negative Exponenten:

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{a^n}\right)} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$$

d) für gemischte positive und negative Exponenten:

$$\frac{a^{-m}}{a^p} = a^{-m} \cdot a^{-p} = a^{-m-p}; \quad \frac{a^m}{a^{-p}} = a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

S. Aufg. 26—28, §. 124.

§. 120. **Potenzirung der Potenzen.** Soll eine Potenz zu einer anderen von gegebenem Exponenten erhoben werden, so geschieht dieses durch Multiplication der beiden Exponenten. Denn es ist

a) für ganze positive Exponenten:

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

wie oben (§. 114, 3) bereits erklärt worden.

b) für gebrochene positive Exponenten:

$$\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{\left(\sqrt[p]{a^m}\right)^n} = \sqrt[r]{\sqrt[p]{a^{mn}}} = \sqrt[rp]{a^{mn}} = a^{\frac{m}{p} \cdot \frac{n}{r}}$$

c) für ganze und gebrochene negative Exponenten:

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{mn}}\right)} = a^{mn}.$$

d) für gemischte, positive und negative Exponenten:

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

und eben so

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

S. Aufg. 29—31, §. 124.

§. 121. Zeichen der Potenzen. Die positive oder negative Bezeichnung der nach Andeutung der Exponenten zu bildenden Potenz hängt zugleich von diesem und dem Grundfactor in folgender Weise ab.

1) Ist der Grundfactor positiv, so erhält jede Potenz desselben das positive Vorzeichen, oder ist wenigstens Wurzel aus einer positiven Zahl, indem

a) für ganze positive Exponenten:

$$(+a)^m = +(a^m);$$

b) für gebrochene positive Exponenten:

$$(+a)^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{(+a^k)}.$$

c) für ganze und gebrochene negative Exponenten:

$$(+a)^{-m} = \frac{1}{(+a)^m} = +\frac{1}{a^m}.$$

2) Ist der Grundfactor negativ, so werden die Potenzen von geradem Range positiv oder Wurzeln aus einer positiven Zahl; die von ungeradem Range hingegen negativ oder Wurzeln aus einer negativen Zahl. Denn es ist

A) für gerade Exponenten:

a) für ganze positive Exponenten:

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2;\ (-a)^{2n} = (+a^2)^n = +a^{2n}.$$

b) für gebrochene positive Exponenten:

$$(-a)^{\frac{2}{n}} = \sqrt[n]{(-a)^2} = \sqrt[n]{+a^2};\ldots\ldots(-a)^{\frac{2k}{n}} = \sqrt[n]{+a^{2k}}.$$

c) für ganze und gebrochene negative Exponenten:

$$(-a)^{-2} = \frac{1}{(-a)(-a)} = +\left(\frac{1}{a^2}\right);$$

$$(-a)^{-2n} = \left((-a)^{-2}\right)^n = +\left(\frac{1}{a^2}\right)^n.$$

B) für ungerade Exponenten:

a) für ganze positive Exponenten:

$$(-a)^3 = (-a)^2(-a) = +a^2(-a) = -(a^3);$$

$$(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n}.(-a) = +a^{2n}(-a) = -(a^{2n+1}).$$

b) für gebrochene positive Exponenten:

$$(-a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{-a};\ (-a)^{\frac{2k+1}{n}} = \sqrt[n]{(-a)^{2k+1}} = \sqrt[n]{-(a^{2k+1})}.$$

c) für ganze und gebrochene negative Exponenten:

$$(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)^2(-a)} = \frac{1}{-(a^3)} = -\left(\frac{1}{a^3}\right);$$

$$(-a)^{-(2n+1)} = \frac{1}{(-a)^{2+n1}} = -\left(\frac{1}{a^{2n+1}}\right).$$

§. 122. Zeichen der Wurzeln. Nach dem Vorhergehenden ist das Zeichen der Wurzeln völlig bestimmt, wenn der Exponent

von ungerader Zahl ist, weil es in diesem Falle mit dem Zeichen der Potenz übereinstimmen muß, nämlich:

$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = + a \text{ und } \sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = - a.$$

Durchaus unbestimmt bleibt hingegen das Zeichen alsdann, wenn eine Wurzel von geradem Exponenten aus einer positiven Zahl, die als ihre Potenz betrachtet wird, gezogen werden soll, weil diese eben sowohl aus einem negativen, als einem positiven Grundfactor entstanden, d. h. weil $\sqrt[2n]{a^{2n}} = + a$ oder $- a$ sein kann. Diese Unbestimmtheit, welche in besonderen Fällen der Rechnung, wo die Natur der Betrachtung nur einen der beiden Werthe (entweder $+ a$ oder $- a$) zuläßt, freilich verschwindet, deutet man im Allgemeinen durch ein, dem Radicalzeichen mit geradem Wurzelexponenten vorgesetztes Doppelzeichen ($\pm$) an, z. B. $\sqrt{b}$ durch $\pm\sqrt{b}$; $\sqrt[4]{b}$ durch $\pm\sqrt[4]{b}$, um auf die Zweideutigkeit der Wurzel aufmerksam zu machen.

Es ist aber überhaupt bei allen Verbindungen von Wurzelformen, wie in den Ausdrücken $\sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[p]{c}$; $\sqrt[m]{a} - \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[p]{c}$; $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b}$ deren Mehrdeutigkeit sorgfältig zu beachten, um unrichtige Folgerungen zu vermeiden. Insofern man nämlich den Wurzelformen $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$ irgend einen bestimmten Zahlenwerth unterlegt, stellen jene Ausdrücke nur einen der besonderen Fälle dar, welche in ihnen enthalten sind, wonach also die nämliche allgemeine Andeutung keineswegs immer die nämliche Zahl bezeichnet. In neuester Zeit hat man angefangen, auf die Mehrdeutigkeit der Wurzelausdrücke durch das Doppelzeichen W hinzuweisen oder sich einer zweifachen Einklammerung, wie in $\sqrt[n]{((a))}$ zu bedienen, um damit irgend einen der einfachen Werthe, welche dieser Ausdruck etwa haben mag, zu bezeichnen.

§. 123. Imaginäre Zahlformen. Der im Vorhergehenden nicht erwähnte Fall einer Wurzel-Ausziehung von geradem Exponenten aus einer negativen Zahl läßt durchaus keine Annahme einer wirklichen Wurzel, sie sei positiv oder negativ, zu: denn $- a^{2n}$ kann durch $2n$ maliges Setzen von $- a$ so wenig, als von $+ a$ entstanden sein, so daß sich gar keine wirkliche Wurzel dafür denken läßt, wie dieses schon bei Gelegenheit der Ausziehung der Quadratwurzel aus negativen Zahlen (§. 94, Anmerkung) bemerkt werden mußte. Nichts desto weniger darf man die Andeutung solcher unausführbaren Wurzel-Ausziehungen von den Zahlformen nicht ausschließen, sondern muß sie da, wo sie als solche in der Rechnung

auftreten, den allgemeinen Regeln der Arithmetik gemäß behandeln, wenn sie gleich imaginäre (oder unmögliche) Zahlenwerthe darstellen. Am Ende der Berechnung können sie gänzlich verschwunden sein und ein Resultat in durchaus bestimmten Zahlen geben, indem mehrere als Factoren zu einem reellen Producte sich vereinigen. Dies geschieht bei der Potenzirung des allgemeinen Ausdrucks $a\sqrt{-1}$, wenn die Exponenten gerade Zahlen sind, während bei ungeraden Exponenten der Factor $\sqrt{-1}$ stets wieder zum Vorschein kommt.

So ist $(a\sqrt{-1})^2 = -a^2$ und $(a\sqrt{-1})^3 = -a^3\sqrt{-1}$

$(a\sqrt{-1})^4 = +a^4$ $(a\sqrt{-1})^5 = +a^5\sqrt{-1}$

$(a\sqrt{-1})^6 = -a^6$ $(a\sqrt{-1})^7 = -a^7\sqrt{-1}$

$(a\sqrt{-1})^8 = +a^8$ $(a\sqrt{-1})^9 = +a^9\sqrt{-1}$

u. s. w. u. s. w.

Man muß sich indeß hüten, die für reelle Zahlen aller Art gültige Regel $\sqrt{a}\,.\sqrt{b} = \sqrt{a\,.\,b}$ auf die imiginären ohne Ueberlegung anzuwenden, weil ihr zufolge z. B. $\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1} = \sqrt{+1} = \pm 1$ sein würde, während hier allein -1 der richtige Werth sein kann. Solchen Irrungen entgeht man am sichersten durch den Gebrauch eines besonderen Zeichens i für $\sqrt{-1}$ und die Bemerkung, daß die Potenzen:

$i,\ i^5,\ i^9,\ i^{13}\ \ldots\ldots\ i^{1+4n}$ positive imaginäre

$i^3,\ i^7,\ i^{11},\ i^{15}\ \ldots\ldots\ i^{3+4n}$ negative imaginäre

$i^2,\ i^6,\ i^{10},\ i^{14}\ \ldots\ldots\ i^{2+4n}$ negative reelle

$i^4,\ i^8,\ i^{12},\ i^{16}\ \ldots\ldots\ i^{0+4n}$ positive reelle

Werthe geben. So ist z. B. $(ai)^7 + (bi)^8 = -a^7\,.\,i + b^8$.

S. Aufg. 32—36, §. 124.

§. 124. Aufgaben.

Für die nachstehenden Wurzelausdrücke, welche nicht als mehrdeutig angesehen werden sollen, sind durchgängig nur die nächsten einfachen Werthe zu setzen.

1. Die Wurzelform $25\sqrt{a^6p^{-18}c^4d^{-32}}$ zu vereinfachen.
2. Eben so $\sqrt[3]{27m^6p^9q^{12}} \times \sqrt[3]{64m^3p^{-9}q^6} \times \sqrt[3]{125m^9p^6q^{-3}}$.
3. Eben so $\sqrt[4]{81a^{24}b^{16}c^{-4}} \times \sqrt[4]{16a^{20}b^{-12}c^{-8}} \times \sqrt[4]{625a^{-44}}$.
4. Eben so $\sqrt[5]{\left\{\frac{3^{10}a^{-5}(a+b)^{15}(x+y)^{-10}(b+c-x)^{20}}{32(p+q-r)^{100}}\right\}}$.
5. Die Wurzelausdrücke $3\sqrt{7} + 5\sqrt{8} + 9\sqrt{5}$ zusammenzuziehen.
6. Eben so $b\sqrt[3]{a} + c\sqrt[3]{g} - d\sqrt[3]{a} + e\sqrt[3]{g} - f\sqrt[3]{a}$.
7. Eben so $4\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[4]{7} + 6\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[6]{8} - 5\sqrt[7]{10}$.
8. Eben so $\sqrt{24} + \sqrt{42} - \sqrt{60} + 4\sqrt{18} - 21\sqrt{12}$.
9. Eben so $9\sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{64}$.
10. Eben so $\sqrt{\left\{\frac{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}{c^2d^2}\right\}} - \left(\frac{a-2b}{cd}\right)\sqrt{ab}$.

11. Eben so $5\left(\frac{x+1}{a}\right)\sqrt{\left(\frac{x}{a+b}\right)}-\sqrt{\left(\frac{ac}{a^2bd-2ab^2d+b^3d}\right)}$.

12. Eben so $\sqrt{(3a^2c+6abc+3b^2c)}+23(a+b)\sqrt{3c}$.

13. Man multiplicire $\sqrt{2}\times 5\sqrt{8}\times 7\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\sqrt{24}$.

14. Eben so $\sqrt{5}\times\sqrt{7}\times\sqrt{8}$ und $\sqrt{\tfrac{1}{5}}.\sqrt{\tfrac{1}{6}}.\sqrt{\tfrac{1}{7}}.\sqrt{\tfrac{1}{8}}$.

15. Eben so $(4\sqrt{7}-3\sqrt{6}+10\sqrt{3})\times 3\sqrt{5}$.

16. Eben so $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(8+\sqrt{2})^2$.

17. Man dividire $(5\sqrt{6}-2\sqrt{14}-3\sqrt{12}+8\sqrt{5})$ durch $\sqrt{3}$.

18. Eben so $(18+4\sqrt{3}-\sqrt[3]{36}-\sqrt[4]{108}):\sqrt{6}$.

19. Eben so $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}:(3\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{2})$.

20. Eben so $(3+\sqrt{2}):(1+\sqrt{2})$.

21. Eben so $(\sqrt{a}-\sqrt{b}):(a-b)$.

22. Man multiplicire $\sqrt[6]{z^4}\times\sqrt[7]{z^3}\times\sqrt[5]{z^{12}}\times\sqrt[3]{z^8}$.

23. Eben so $a^{-5}b^{47}c^{10}\times b^{-50}a^6c^{-8}\times a^5b^2c^9$.

24. Eben so $m^{\frac{3}{8}}p^{\frac{5}{7}}q^{\frac{1}{2}}r^4\times p^{-\frac{17}{5}}q^9r^{\frac{3}{4}}m^{12}\times p^{32}q^4$.

25. Eben so $(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[5]{b^3})\times(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[5]{b^3})$.

26. Man dividire $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}c^{-5}d^{\frac{2}{3}}$ durch $a^{\frac{1}{4}}b^2c^{\frac{7}{6}}d^{-3}$.

27. Eben so $(\sqrt[4]{m^3}-\sqrt[4]{p^3}):(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{p})$.

28. Eben so $(z^{\frac{2}{7}}+6z^{\frac{1}{7}}a^{\frac{3}{4}}+9a^{\frac{3}{2}}).\sqrt{\tfrac{4}{5}k^8}:(\sqrt[7]{z}+3\sqrt[4]{a^3})$.

29. Man bilde die angedeutete Potenz $(a^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{5}{7}}$.

30. Eben so $(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{7}})^{-\frac{3}{8}}$; $(a^3b^{-4}c^{-8})^{\frac{5}{2}}$; $(a^{\frac{1}{7}}.b^{\frac{1}{9}})^6$.

31. Eben so $(m^{0,432}\times p^{4,234}\times q^{3,789}\times r^{0,04})^{0,13}$.

32. Man multiplicire $(a+b\sqrt{-1})\times(a-b\sqrt{-1})$.

33. Eben so $(a+b\sqrt{-1})^2\,(a-b\sqrt{-1})^2$ oder $(a+bi)^2\,(a-bi)^2$.

34. Eben so $(q-p\sqrt{-1})^3\,(q+p\sqrt{-1})$ oder $(q-pi)^3\,(q+pi)$.

35. Man dividire $(\sqrt{-15}+\sqrt{-12}-\sqrt{-21})$ durch $\sqrt{-3}$.

36. Eben so $28:(2\sqrt{-5}-4\sqrt{-3})$.

Fünftes Capitel.

Die Logarithmen.

§. 125. Begriff der Logarithmen. Der Exponent, welcher angiebt, auf welche Potenz eine gegebene Grundzahl K erhoben werden muß, um eine beliebige andere Zahl A hervorzubringen, wird der Logarithmus dieser Zahl in Beziehung auf K genannt. Also ist die Zahl α in der Gleichung $K^\alpha = A$ nach der herkömmlichen Benennung und Bezeichnungsart $= \log. A$, d. h. der zur Zahl

A im Potenzsysteme der Grundzahl K gehörige Logarithmus, so findet man z. B., wenn K = 7, log. 343 = 3, weil $7^3 = 343$; oder wenn K = 5, log. 625 = 4, weil $5^4 = 625$. Es kann mithin die nämliche Zahl verschiedene Logarithmen haben, je nachdem man sie als Potenz verschiedener Grundzahlen ansieht: so ist z. B.

wenn K = 2, log. 64 = 6, weil $2^6 = 64$.
= 4, log. 64 = 3, weil $4^3 = 64$.
= 8, log. 64 = 2, weil $8^2 = 64$.
= 512, log. 64 = $\frac{2}{3}$, weil $512^{\frac{2}{3}} = 64$.

Der Werth des Logarithmus ist also zugleich von dem der Grundzahl K und der gegebenen Zahl A abhängig und muß aus diesen beiden Größen sich bestimmen lassen. Das vierte der vorstehenden Beispiele zeigt zugleich, daß Logarithmen auch gebrochene Zahlen sein, und daher in der Form von Decimalbrüchen häufig nur als Näherungswerthe angegeben werden können. Man sieht leicht, daß, wenn die Grundzahl K positiv angenommen wird, Logarithmen für negative Zahlen unmöglich sind, indem K^{α}, welches auch immer der Werth von α sein mag, nie einen negativen Zahlenwerth annehmen kann.

§. 126. *Berechnung der Logarithmen. Denkt man sich durch die Erhebung irgend eines Grundfactors zur Potenz eines ganzen und positiven Exponenten eine Zahlenreihe gebildet, so wird dieselbe um so lückenhafter ausfallen, je größer der Grundfactor ist, wie die Vergleichung folgender Reihen zeigt.

Wenn a =	1	2	3	4	5	6
so ist 2^a =	2	4	8	16	32	64
. . . 4^a =	4	16	64	256	1024	4096
. . 6^a =	6	36	216	1296	7776	46656
. . . 8^a =	8	64	512	4096	32768	262144
. . 10^a =	10	100	1000	10000	100000	1000000

Für jede andere, zwischen die Glieder einer solchen Zahlenreihe fallende ganze Zahl A muß der gehörige Exponent nothwendig ein Bruch von der Form $\frac{k}{m}$ sein, so daß die Berechnung der Logarithmen, wenn man sie ohne Hülfe höherer Rechnungen ausführen will, nur durch Wurzel-Ausziehungen geleistet werden kann. Man nehme

zu diesem Ende, wenn Logarithmen für die Grundzahl 10 berechnet werden sollen, $k=1$, $m=2, 4, 8, 16$ u. s. w an, und entwerfe (nach §. 103.) durch fortgesetzte Ausziehung der Quadratwurzel d. h. durch Berechnung von $\sqrt{10}$, $\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}$, $\sqrt[8]{10}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$ u. s. w. eine Hülfstafel, worin die Exponenten und die zugehörigen Zahlen etwa bis auf 7 Decimalstellen angegeben sind, wie sie hier folgt:

Ausziehungen der Quadratwurzel.	Zahlen.	Exponenten oder Logarithmen.
0	10,000 0000	1,000 0000
1	3,162 2777	0,500 0000
2	1,778 2794	0,250 0000
3	1,333 5214	0,125 0000
4	1,154 7819	0,062 5000
5	1,074 6078	0,031 2500
6	1,036 6329	0,015 6250
7	1,018 1517	0,007 8125
8	1,009 0350	0,003 9062
9	1,004 5073	0,001 9531
10	1,002 2511	0,000 9765
11	1,001 1249	0,000 4882
12	1,000 5623	0,000 2441
13	1,000 2811	0,000 1220
14	1,000 1405	0,000 0610
15	1,000 0702	0,000 0305
16	1,000 0351	0,000 0152
17	1,000 0175	0,000 0076
18	1,000 0087	0,000 0038
19	1,000 0043	0,000 0019
20	1,000 0021	0,000 0009
21	1,000 0010	0,000 0004
22	1,000 0005	0,000 0002
23	1,000 0002	0,000 0001
24	1,000 0001	0,000 0000

Vermittelst dieser Tafel findet man den Log. einer Zahl A, die zwischen 1 und 10 fällt, nährungsweise bis auf 5 Decimalen. indem man die nächst kleinere in ihr aufsucht, dadurch A dividirt, den

Quotienten B wieder durch die nächst kleinere Zahl dividirt u. s. f., bis man einen Quotienten erhält, der nur Millionentheilchen hat. Der gesuchte Logarithmus ist dann die Summe aller Exponenten ($\alpha + \beta + \gamma \ldots$) der successiven Divisoren, weil nach dem angegebenen Verfahren:

$$\frac{A}{10^\alpha} = B; \quad \frac{B}{10^\beta} = C; \quad \frac{C}{10^\gamma} = D; \quad \frac{D}{10^\delta} = E;$$

also $A = 10^\alpha . 10^\beta . 10^\gamma . 10^\delta \ldots . = 10^{\alpha+\beta+\gamma+\delta \ldots}$ ist. Da aber jede, zwischen den Potenzen 1, 2, 3, 4 .... von 10 liegende Zahl einen unächten Bruch zum Log. hat, in sofern der ihr zugehörige Exponent zwischen den ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 .... liegen muß, so ist sie von der Form $10^{a+\frac{k}{m}} = 10^a . 10^{\frac{k}{m}}$ und die Berechnung ihres Logarithmus kann daher in jedem Falle auf die eines ächtgebrochenen Logarithmus $\frac{k}{m}$ zurückgeführt werden.

§. 127. Logarithmentafeln. Man findet die zur Grundzahl 10 gehörigen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000 oder 100000, und zwar bis auf 5 oder 7 Decimalstellen berechnet, in den gebräuchlichen Tafeln der (gemeinen oder Briggischen) Logarithmen zusammengestellt. Diese geben sowohl den Log. einer bestimmten Zahl, die man als Potenz von 10 betrachtet, als auch umgekehrt für jeden gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl im dekadischen Systeme; nur muß man dem Log. noch die ganze Zahl vorsetzen, welche (nach §. 78.) den Rang der gegebenen bestimmt und leicht aus der höchsten ihrer Ziffern erkannt wird. So findet man z. B. als log. 5165 die Zahl 7130703, welcher 3 als Rangzahl der Tausende vorzusetzen ist, und hat folglich

$$\begin{aligned} \log. 5165 &= 3{,}7130703 \\ \log. 516500 &= 5{,}7130703 \\ \log. 516{,}5 &= 2{,}7130703 \\ \log. 5{,}165 &= 0{,}7130703 \end{aligned}$$

Man nennt den Inbegriff der in den Tafeln enthaltenen Decimalstellen eines Log. seine Mantisse und die von dem Rechner vorzusetzende Rangzahl die Kennziffer oder Charakteristik desselben. Jene bezieht sich auf die Ziffern, welche eine Zahl bilden, und ist die nämliche für gleichziffrige von verschiedenem Range, wie in vorstehendem Beispiele. Beim Aufschlagen eines Log. kommt sie allein in Betracht, bei der Angabe des Ranges der gegebenen Zahl allein die Kennziffer. Eben so erhält man umgekehrt beim Aufschlagen einer Zahl zu einem gegebenen Log. durch die Tafeln deren Ziffern, durch die Charakteristik ihren Rang. Es ist z. B.

9630319 Mantisse von Log. 9184 . . . .
also 0,9630319 = log. 9,184
4,9630319 = log. 91840
7,9630319 = log. 91840000. (Aufg. 4—8, §. 133.)

§. 128. Proportionaltheile. Will man für eine größere Zahl, welche in den Logarithmentafeln nicht enthalten ist, den zugehörigen Logarithmus finden, so muß man diejenigen beiden Zahlen aufschlagen, zwischen welche (wenn man die gehörigen Nullen angehängt) die gegebene fallen würde, und die Logarithmen derselben von einander abziehen. Von dieser Differenz ist dann dem Logarithmus der kleineren Zahl ein, dem Ueberschuß der gegebenen über dieselbe proportionaler, Theil noch hinzuzufügen, um den gesuchten Logarithmus (wenn auch nicht ganz genau, doch wenigstens näherungsweise) zu bestimmen. So finden wir z. B. log. 856742 mit Hülfe der kleineren Tafeln durch Aufschlagen von log. 856700 = 5,93283 und log. 856800 = 5,93288. Die Differenz der Zahlen ist hier = 100, die ihrer Logarithmen = 5, und der Ueberschuß der gegebenen über die kleinere Zahl = 42, folglich

$$\frac{x}{5} = \frac{42}{100},$$

mithin $x = \frac{42 . 5}{100} = 2{,}10$ und log. 856742 = log. 856700 + x.

$$= 5{,}93283 + 0{,}00002 = 5{,}93285.$$

Wäre umgekehrt der Logarithmus gegeben, und die zugehörige Zahl genauer zu bestimmen, als die Tafeln sie unmittelbar darbieten, so dient dasselbe Verfahren, um die gewünschten spätern Ziffern (Z) derselben aufzufinden. Man suche z. B. die Zahl für den Logarithmus 5,31456 bis auf die Einer genau, so geben die kleinern Tafeln

5,31471 = log. 206400
5,31450 = log. 206300;

der Unterschied der Zahlen ist hier = 100, der der Logarithmen = 21, und der Ueberschuß des gegebenen über den kleinern = 6, folglich

$$\frac{Z}{100} = \frac{6}{21},$$

$$\text{also } Z = \frac{600}{21} = 29, \text{ und } N = 206300 + 29 = 206329.$$

Die größeren logarithmischen Tafeln erleichtern die Auffindung von Zahlen und Logarithmen durch Angabe dieser Proportionaltheile (partes proportionales) für jede der unvollständigen Zahl noch hinzuzufügende Ziffer in einer besondern Spalte am Ende. Will man mehre Ziffern hinzufügen, oder deren Einfluß auf den Logarithmus angeben, so muß man — weil ihr Rang mit der Stelle abnimmt

— auch die entsprechenden Proportionaltheile stets um eine Stelle zurücksetzen. Werde z. B. log. 95429648 gesucht, so finden wir

$$\begin{aligned} \text{mant. log. } 95429 &= 9796804 \\ \text{p.p.}6 &= 27 \\ \text{p.p.}4 &= 18 \\ \text{p.p.}8 &= 36 \\ \hline \text{Summe} &= 9796833{,}16 \end{aligned}$$

Also log. 95429648 = 7,9796833. (Aufg. 9, 10, §. 133.)

§. 129. **Negative Logarithmen.** Da eine Potenz mit ganzem negativen Exponenten $\left(K^{-n} = \frac{1}{K^n}\right)$ wenn die Grundzahl $K > 1$, ein ächter Bruch sein muß, so können in dem gemeinen Logarithmensystem negative Logarithmen nur zu gebrochenen Zahlenwerthen gehören. Ist log. $A = \alpha$, also $A = 10^\alpha$, so folgt, daß $\frac{1}{A} = \frac{1}{10^\alpha} = 10^{-\alpha}$ und log. $\left(\frac{1}{A}\right) = -\alpha$. Man findet mithin (1) die zu einem negativen Logarithmus gehörige Zahl, indem man die des positiven aus den Tafeln nimmt und als Nenner eines Bruchs ansetzt, dessen Zähler die Einheit ist. Umgekehrt wird (2) der Logarithmus eines ächten Bruchs dadurch bestimmt, daß man diesen unter die Form $\frac{1}{A}$ bringt und den Log. von A mit negativem Vorzeichen setzt. So ist z. B.

$$(1)\quad -0{,}20412 = \log.\left(\frac{1}{1{,}6}\right) = \log.\left\{\frac{1}{\frac{8}{5}}\right\} = \log.\ \frac{5}{8}.$$

$$(2)\quad \log.\ \frac{4}{5} = \log.\left\{\frac{1}{\frac{5}{4}}\right\} = \log.\left(\frac{1}{1{,}25}\right) = -0{,}096910.$$

Eine bequemere Behandlung der Bruchform durch Logarithmen ergiebt sich indessen aus Nr. II. des folgenden §., in sofern man (nach §. 22.) berechtigt ist, jede Bruchform als einen Quotienten zu betrachten. (Aufg. 11—13, §. 133.)

§. 130. **Die Rechnungsart mit Logarithmen.** Durch Ausführung der vier Grundoperationen mit Logarithmen lassen sich große und weitläufige Rechnungen, namentlich die Ausziehung von Wurzeln jedes beliebigen Grades, in der Regel sehr schnell und ohne besondere Mühe erledigen. Diese Erleichterung und Abkürzung der Rechnung, wodurch der Gebrauch der Logarithmentafeln für die praktische Arithmetik so wichtig erscheint, beruht auf den im vorigen Capitel (§. 116—120.) entwickelten allgemeinen Regeln der Potenzenrechnung, welche in Beziehung auf die Logarithmen folgendergestalt ausgesprochen werden müssen. (Aufg. 11—13, §. 133.)

I. Die **Addition** der Logarithmen zweier Zahlen giebt zur **Summe** den Log. ihres Products. Wenn $A = 10^a$ und $B = 10^b$, so ist $A.B = 10^{a+b}$, mithin $a + b = \log. (A.B)$.

Um also das Product zweier Zahlen zu berechnen, addire man ihre Logarithmen und suche die der Summe entsprechende Zahl in den Tafeln auf. So findet man z. B. für 243 . 49,5

$$\begin{array}{rl} \log.\ 243 &= 2{,}38561 \\ +\log.\ 49{,}5 &= 1{,}69461 \\ \hline & 4{,}08022 = \log.\ 12028. \end{array}$$

II. Die Subtraction der Logarithmen zweier Zahlen giebt zur Differenz den Log. ihres Quotienten. Wenn $P = 10^p$ und $D = 10^d$, so ist $\frac{P}{D} = \frac{10^p}{10^d} = 10^{p-d}$, mithin $p - d = \log. \left(\frac{P}{D}\right)$. Man berechnet also den Quotienten zweier Zahlen durch Abziehen ihrer Logarithmen und Aufschlagen des Unterschiedes derselben in den Tafeln; z. B. $\frac{45372}{736{,}4}$ folgendergestalt:

$$\begin{array}{rl} \log.\ 45372 &= 4{,}65679 \\ -\log.\ 736{,}4 &= 2{,}86711 \\ \hline & 1{,}78968 = \log.\ 61{,}61. \end{array}$$

III. Die Multiplication des Logarithmus einer Zahl durch eine andere m giebt zum Product den Log. ihrer mten Potenz. Wenn $A = 10^a$, so ist $A^m = (10^a)^m = 10^{am}$, also $m . a = \log. (A^m)$. Soll man mithin eine Zahl zu einer höhern Potenz erheben, so geschieht dies bei Anwendung der Logarithmen durch einfache Multiplication des Log. mit dem Exponenten. So ist z. B. für $4{,}23^5$:

$$\begin{array}{rl} \log.\ 4{,}23 &= 0{,}62634 \\ & \times 5 \\ \hline & 3{,}13170 = \log.\ 1354{,}25\ \ldots \end{array}$$

IV. Die Division des Logarithmus einer Zahl durch eine andere k giebt zum Quotienten den Log. ihrer kten Wurzel. Wenn $A = 10^a$, so ist $\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{10^a} = 10^{\frac{a}{k}}$, also $\frac{a}{k} = \log. \sqrt[k]{A}$. Die Wurzelausziehung geschieht folglich sehr einfach durch Division des Logarithmus. Man erhält z. B. für $\sqrt[13]{4915000}$:

$$\begin{array}{rl} \log.\ 4915000 &= 6{,}69152 \\ & :13 \\ \hline & 0{,}51473 = \log.\ 3{,}271. \end{array}$$

(Aufg. 14—30, §. 133.)

Anmerkung. Durch die Log. ist man im Stande, auch solche Gleichungen zu lösen, in denen die unbekannte Zahl im Exponenten enthalten ist, indem man Regel III. auf dergl. Ausdrücke anwendet. Sei z. B.

$$A^{mx+a} \times B^{nx+b} = C^{px+c}$$

die gegebene Gleichung, worin die Unbekannte x aus den bekannten Zahlen zu bestimmen ist, so hat man:

$$(mx + a) \log. A + (nx + b) \log. B = (px + c) \log. C$$

und nach gehöriger Auflösung

$$x = \frac{c \log. C - a \log. A - b \log. B}{m \log. A + n. \log. B - p. \log. C}$$

§. 131. Dekadische Ergänzung. Ein besonderes Erleichterungsmittel für die logarithmische Rechnung besteht darin, daß man auch für die Divisoren eines Ausdrucks, deren Logarithmen negativ angesetzt werden müßten, additive einführt, indem man die dekadische Ergänzung (complementum logarithmi) jener nimmt. Soll $\frac{A}{B}$ durch Logarithmen berechnet werden, so geschieht dieses nach dem Ausdruck log. A — log. B. Damit ist nun die Form log. A + (10 — log. B) — 10 durchaus einerlei, gewährt aber den Vortheil, daß bei ihrem Gebrauch die dekadische Ergänzung (10 — log. B) addirt wird, wo man sonst log. B subtrahiren müßte. Dies gilt für beliebig viele Divisoren, bei deren dekadischer Ergänzung jedoch immer die angehängten — 10 zu beachten und im Resultat zu subtrahiren sind, wenn dasselbe den Log. des gesuchten Quotienten geben soll. Das allgemeine Schema für dieses Verfahren ist,

$$\log. \left(\frac{A.C.E..}{B.D.F..}\right) = \log. A + \log. C + \log. E + \text{etc.}$$
$$+ \text{compl. log. } B - 10 + \text{c. log. } D - 10 + \text{etc.}$$

und ein Beispiel in Zahlen das folgende:

$$\begin{aligned} \log. \left(\frac{3240 \,.\, 5698}{2{,}73 . 45 . 6812}\right) &= \log. 3240 = 3{,}51055 \\ &+ \log. 5698 = 3{,}75572 \\ &+ \text{c. log. } 2{,}73 = 9{,}56384 - 10 \\ &+ \text{c. log. } 45 = 8{,}34679 - 10 \\ &+ \text{c. log. } 6812 = 6{,}16673 - 10 \\ \hline &\quad 31{,}34363 - 30 \end{aligned}$$

d. h. 1,34363; der Log. von 22.06. (Aufg. 31, 32. §. 133.)

§. 132. *Logarithmen für Summen und Differenzen. Obgleich die gewöhnlichen oder Brigg'schen Logarithmen nach dem Vorhergehenden in allen den Fällen die größte Erleichterung gewähren, wo die Form der Rechnung Bildung von Producten und Quotienten, Potenzirung und Wurzel-Ausziehung fordert, so erscheinen sie doch völlig unanwendbar für Summen- und Differenzformen. Da aber dergleichen Formen sich sehr häufig in Verbindung mit jenen andern ergeben und ihre Umgestaltung in eine für die Logarithmenrechnung brauchbare Form höchstens mit vielen Weitläufigkeiten zu erreichen ist, so wird durch die Gauß'schen

Logarithmen welche ausschließlich für die Berechnung von Summen und Differenzen bestimmt sind, eine sehr wesentliche Ergänzung zu den gewöhnlichen Logarithmentafeln geliefert*). Die Einrichtung dieser Tafeln, welche drei, durch die Buchstaben **A**, **B**, **C** bezeichnete Spalten enthalten, beruht auf folgenden einfachen Betrachtungen.

Man hat für die Form einer Summe $(p + q)$ oder einer Differenz $(p - q)$ folgende identische Gleichungen:

$$(1)\ p + q = p \cdot \left(\frac{p+q}{p}\right);\quad (2)\ p - q = p : \left(\frac{p}{p-q}\right).$$

Folglich nach (1) $\log.\ (p + q) = \log.\ p + \log.\ \left(\frac{p+q}{p}\right)$.

Ferner nach (2) $\log.\ (p - q) = \log.\ p - \log.\ \left(\frac{p}{p-q}\right)$.

Die Logarithmen der Summe $(p + q)$ oder Differenz $(p - q)$ erscheinen mithin in diesen Ausdrücken als Summe oder Differenz zweier Logarithmen, von denen der erste als unmittelbar gegeben zu betrachten ist, der zweite aber durch die Gauß'schen Tafeln gefunden werden kann. Es enthält nämlich in denselben:

I. die Spalte **A** Logarithmen von Zahlen der Form $\left(\frac{p}{q}\right)$, aufsteigend von 0.000 bis 5.000;

II. die Spalte **B** Logarithmen von Zahlen der Form $\left(\frac{p+q}{p}\right)$, absteigend von 0.30103 bis 0.00000;

III. die Spalte **C** Logarithmen von Zahlen der Form $\left(\frac{p+q}{q}\right)$, aufsteigend von 0.30103 bis 5.00000.

Da nun $\log.\ \left(\frac{p}{q}\right) = \log.\ p. - \log.\ q$, vermöge der Tafeln der gemeinen Logarithmen gegeben ist, so hat man zunächst die Differenz der Logarithmen, von p und q zu bestimmen, ihren Zahlenwerth in der Spalte **A** aufzusuchen und die zugehörige Zahl aus der Spalte **B** anzumerken. Die Addition dieser Zahl zu log. p giebt alsdann nach (1) den gesuchten Logarithmus der Summe $(p + q)$.

Will man dagegen nach (2) den Logarithmus der Differenz $(p - q)$ aus $\log.\ p - \log.\ q$ bestimmen, so hat man zwei verschiedene Fälle zu beachten:

---

*) Man findet diese Logarithmen in der neuesten Ausgabe von Vega's Logarithmentafeln, so wie in den von Köhler u. A. herausgegebenen Tafeln fünfstelliger Logarithmen. Etwas abweichend ist die Einrichtung in den neueren Tafeln von August und von F. H. T. Müller.

a) der Quotient $\frac{p}{q}$ sei < 2, also log. p — log. q < 0.30103, so darf man diese Differenz nur in der Spalte **B** aufsuchen und den nebenstehenden Log. in der Spalte **C** von log. p subtrahiren. Denn sind die Zahlen, worauf **B** sich bezieht, von der Form $\frac{p}{q}$, so enthält **C** die Logarithmen solcher von der Form $\left(\frac{p}{p-q}\right)$.

b) der Quotient $\frac{p}{q}$ sei > 2, also log. p — log. q > 0.30103, und daher in der Columne **C** enthalten, so zieht man den zugehörigen Log. aus der Spalte **B** von log. p ab. Denn wenn die Zahlen, worauf **C** sich bezieht, $= \frac{p}{q}$ gesetzt werden, so sind die entsprechenden für $B = \left(\frac{p}{p-q}\right)$.

Daß vorstehende Beziehungen unter den Zahlen für **B** und **C** wirklich stattfinden, erkennt man leicht, indem man in **II.** und **III.** die eine der Formen $\frac{p+q}{p}$ oder $\frac{p+q}{q} = \frac{x}{y}$ setzt und die andere danach bestimmt.

Folgende Beispiele mögen das Vorstehende näher erläutern:

(1) Aus log. p = 3.24502 und log. q = 2.74194 soll log. (p + q) bestimmt werden. Hier ist der in **A** aufzusuchende Werth von log. p — log. q = 0.50308, und der zugehörige Log. in der Spalte B = 0.11861, folglich

log. p + B = 3.24502 + 0.11861 = 3.36363 = log. 2310

(2a) Aus log. p = 3.32675 und log. q = 2.09482 den Log. von (p — q) zu bestimmen, findet man, mit Berücksichtigung der Proportionaltheile, für den Werth von log. p — log. q in der Spalte **B** den correspondirenden Log. in C = 0.38325; folglich

log. p — C = 3.32675 — 0.38325 = 2.94350 = log. 878

(2b) Aus log. p = 2.64207 und log. q = 1.87640 findet man den log. (p — q), indem man von dem nächsten Werth für log. p — log. q = 0.76567 in der Spalte **C** den zugehörigen Log. aus B = 0.08171 subtrahirt; also

log. p — B = 2.64607 — 0.0871 = 2.56036 = log. 363,4.

§. 133. Aufgaben.

1. Den Log. der Zahl 8 ursprünglich zu berechnen.
2. Eben so die Log. von 7; 70; 700; 7000; 70000.
3. Eben so die Log. von 356; 35600; 3560000.
4. Aus den Tafeln die Log. von 314; 3,721; 41,2 aufzusuchen.
5. Eben so von 7315; 841,6; 91,75; 34760; 1708000.

6. Man suche die Zahlen für die Log. 0,13130; 4,56502.
7. Eben so für die Log. 3,6520528; 7,4891144; 2,2000293.
8. Eben so für die Log. 4,49010; 0,66200; 5,72403; 1,30103.
9. Man bestimme durch Rücksicht auf die Proportionaltheile die Log. der Zahlen 314761; 440736; 37023400; 2111768.
10. Eben so die Log. von 22,3345; 137,2014; 46,27835.
11. Man suche die Log. der ächten Brüche 0,75; 0,341; 0,7391.
12. Eben so die Log. von 0,0347; 0,000536; 0,0000083.
13. Eben so die Log. von $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{4}{13}$; $\frac{7}{40}$.
14. Man suche durch Log. das Product von 9,734 und 5,639 näherungsweise.
15. Eben so $35,98 \times 7,433 \times 6,543 \times 29,78$.
16. Eben so $22,74 \times 31,201 \times 0,0067 \times 0,9298$.
17. Man dividire 3758000 durch 4986.
18. Eben so $16,87 : 0,07658$ und $1,687 : 7,658$.
19. Eben so $14,307 : 30415$; $761,23 : 0,00871$; $3,16 : 0,942$.
20. Man suche die Log. von $\frac{7}{133}$; $\frac{125}{114}$; $\frac{31}{4566}$; $\frac{734}{1000}$; $\frac{1}{3946}$.
21. Man berechne durch Log. die Potenz $(5486)^4$ näherungsweise.
22. Eben so die Potenzen $(37,49)^9$; $(106,4)^5$; $(0,032)^7$; $(7,0034)^8$).
23. Eben so $\left(\frac{1}{2}\right)^{32}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^4$; $\left(\frac{1}{32}\right)^5$; $\left(\frac{3}{8}\right)^4$; $\left(\frac{127}{100}\right)^{13}$;
24. Eben so $\left(3+\frac{1}{5}\right)^6$; $\left(4-\frac{1}{3}\right)^8$; $\left(7+\frac{20}{21}\right)^9$; $\left(100-\frac{1}{100}\right)^3$.
25. Man suche durch Log. die Cubikwurzel aus 1728000.
26. Eben so $\sqrt[3]{34,782}$; $\sqrt[4]{23990}$; $\sqrt[5]{628,73}$.
27. Eben so $\sqrt[7]{\left(\frac{1337}{2239}\right)}$; $\sqrt[10]{\left(\frac{9466}{8871}\right)}$; $\sqrt[12]{\left(\frac{120300}{7098}\right)}$.
28. Eben so $\sqrt[34]{(7368)}$; $\sqrt[100]{(45390000)}$; $\sqrt[77]{(800,9)}$.
29. Eben so $\sqrt[11]{(1347)^8}$; $\sqrt[9]{(70,44)^{11}}$; $\sqrt[20]{(866,4)^{19}}$.
30. Eben so $\sqrt[3]{\left(\frac{1722}{3347}\right)^5}$; $\sqrt[7]{\left(\frac{0,006}{8,48}\right)^{25}}$; $\sqrt[4]{\left(\frac{72,93}{0,086}\right)^7}$.
31. Man berechne mit Hülfe der dekadischen Ergänzung den Ausdruck $\left(\frac{27630 \times 2678 \times 5428}{36940 \times 5302 \times 7013}\right)$.
32. Eben so $\left(\frac{207,3 \times 50,66 \times 38,09 \times 2713 \times 0,098}{344 \times 0,763 \times 0,4 \times 6,984 \times 7034,2}\right)$.
33. Man suche durch die Gauß'schen Logarithmen den Log. der Summenform $\sqrt[3]{(200)} + \sqrt[3]{(100)}$.
34. Eben so den Log. von $\{(0,7345)^8 + (2349)^8\}$.

35. Eben so den Log. der Diff. $(\sqrt[5]{36} - \sqrt[5]{27})$.
36. Eben so den Log. von $\{(3{,}237)^{14} - (0{,}9864)^{15}\}$.
37. Eben so den Log. von $(37{,}54 \,.\, 614 + 24{,}13 \,.\, 264)$.
38. Eben so den Log. von $(261 \,.\, 421 - 94 \,.\, 862)$.
39. Eben so den Log. von $\frac{34768}{9876} + \frac{54780}{35462}$.
40. Eben so den Log. von $\frac{144{,}52}{86{,}5} - \frac{107{,}33}{79{,}4}$.

Sechstes Capitel.

Die Progressionen.

§. 134. Differenz- und Verhältnißreihen. Es giebt für die Bildung einer fortlaufenden Zahlenreihe, welche allgemein durch $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots\ldots a_n$ angedeutet werden möge, sofern man die Grundoperationen anwenden will, zwei sehr einfache Wege: ihre Glieder lassen sich nämlich entweder durch fortgesetzte Addition einer positiven oder negativen Zahl, oder durch fortgesetzte Multiplication mit einem ganzen oder gebrochenen Factor aus einander erzeugen. Von der ersten Art sind die Reihen

$$1\quad 3\quad 5\quad 7\quad 9\quad 11\quad 13\quad 15 \ldots.$$
$$100\quad 97\quad 94\quad 91\quad 88\quad 85\quad 82\quad 79 \ldots.$$

allgemein $a\ (a+d)\ (a+2d)\ (a+3d)\ (a+4d)\ (a+5d) \ldots\ldots (a+nd)$;

von der zweiten Art die folgenden:

$$1\quad 2\quad 4\quad 8\quad 16\quad 32\quad 64\quad 128 \ldots$$
$$729\quad 243\quad 81\quad 27\quad 9\quad 3\quad 1\quad \tfrac{1}{3} \ldots$$

allgemein $a\quad af\ af^2\ af^3\ af^4\ af^5\ af^6 \ldots. af^n$.

Da in der einen Art solcher Reihen die Differenz, in der andern aber das Verhältniß je zwei benachbarter Glieder unverändert bleibt, so würde man sie am passendsten Differenz- oder Verhältnißreihen nennen, gebraucht aber nach altem Herkommen allgemeiner die Benennungen von arithmetischen oder geometrischen Progressionen, welche sich auf den Umstand gründen, daß zwei Paare auf einander folgender Glieder (nach §. 70.) in arithmetischer oder geometrischer Proportion stehen. Beide Progressionen können steigend oder fallend sein, je nachdem die Differenz d additiv oder subtractiv und der Factor f größer oder kleiner als die Einheit ist, wie die obigen Beispiele zeigen. Nimmt man als

Factor eine negative Zahl an, so wird die geometrische Progression abwechselnd positive und negative Glieder enthalten und sich daher in zwei andere zerlegen lassen.

§. 135. **Arithmetische Progression.** Aus dem gleichförmigen Fortschritte einer Zahlenreihe mit gleichen Differenzen ergiebt sich ein bestimmter Zusammenhang zwischen dem Anfangsgliede a_1, irgend einem beliebigen (nten) Gliede a_n, der Differenz d, der Menge der Glieder n, und ihrer Summe s, wonach man aus drei bekannten dieser Stücke das vierte unbekannte finden kann. Da nämlich die Zunahme der Glieder, von a_1 und die Abnahme von a_n an gerechnet, gleichmäßig fortschreiten, so müssen je zwei, von beiden gleichweit abstehende Glieder dieselbe Summe, wie diese geben und man darf den Werth jedes solchen Gliederpaars $= a_1 + a_n$ nur mit der Anzahl aller Paare $= \frac{1}{2}n$ multipliciren, um den Ausdruck für die Summe der Reihe von a_1 bis a_n und daraus durch Umformung die übrigen Formeln zu erhalten.

$$\text{I. } s = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad \text{V: } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{II. } a_1 = \frac{2s}{n} - a_n \qquad \text{VI. } a_1 = a_n - (n-1)d$$

$$\text{III. } a_n = \frac{2s}{n} - a_1 \qquad \text{VII. } d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

$$\text{IV. } n = \frac{2s}{a_1 + a_n} \qquad \text{VIII. } n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1.$$

Durch Elimination lassen sich aus diesen 8 noch andere 12 (zum Theil quadratische) Gleichungen unter den Zahlen a_1, a_n, d, n, s ableiten.

Anmerkung. Ist die arithmetische Progression die Reihe der natürlichen Zahlen, so findet man $s = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(S. Aufg. 1—7, §. 144.)

§. 136. **Geometrische Progression.** Für die Verhältnißreihe findet man den, ebenfalls in 20 verschiedenen Formeln darstellbaren, Zusammenhang zwischen dem Anfangsgliede a_1, dem Factor f, dem Endgliede a_n, der Anzahl der Glieder n, und ihrer Summe s dadurch, daß man von der, mit f multiplicirten, die einfache Reihe abzieht. Denn es ist, wenn

$$\begin{array}{rl} a + af + af^2 + af^3 + af^4 \ldots\ldots\ldots + af^{n-1} &= s \\ af + af^2 + af^3 + af^4 \ldots\ldots\ldots + af^{n-1} + af^n &= sf \\ \hline \end{array}$$

die Differenz $af^n - a = sf - s$,

oder $a(f^n - 1) = s(f - 1)$, also

$$\text{I. } s = \frac{a(f^n - 1)}{f - 1} \qquad \text{III. } f^n - \frac{s}{a}f = 1 - \frac{s}{a}$$

$$\text{II. } a = \frac{s(f-1)}{f^n - 1} \qquad \text{IV. } f^n = \frac{sf - s + a}{a}$$

V. $a_n = a_1\, f^{n-1}$ VII. $f = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$

VI. $a_1 = \frac{a_n}{f^{n-1}}$ VIII. $f^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$.

Die Werthe von n ergeben sich aus Formel 4 und 8 nur mit Hülfe der Logarithmen. Die dritte Formel ist zur directen Berechnung von f unbrauchbar. Zwölf andere lassen sich auch hier durch Elimination finden. (S. Aufg. 8—13, §. 144.)

Es ist zu bemerken, daß zwei Verhältnißreihen des nämlichen Factors und von gleicher Gliederzahl zu einander im Verhältniß ihrer Anfangsglieder stehen. Denn man hat

$$(a + af + af^2 \ldots + af^n) : (b + bf + bf^2 \ldots\ldots + bf^n) =$$
$$a(1 + f + f^2 \ldots + f^n) : b(1 + f + f^2 \ldots\ldots + f^n) = a : b.$$

§. 137. Abnehmende Progression. Ist der Factor der geometrischen Progression ein ächter Bruch, so bewirkt er eine, der Gränze o sich immer mehr nähernde, Verminderung ihrer Glieder. Da aber deren Anzahl in diesem Falle als unendlich betrachtet werden muß, so kann man die Reihe als Entwickelung des Ausdrucks $\frac{a}{1-f}$, und diesen selbst als ihren geschlossenen Werth oder ihre Summe ansehen. Denn durch wirklich vollzogene Division findet man

$$(1)\quad \frac{a}{1-f} = a + af + af^2 + af^3 + \ldots . af^n + \text{ꝛc.}$$

d. h. die allgemeine Form der in's Unendliche fortschreitenden Verhältnißreihe. Ist eine solche Reihe auch nicht fähig, im eigentlichen Sinne summirt zu werden, so darf man doch jenen geschlossenen Ausdruck, als dessen unvollständige Entwickelungsform sie erscheint, als die Gränze, welcher ihr Totalwerth sich unaufhörlich nähert und somit als ihre Summe betrachten. Multiplicirt man die vorstehende Gleichung auf beiden Seiten durch f, so lassen sich nach der allgemeinen Form

$$(2)\quad \frac{af}{1-f} = af + af^2 + af^3 + af^4 + af^5 + \ldots + af^n \ldots$$

periodische Decimalbrüche auf geschlossene Bruchformen zurückführen, indem man durch a die Ziffern der Periode, durch n ihre Anzahl und durch f den Factor $\frac{1}{10^n}$ bezeichnet, denn jeder periodische Decimalbruch fällt unter die Form

$$\frac{a}{10^n} + \frac{a}{10^{2n}} + \frac{a}{10^{3n}} + \text{ꝛc.}$$

welche nach (2) $= \frac{a \cdot \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{a}{10^n - 1}$ zu setzen ist.

Nach diesem Ausdruck findet man z. B. (vergl. §. 84, Anm.)

$$1)\ 0{,}040404 \ldots = \frac{4}{10^2 - 1} = \frac{4}{99},$$

$$2)\ 0{,}156156 \ldots = \frac{156}{10^3 - 1} = \frac{156}{999} = \frac{52}{333}.$$

Ist $a = f$, so wird der Ausdruck (1) zu folgendem:

$$(3)\ \frac{f}{1 - f} = f + f^2 + f^3 + f^4 + f^5 \ldots\ldots + f^n.$$

Hiernach läßt sich jede beliebige Zahl k in Form einer unendlichen Reihe darstellen. Denn wird $f = \frac{k}{k+1}$ gesetzt, so erhält man:

$$(4)\ k = \left(\frac{k}{k+1}\right) + \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{k}{k+1}\right)^3 \ldots \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \ldots$$

So ist z. B. wenn $k = 9$ angenommen wird:

$$9 = \left(\frac{9}{10}\right) + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 \ldots\ldots \left(\frac{9}{10}\right)^n \ldots\ldots$$

oder wenn man $k = \frac{7}{8}$ setzt.

$$\frac{7}{8} = \left(\frac{7}{15}\right) + \left(\frac{7}{15}\right)^2 + \left(\frac{7}{15}\right)^3 \ldots\ldots \left(\frac{7}{15}\right)^n \ldots\ldots$$

Setzt man hingegen in (1) $a = 1$, so ergiebt sich

$$(5)\ \frac{1}{1 - f} = 1 + f + f^2 + f^3 \ldots\ldots + f^n \ldots\ldots$$

und wenn $-f$ statt $+f$ gesetzt wird:

$$(6)\ \frac{1}{1 + f} = 1 - f + f^2 - f^3 \ldots\ldots \pm f^n \ldots\ldots$$

(S. Aufg. 14—20, §. 144.)

---

§. 138. **Zinsrechnung.** Die Progressionen finden die mannigfachste Anwendung, u. A. in der einfachen und zusammengesetzten Zinsrechnung, wo der Zusammenhang eines Capitels C, seines Ertrages E nach n Jahren und des Zinsfußes f in allgemeinen Formeln dargestellt wird, die es möglich machen, jede einzelne dieser Größen aus den drei andern gegebenen zu bestimmen. Unter dem Zinsfuß wird hier der jährliche Ertrag der Einheit von C verstanden, z. B. 0,05 der Einheit, wenn 5 von Hundert gegeben werden. Es ist demnach im Allgemeinen f als ein **ächter** Bruch, und zwar in der Regel nur einige Hundert- oder Tausend-Theile betragend, anzusehen.

A. Einfache Zinsrechnung.

Nimmt man an, daß die am Ende eines jeden Jahres fälligen Zinsen nicht zum Capital geschlagen werden und dieses fortgesetzt vermehren dürfen, so wächst dasselbe nach dem Gesetze der arithmetischen Progression C, C + fC, C + 2fC, u. s. f. und wird nebst den aufgehäuften Zinsen am Ende des nten Jahres

$$\text{I. } E = C + nfC = C\ (1 + nf).$$

Der Ausdruck für das anfängliche Capital, wenn man Ertrag, Zinsfuß und Jahre kennt, ist demnach

$$\text{II. } C = \frac{E}{1 + nf};$$

ferner derjenige des Zinsfußes, aus C, E, n:

$$\text{III. } f = \frac{1}{n}\left(\frac{E}{C} - 1\right)$$

und endlich der Anzahl der Jahre aus C, E, f:

$$\text{IV. } n = \frac{1}{f}\left(\frac{E}{C} - 1\right)$$

Wäre n Jahre lang, jährlich ein Capital C ausgezahlt, so würde der gegenwärtige Werth dieser ganzen Summe mit Anrechnung der einfachen Zinsen jeder Zahlung folgende Progression bilden, indem die erste Zahlung (n — 1) Jahre hindurch zinsentragend war u. s. f. bis auf die letzte, ohne Zinsen auszuzahlende:

$$s = C\ (1 + [n - 1]\ f) + \ldots\ldots + C\ (1 + 2f) +$$
$$C\ (1 + f) + C; \text{ d. i. nach §. 315, I.}$$

$$\text{V. } s = C\ (2 + (n - 1)\ f) \cdot \frac{n}{2} = C\ \left(1 + \left(\frac{n-1}{2}\right) f\right) \cdot n.$$

(S. Aufg. 21, 22, §. 144.)

B. Zusammengesetzte Zinsrechnung.

Wichtiger ist die Voraussetzung, daß die Zinsen jedes Jahrs, sofern sie mit dem Capital vereinigt bleiben, als eine Vermehrung desselben angesehen werden, wovon die Zinsen wiederum zu berechnen sind, so daß das Capital C im ersten Jahre zu C + fC oder $C\,(1 + f)$, im zweiten Jahre zu $C\,(1 + f) \cdot (1 + f) = C\,(1 + f)^2$, im dritten zu $C\,(1 + f)^2 \cdot (1 + f) = C\,(1 + f)^3$ und allgemein nach n Jahren zu

$$\text{I. } E = C\,(1 + f)^n$$

werde, woraus umgekehrt als Werth des anfänglichen Capitals

$$\text{II. } C = \frac{E}{(1 + f)^n};$$

ferner des Zinsfußes

$$\text{III. } f = \sqrt[n]{\left(\frac{E}{C}\right)} - 1.$$

und endlich der Anzahl der Jahre

$$\text{IV.}\quad n = \frac{\log. E - \log. C}{\log. (1 + f)}$$

sich ergiebt. Wäre aber n Jahre hindurch das Capital C jährlich zahlbar, so wird die Summe aller einzelnen Zahlungen am Ende des nten Jahres folgende Progressionen bilden:

$$C (1 + f)^{n-1} + C (1 + f)^{n-2} \ldots + C (1 + f)^2 + C (1 + f) + C$$

weil das vor (n—1) Jahren zu zahlende Capital den gegenwärtigen Werth von $C (1 + f)^{n-1}$ gewonnen haben muß, u. s. f. bis auf das gegenwärtige zahlbare C. Es ist aber die Summe dieser Reihe (nach §. 136, 1.):

$$\text{V.}\quad S = \frac{(C (1 + f)^n - 1)}{f}$$

Eine weitere Anwendung findet die zusammengesetzte Zinsrechnung in der Bestimmung der terminlichen Zahlungen E eines gewissen, gegenwärtig fälligen Capitals K, oder umgekehrt in der Berechnung dieses Capitalwerthes, wenn die jährliche Zahlung (wie bei den Renten gegeben ist. Auch die Zeit, in welcher K durch terminliche Zahlungen abgetragen sein wird, läßt sich nach der allgemeinen Formel bestimmen, nicht aber der Zinsfuß, wenn E, K und n gegeben sind. Es ist nämlich (nach II.) der jetzige Werth eines, nach n Jahren fälligen Capitals E:

$$C = \frac{E}{(1 + f)^n}.$$

Also wird der Gesammtbetrag aller, binnen n Jahren zu leistenden, jährlichen Zahlungen ausgedrückt durch

$$\frac{E}{1 + f} + \frac{E}{(1 + f)^2} + \frac{E}{(1 + f)^3} + \frac{E}{(1 + f)^4} \ldots\ldots + \frac{E}{(1 + f)^n}$$

und wenn man den Factor der Reihe $\left(\frac{1}{1+f}\right) = g$ setzt:

$$Eg + Eg^2 + Eg^3 + Eg^4 \ldots\ldots + Eg^n$$

oder zusammengezogen $K = \frac{Eg (g^n - 1)}{g - 1}$; und da g ein ächter Bruch ist, durch Aenderung der Zeichen im Zähler und Nenner:

$$\text{VI.}\quad K = \frac{Eg (1 - g^n)}{1 - g}.$$

$$\text{VII.}\quad E = \frac{K (1 - g)}{g (1 - g^n)}.$$

$$\text{VIII.}\quad n = \frac{\log. \left(1 - \frac{K (1 - g)}{Eg}\right)}{\log. g.} = \frac{\log. \left(1 - \frac{Kf}{E}\right)}{-\log.(1+f)}$$

Verwickeltere Aufgaben der zusammengesetzten Zinsrechnung, welche durch Anwendung einer der vorstehenden Formeln nicht lösbar

erscheinen, verlangen oft eine Verbindung zweier derselben, z. B. der Formeln I. und V., II. und VII.

Anmerkung. Ueberstiege in Formel VIII. der Subtrahend die Einheit, so würde man die bedeutungslose Form des Log. einer negativen Zahl erhalten. Dies kann sich indessen nur dann ereignen, wenn man der jährlichen Zahlung E einen Werth beilegt, der noch nicht einmal die jährlichen Zinsen, d. h. Kf erreicht, welches ungereimt ist.

(S. Aufg. 23—40, §. 144.)

---

§. 139. *Interpolation der Progressionen. Bezeichnet man die Glieder einer Progression allgemein durch

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; \ldots \; a_k \; \ldots \; a_n \; \ldots,$$

so kann es zur Aufgabe gemacht werden, aus irgend zwei, ihrem Werthe und ihrer Stelle nach gegebenen Gliedern a_k und a_n die Reihe selbst darzustellen. Diese Aufgabe wird augenscheinlich dadurch gelöst, daß man für die arithmetische Progression die gleichbleibende Differenz der Reihe, für die geometrische hingegen den constanten Factor derselben bestimmt.

Werde nun die obige Andeutung zunächst auf die Differenzreihe (1) $a_1, \; a_1 + d, \; a_1 + 2d \ldots a_1 + (k-1)\, d \ldots a_1 + (n-1)\, d$ bezogen, so ist

$$(1) \; a_n = a_1 + (n-1)\, d = a_1 + nd - d$$
$$(2) \; a_k = a_1 + (k-1)\, d = a_1 + kd - d$$

folglich $a_n - a_k = (n-k)\, d$

und $d = \dfrac{a_n - a_k}{n-k}$.

Demnach findet man die Differenz für eine aus dem kten und nten Gliede abzuleitende arithmetische Progression, indem man den Unterschied jener Glieder durch den Unterschied ihrer Stellenzeiger dividirt.

Gelte ferner die Reihe $a_1 \; a_2 \; a_3 \; \ldots$ als Andeutung der geometrischen Progression

$$\text{II.} \quad a_1, \; a_1 f, \; a_1 f^2, \; a_1 f^3 \ldots a_1 f^{k-1} \ldots a_1 f^{n-1} \ldots$$

so ist

$$(1) \; a_n = a_1 f^{n-1}$$
$$(2) \; a_k = a_1 f^{k-1}$$

folglich $\dfrac{a_n}{a_k} = f^{n-k}$ und $f = \sqrt[n-k]{\dfrac{a_n}{a_k}}$.

Man findet also den Factor einer aus dem kten und nten Gliede abzuleitenden geometrischen Progression, indem man aus dem Quotienten dieser Glieder die (n—k)te Wurzel zieht.

Betrachtet man nun ferner die Glieder irgend einer Progression

$$a_p \; a_{2p} \; a_{3p} \; a_{4p} \; a_{5p} \; \ldots \; a_{np} \; \ldots$$

als zu einer vollständigeren, d. h. mit geringeren Aenderungen fortschreitenden, Reihe gehörig, so entsteht die Aufgabe, die fehlenden

Glieder einer solchen Progression zwischen den gegebenen einzuschalten oder zu interpoliren. Sollen allgemein (p — 1 Glieder mit der Differenz δ oder dem Factor φ zwischen je zwei der obigen Reihe eingeschaltet werden, wodurch solche um p Stellen aus einander rücken, so geschieht dies nach obigen Sätzen über die Bestimmung der Differenz oder des Factors aus zwei Gliedern. Man findet nämlich

(I.) wenn die Reihe eine mit der Differenz d fortschreitende arithmetische Progression ist:

$$\delta = \frac{d}{p}.$$

(II.) wenn sie eine geometrische Progression bezeichnet, deren Factor f ist:

$$\varphi = \sqrt[p]{f}.$$

(S. Aufg. 41—44; §. 144.)

---

§. 140. *Figurirte Zahlen. Wenn in der allgemeinen Differenzreihe a, a + d, a + 2d u. s. f. a = 1 und d = 1 gesetzt und die allmähligen Summen der daraus folgenden natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 . . . . genommen werden, so erhält man eine neue Reihe der sogenannten Trigonalzahlen, durch deren allmählige Summation wiederum die Reihe der Pyramidalzahlen entsteht. Auf diese Weise fortfahrend, kann man höhere Ordnungen von Zahlenreihen bilden, die sämmtlich unter dem Namen von figurirten Zahlen begriffen werden, weil die einzelnen Glieder der ersten unter ihnen durch Figuren derselben Art sich versinnlichen lassen. Eine Uebersicht der ersten neun Reihen dieser figurirten Zahlen, welche bis zum 10ten Gliede derselben reicht und die Entstehung der einen aus der andern am deutlichsten erkennen läßt, folgt hier:

Glieder.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
$\overset{1}{a}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\overset{2}{a}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overset{3}{a}$	3	6	10	15	21	28	36	45	55
$\overset{4}{a}$	4	10	20	35	56	84	120	165	220
$\overset{5}{a}$	5	15	35	70	126	210	330	495	715
$\overset{6}{a}$	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
$\overset{7}{a}$	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
$\overset{8}{a}$	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
$\overset{9}{a}$	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
$\overset{10}{a}$	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

Jedes beliebige (nte Glied) in der ersten dieser Zahlenreihen ist offenbar = n. Da ferner die zweite Reihe aus der ersten durch Summirung sich bildet, so ist für sie (nach §. 134, Anm.) das allgemeine Glied

$$\overset{n}{\underset{2}{a}} = \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}.$$

Hiernach läßt sich vermuthen, daß die Ausdrücke

$$\overset{n}{\underset{3}{a}} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,;\quad \overset{n}{\underset{4}{a}} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,;\ \text{u. s. f.}$$

auch für die folgenden Reihen gültig sein werden, wie sich denn dieses auch bei Substitution beliebiger Zahlenwerthe für n bestätigt. Der vollständige Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme wird durch Induction geführt, indem man nämlich untersucht, ob der allgemeine Ausdruck eines beliebigen nten Gliedes der kten Reihe, d. i.

$$\overset{n}{\underset{k}{a}} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(n+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,k}$$

zu setzen ist, wie es nach dem Vorstehenden allerdings den Anschein hat. Nach der obigen Tafel der figurirten Zahlen hat man nun aber dem angenommenen Bildungsgesetze zufolge überhaupt

$\overset{n}{\underset{k}{a}} = \overset{n-1}{\underset{k}{a}} + \overset{n}{\underset{k-1}{a}}$, und wenn jener Ausdruck hypothetisch angewandt wird:

$$(1)\quad \overset{n-1}{\underset{k}{a}} = \frac{(n-1)n(n+1).(n+2)\ldots(n+k-2)}{1.2.3\ldots.k}$$

$$(2)\quad \overset{n}{\underset{k-1}{a}} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-2)}{1.2.3\ldots(k-1)}$$

also $\overset{n-1}{\underset{k}{a}} + \overset{n}{\underset{k-1}{a}} = \frac{[n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-2)](n-1+k)}{1.2.3\ldots\ldots.k}$

woraus die Richtigkeit des obigen allgemeinen Ausdrucks folgt, weil derselbe nachweislich für die ersten Glieder aller Zahlenreihen gültig ist, und somit successiv für jedes folgende.

§. 141. *Polygonalzahlen. Wird in der allgemeinen Differenzreihe $a = 1$ und $d = 1, 2, 3, 4 \ldots$ nach einander gesetzt und eine allmählige Summation (wie in §. 140.) vorgenommen, so entstehen dadurch die Reihen der sogenannten Polygonalzahlen, die man nach den verschiedenen Arten der Versinnlichung durch Drei-, Vier-, Fünf-Ecke u. s. w., Trigonal-, Tetragonal-, Pentagonal-Zahlen u. s. f. genannt hat. Der Ausdruck des allgemeinen Gliedes für alle diese Reihen ist (nach §. 135.):

$$s = \tfrac{1}{2}n\,(2a + (n-1)\,d) = n\,.\,a + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\,d,$$

wenn a, d, n auf die erzeugende Differenzreihe bezogen werden. So erhält man als Reihe der

Trigonalzahlen (wofür $a = 1$, $d = 1$, $n = 1, 2, 3 \ldots$)

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, . . .

Tetragonalzahlen (wofür $a = 1$, $d = 2$, $n = 1, 2, 3 \ldots$)

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, . . .

Pentagonalzahlen (wofür $a = 1$, $d = 3$, $n = 1, 2, 3 \ldots$)

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, . . .

Alle diese Reihen stimmen darin überein, daß man durch Abziehen der Differenzen ihrer benachbarten Glieder auf die nämliche Zahl kommt, welches die Eigenschaft einer Differenzreihe vom zweiten Range ist. (S. Aufg. 45, 46, §. 144.)

§. 142. *Höhere Differenzreihen. Durch die allmählige Summirung der arithmetischen Progression in ihrer allgemeinen Gestalt:

$$a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad a+4d \ldots$$

erhält man eine neue Reihe, deren Glieder, allenfalls auch noch mit einem neuen beliebigen Anfangsgliede b verbunden, eine Differenzreihe vom zweiten Range erzeugen:

$$b, \quad b+a, \quad b+2a+d, \quad b+3a+3d, \quad b+4a+6d \ldots$$

welche wiederum summirt und in allen Gliedern mit einem neuen

Anfangsgliede c verbunden werden kann, um eine Differenzreihe vom dritten Range zu bilden:

$$c,\ c+b,\ c+2b+a,\ c+3b+3a+d,\ c+4b+6a+4d\ldots$$

Auf diesem Wege entstehen höhere Differenzreihen durch fortgesetzte Summirung, von denen man durch Subtraction zu den niedrigeren zurückkehren kann. In diesen höheren Differenzreihen erscheinen nun die oben (§. 140.) abgeleiteten figurirten Zahlen, die man für eine gegebene Reihe k und für eine in derselben gegebene Stelle n allgemein $= \frac{n\,.\,n+1\,.\,n+2\,\ldots\,.\,n+k-1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,k}$ setzen darf. Die (n — 1)te Zahl der zweiten Reihe ist also $\frac{n-1\,.\,n}{1\,.\,2}$ die (n — 2)te der dritten $= \frac{n-2\,.\,n-1\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,3}$ u. s. f. Daraus läßt sich nun leicht die nachstehende Ableitung der höheren Differenzreihen aus der ursprünglichen oder ersten, und namentlich des allgemeinen oder nten Gliedes jeder Reihe einsehen:

Glieder.	1	2	3	4	...	n
I. Differenz-Reihe	a	a + d	a + 2d	a + 3d	...	$a + (n-1)\,d$
Summen	a	2a + d	3a + 3d	4a + 6d	...	$na + \frac{(n-1).n}{1.2}d$
Glieder	1	2	3	4	...	n
II. Differenz-Reihe	b	b + a	b + 2a + d	b+3a+3d	...	$b + (n-1)\,a + \frac{(n-2)(n-1)}{1.2}d$
Summen	b	2b + a	3b + 3a + d	4b+6a+4d	...	$nb + \frac{(n-1)n}{1.2}a + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}d$
Glieder	1	2	3	4	...	n
III. Diff.-R.	c	c + b	c + 2b + a	c + 3b + 3a + d	...	$c + (n-1)b + \frac{(n-2)(n-1)}{1.2}a + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1.2.3}d$
Summen	c	2c + b	3c + 3b + a	4c + 6b + 4a + d	...	$nc + \frac{(n-1)}{1.2}nb + \frac{(n-2)(n-1)}{1.2.3}na + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.4}d$
u. s. w.						

Sehr einfach ist nach diesem Schema die Ableitung der höheren Differenzreihen, wenn für die allgemeinen Zeichen specielle numerische Werthe gegeben sind, z. B. a = 2, d = 3, b = 4, c = 5 . . . gesetzt wird; denn hier erhält man:

I. Differenz-Reihe	=			2	5	8	11	14	17	20 . .
Summen	=			2	7	15	26	40	57	77 . .
II. Differenz-Reihe	=		4	6	11	19	30	44	61	81 . .
Summen	=		4	10	21	40	70	114	175	256 . .
III. Diff.-Reihe	=	5	9	15	26	45	75	119	180	261 . .
u. s. w.										

Sollte umgekehrt eine höhere Differenzreihe gegeben, ihr Rang aber noch unbekannt sein, so findet man denselben vermöge Subtraction aller benachbarten Glieder, wobei man endlich auf gleichen Unterschied kommt und aus der Anzahl der abgeleiteten Reihen den Rang der gegebenen erkennt. So ist z. B. die Reihe 5, 9, 15, 26, 45, 75 . . . . vom dritten Range, weil die Subtraction ihrer benachbarten Glieder zwei andere Differenzreihen, dann aber gleiche Differenzen liefert, wie folgt:

5	9	15	26	45	75	119	180	261
	4	6	11	19	30	44	61	81
		2	5	8	11	14	17	20
			3	3	3	3	3	3

(S. Aufg. 47—50, §. 144)

§. 143. * Reihensummirung. Es giebt außer den gewöhnlichen (arithmetischen und geometrischen) Progressionen, deren Glieder durch Addition einer Differenz oder Multiplication eines Factors sich aus einander erzeugen, eine Menge anderer, die nach bestimmten Gesetzen fortschreiten und bei näherer Prüfung als höhere Differenzreihen von bestimmten Range erkannt werden. Für solche wird man nach der obigen Ableitungstafel dann auch allgemeine Summenausdrücke aufstellen können, aus denen durch Substitution specieller Zahlenwerthe die Summe der Reihen bis zu einem beliebigen (nten) Gliede ohne Weiteres gefunden wird, wie folgende Aufgaben dies näher erläutern mögen:

1) Die Summe der Zahlenreihe 1, 4, 9, 16, 25 . . . n^2, aus den Quadraten der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 . . . n bestehend, soll in einer allgemeinen Formel gegeben werden.

Da die Reihe nach zweimaligem Subtrahiren eine andere aus gleichen Differenzen giebt, so ist sie eine Differenzreihe vom zweiten Range, worin b = 1, b + a = 4, also a = 3, und b = 2a + d = 9, also d = 2. Durch Substitution dieser Zahlenwerthe wird der allgemeine Ausdruck der Summe vom 1sten bis zum nten Gliede aus der obigen Tafel:

$$s = n + 3\frac{n(n-1)}{1.2} + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

oder zusammengezogen $s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$.

2) Man soll den summatorischen Ausdruck für die Reihe der Quadrate der ungraden Zahlen 1, 3, 5, 7 . . . (2n — 1) angeben.

Auch diese Reihe ist, da sie nach zweimaligem Subtrahiren die gleichen Unterschiede 8 giebt, eine Differenzreihe vom zweiten Range und b = 1, a = 8, d = 8; also

$$s = n + 8.\frac{n.n-1}{1.2} + 8\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.$$

oder zusammengezogen $s = \frac{2n(2n+1)(2n-1)}{1.2.3}$.

3) Es soll die Summe der Reihe b, 2 (b + 1), 3 (b + 2) u. s. w. gefunden werden.

Da man in der Reihe b, 2b + 2, 3b + 6, 4b + 12 . . eine Diffenzreihe vom 2ten Range erkennt, für welche a = b + 2 und d = 2 ist, so findet man hier

$$s = b.n + (b+2)\frac{n.n-1}{1.2} + 2\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3},$$

oder zusammengezogen $s = \frac{n(n+1)}{1.2}(b + \tfrac{2}{3}(n-1))$.

4) Man verlangt die allgemeine Summe der Zahlenreihe 1, 8 27, 64, 125 . . . n^3, aus den Cuben der natürlichen Zahlen bestehend.

Diese Reihe wird durch dreimaliges Abziehen, wodurch man auf die Differenzen 6 kommt, als eine Differenzreihe vom dritten Range erkannt, in welcher c = 1, b = 7, a = 12, d = 6 ist. Folglich hat man hier

$$s = n + 7.\frac{n.n-1}{1.2} + 12\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} + 6\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}$$

oder zusammengezogen $s = \left[\frac{n(n+1)}{1.2}\right]^2$.

(S. Aufg. 51—60, §. 144.)

Anmerkung 1. Je größer die Reihe der natürlichen Zahlen angenommen wird, um so mehr nähert sich die Summe ihrer Quadrate dem Werthe $\frac{n.n.2n}{1.2.3} = \frac{n^3}{3}$, und diejenigen ihrer Cuben dem Werthe $\left(\frac{n.n}{2}\right)^2 = \frac{n^4}{4}$.

Anmerkung 2. Eine sehr einfache Formel, wonach sich der Inhalt drei- und vierseitiger Kugelpyramiden, so wie auch rectangulär geformter Kugelhaufen schnell bestimmen läßt, ist folgende:

$$J = K\left(\frac{U+G+O}{3}\right),$$

wo K die Anzahl der Kugeln, an der kleinsten Seite des Kugelhaufens, U die Menge derselben in der untersten Reihe der Längenseite, G die an

der gegenüberliegenden Seite, und O die Menge der oben liegenden bezeichnet.

Denn es ergiebt sich:

1. Für dreiseitige Pyr. $K = \frac{n(n+1)}{1.2}$, $U = n$, $G = 1$, $O = 1$.

$$J = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

2. Für vierseitige Pyr. $K = \frac{n(n+1}{1.2}$, $U = n$, $G = n$, $O = 1$.

$$J = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

3. Für rectang. Kugelhaufen $K = \frac{n(n+1)}{1.2}$, $U = G = b + n - 1$, $O = b$.

$$J = \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{2b+2(n-1)+b}{3}\right) = \frac{n(n+1)}{1.2}(b+\tfrac{2}{3}(n-1)).$$

§. 144. Aufgaben.

1. Die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 12000 zu finden.
2. Eben so aller ungraden Zahlen von 1 bis 15700; allgemein von 1 bis $(2n - 1)$.
3. In einer Differenzreihe ist $a_1 = 13$, $a_n = 569$, $n = 74$. Welches ist ihre Differenz?
4. Die Summe einer Differenzreihe ist $= 936$, $d = 6$ und $n = 12$. Ihr Anfangsglied zu bestimmen.
5. Ein Thermometer fällt binnen 10 Stunden ganz gleichförmig, im Ganzen um $11\frac{3}{4}$ Grad. Wie viel also stündlich?
6. Im Schacht eines Berges nehme die Wärme mit jedem Klafter Tiefe gleichförmig um 0°,2 C. zu. Welche Tiefe entspricht demnach dem Thermometerstande von 18°,7, wenn derselbe am Eingange 14°,3 betrug?
7. Ein fallender Körper, der in der ersten Secunde 15′ und in jeder folgenden 30′ mehr durchläuft, beschreibt 1815 Fuß. Wie viel Zeit gehört dazu.
8. Wie groß ist die Verdünnung eines flüssigen Körpers, wenn man 0,064 Maß desselben mit einem Maß Wasser mischt, davon wieder 0,064 mit einem zweiten Maße Wasser und dieses Verfahren achtmal wiederholt?
9. Die Tragkraft eines Magneten, welcher 12 Pfund trägt, wird sechsmal nach einander, jedesmal um $\frac{3}{20}$ verstärkt. Wie viel Pfund trägt er endlich?
10. Mit jedem Kolbenzuge wird die Luft unter der Glocke einer Luftpumpe im Verhältniß 36 : 29 verdünnt; wie viel also nach 25 Zügen?
11. Von einem Grundtone C, der in der Secunde 32 Schwingungen macht, sei man durch 12 Quinten oder durch 7 Octaven zu höheren Tönen fortgeschritten. Um wie viel weichen deren Schwingungen von einander ab?

12. Die Dichtigkeit der Luft sei an der Meeresfläche = 1; 72 Fuß über derselben = 0,997. Wie groß wird sie in einer Höhe von 14760 Fuß sein, wenn sie in geom. Progression abnimmt?

13. Wie viel verliert ein Lichtstrahl an Helligkeit, wenn er zehn Glasscheiben durchdringt, deren jede $\frac{5}{24}$ des durchgehenden Lichtes absorbirt?

14. Von welchem geschlossenen Werthe ist die unendliche Reihe $1 + \frac{1}{3} \ldots + (\frac{1}{3})^n +$ etc. als Entwickelung anzusehen?

15. Eben so die Reihe $4 - 0{,}4 + 0{,}04 - 0{,}004 +$ etc.

16. Die Zahl 13 in Form einer unendlichen Reihe darzustellen.

17. Eben so die Zahlen 10, 20, 30.

18. Die geschlossene Bruchform für den periodischen Decimalbruch 0,[428571] . . . zu finden.

19. Eben so für 0,[857142] . . . und 0,128[2401] . . .

20. Eben so für 0,[2976] . . . und 0,50[571428] . . .

21a. Welchen Ertrag geben 14766 Thaler zu 5 pro Cent nach $16\frac{1}{2}$ Jahren bei einfachen Zinsen?

21b. Welches Capital giebt bei einfachen Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ pro Cent nach 7 Jahren einen Ertrag von 5260 Thlrn.?

21c. Ein Capital von 14700 Thlrn. ist nach 11 Jahren bei einfachen Zinsen auf 21300 Thlr. angewachsen. Wie groß ist der Zinsfuß.

21d. Wie viel Jahre werden erfordert, um von einem Capital von 10000 Thlrn. zu $3\frac{3}{4}$ pro Cent (einfacher Zinsen) einen Ertrag von 14140 Thlrn. zu erhalten?

22. Es hat Jemand, der in den Besitz eines Landguts gelangt, die jährliche Pacht von 2600 Thlr. für eine Reihe von 8 Jahren nebst den aufgelaufenen (einfachen) Zinsen zu 5 pro Cent zu fordern. Wie viel im Ganzen?

23. Auf ein Haus werden 8760 Thlr. baar und zugleich 10000, nach $4\frac{1}{2}$ Jahren zahlbar, geboten. Welches Gebot ist das höhere, wenn man die Zinsen zu 4 pro Cent rechnet?

24. Eine Kirche legt zum Neubau 7320 Thlr. in eine öffentliche Casse zu 4 pro Cent Zinsen nieder. Zu welchem Betrage ist die Summe nach 17 Jahren angewachsen?

25. Eben so, wenn 2500 Thlr. gegen $4\frac{1}{4}$ pro Cent 20 Jahre lang ausstehen?

26. Wie lange muß ein Capital von 40,000 Thlrn. zu $3\frac{1}{2}$ pro Cent genutzt werden, wenn es sich verdoppeln oder verdreifachen soll?

27. Ein Wald, der vor 12 Jahren zu 64340 Thlrn. angeschlagen worden, gewinnt durch Wachsthum jährlich im Durchschnitt $2\frac{1}{2}$ pro Cent, verliert dagegen aber durch regelmäßige Benutzung $1\frac{3}{4}$ pro Cent. Welches ist demnach sein gegenwärtiger Werth?

28. Man bietet für ein Gut 85000 Thlr. unter der Bedingung, daß diese Kaufsumme erst nach 8 Jahren zu bezahlen sei. Wie hoch ist, den Zinsfuß zu 5 pro Cent gerechnet, dieses Gebot für den Augenblick anzuschlagen?

29. In einem Fabrikgeschäfte ist ein Capital von 23680 Thlrn. 16 Jahre hindurch ununterbrochen zinsentragend benutzt worden und in dieser Zeit zu dem Ertrage von 95376 Thlr. gestiegen. Wie viele Procente hat es getragen?

30. Man hat in einer Stadt seit vielen Jahren ein ziemlich beständiges Zunehmen der Einwohnermenge beobachtet, indem unter 1000 Menschen jährlich im Durchschnitt 31 Todte und 43 Geborene sind. In wie viel Jahren würde hiernach die Einwohnerzahl sich verdoppelt haben?

31. Zu welcher Summe wird ein Tilgungsfond, in welchen von den Staatseinkünften jährlich 2 Mill. Thlr. fließen, nach 60 Jahren angewachsen sein, wenn dieses Geld zu $4\frac{1}{2}$ pro Cent benutzt werden kann?

32. Mit welchem Capital kann man sich auf 25 Jahre eine Rente von 1200 Thlrn. erkaufen, den Zinsfuß zu 5 p. C. angenommen?

33. Wie groß ist die Rente, welche man sich mit einem Capitale von 18000 Thlrn. auf 18 Jahren erkaufen würde, den Zinsfuß zu $4\frac{1}{8}$ pro Cent gerechnet?

34. In wie vielen Jahren wird ein Capital von 30000 Thlrn., welches 5 pro Cent Zinsen trägt, die fortgesetzt zum Capital geschlagen werden, mit jährlichen Zahlungen von 3000 Thlrn. abgetragen sein?

35. Die Einnahme eines Staates gewährt 450000 Thlr. Ueberschüsse. Man will dieselben von 18 kommenden Jahren sofort zum Bau von Eisenbahnen verwenden und ein entsprechendes Capital zu $4\frac{3}{4}$ pro Cent aufnehmen. Wie groß ist dessen Betrag?

36. Eine Staatsanleihe von 12600000 Thlrn. soll binnen 25 Jahren in gleichen jährlichen Zahlungen mit 5 pro Cent abgetragen werden. Wie viel beträgt die jährliche Zahlung?

37. Ein Capital von 8400 Thlrn. wird durch seine Zinsen und außerdem durch einen jährlichen Zuschuß von 600 Thlrn. 8 Jahre hindurch vermehrt. Wie groß ist, den Zinsfuß zu 4 pro Cent angenommen, der Betrag nach Ablauf dieser Zeit geworden?

38. Von den Zinsen eines Capitals von 14600 Thlrn., welches zu $4\frac{1}{2}$ pro Cent aussteht, werde jährlich eine Summe von 500 Thlrn. verbraucht, der Rest aber zum Capital geschlagen. Wie groß wird dasselbe nach 21 Jahren sein?

39. Wie viel Jahre sind nöthig, damit es auf 22400 Thlr. anwachse?

40. Nach wie viel Jahren würde es dagegen erschöpft sein, wenn jährlich 1000 Thlr. verbraucht werden?

41. In einer arithmet. Progression ist $a_{17} = 19\frac{1}{2}$, $a_{41} = 37\frac{1}{2}$; welches ist die Differenz und das erste Glied derselben?
42. Eben so, wenn $a_{12} = 43$ und $a_{32} = 67\frac{1}{4}$ ist.
43. In einer geomet. Progression sei $a_4 = 56$, $a_9 = 28672$; welches ist der Factor der Reihe und ihr erstes Glied?
44. Welchen Factor erhält man, wenn man zwischen je zwei Glieder der geometrischen Reihe $5, 5 . 8, 5 . 8^2 \ldots.$ acht Glieder einschaltet?
45. Welches ist das 30ste Glied in der Reihe (a) der Trigonalzahlen; (b) der Tetragonalzahlen; (c) der Pentagonalzahlen?
46. Die Reihe der Hexagonalzahlen bis zum 20sten Gliede zu bilden.
47. Von der Differenzreihe 7, 11, 15, 19 .... zu einer solchen vom 4ten Range aufzusteigen, wenn die Anfangsglieder sämmtlicher Reihen = 7 sind.
48. Eben so zur Differenzreihe des 6ten Ranges von der Progression 5, 12, 19, 26 ...., wenn sämmtliche Anfangsglieder = 5 sind.
49. Den Rang der Zahlenreihe 3, 48, 243, 768, 1875, 3888, 7203 .... und ihr allgemeines Glied zu bestimmen.
50. Eben so für die Reihe 1, 128, 2187, 16384, 78125, 279936, 823543, 2097152, 4782969, 10000000.
51. Die Summe der Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 100 zu berechnen.
52. Eben so für die ungeraden Zahlen von 1 bis 99.
53. Eben so für die geraden Zahlen von 2 bis 100.
54. Eben so für die Summe der Cuben aller Zahlen von 1 bis 50.
55. Eben so für die ungeraden Zahlen von 1 bis 49.
56. Eben so für die geraden Zahlen von 2 bis 50.
57. Wie viele Kugeln enthält eine aus 12 (im Rechteck gelegten) Schichten bestehender Kugelhaufe, wenn in der oberen 21 Kugeln in einer Reihe liegen.
58. Wie viel liegen in einer dreiseitigen Pyramide aufgehäuft, wenn dieselbe 30 Schichten enthält?
59. Wie viel in einer vierseitigen Pyramide von 40 Schichten?
60. Die untere Schicht einer vierseitigen Kugel-Pyramide enthält 1849 Kugeln. Wie viele Schichten liegen also in derselben über einander und wie viele Kugeln enthält die ganze Pyramide?

Drittes Buch.

Anfangsgründe der höheren Arithmetik.

---

§. 145. Function. Sofern ein aus mehren Größen auf irgend eine Weise zusammengesetzter arithmetischer Ausdruck als abhängig von dem Werthe einer dieser Größen betrachtet wird, pflegt man ihn eine Function derselben zu nennen. So ist das Product eine Function vom Multiplicand oder Multiplicator, die Potenz vom Grundfactor oder Exponenten, die Progression von der Differenz oder dem Factor u. s. w. Ausdrücke, wie $a + bx$, $\frac{a+x}{b+x^2}$, $\sqrt{ax}$, log. $\left(\frac{x}{a}\right)$ können Functionen von x oder auch von a genannt und ganz allgemein durch die Bezeichnungen $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ . . . $F(a)$, $f(a)$, $\varphi(a)$ angedeutet werden.

§. 146. Reihen. Daß solche Functionen nicht selten fähig sind, in einer aus abgesonderten Gliedern bestehenden Zahlenreihe entwickelt zu werden, beweisen die Division und Wurzel-Ausziehung in Ausdrücken, wie $\frac{2}{3} = 0{,}66666 \ldots$ oder $\sqrt{13} = 3{,}60555 \ldots$. Bei dekadischen Rechnungen wird die Entwickelung des Werthes solcher Ausdrücke in Reihen gegeben, deren Glieder (d. h. Ziffern) dem Range nach verschieden sind und sich stets auf Potenzen der Grundzahl 10 beziehen, die der vollständigen Erklärung wegen auch wohl beigefügt werden (§. 76.), so daß jede dekadische Zahl eine Function von 10 ist. Allgemeiner wird man demnach annehmen dürfen, daß Functionen der unbestimmten Zahl x (eben so wie die Functionen der Zahl 10) in einer, nach Potenzen derselben fortschreitenden Reihe sich entwickeln lassen, deren Glieder dem Range nach entweder steigen oder fallen. Die Zahl x kann man hier die Grundzahl, und alle andere, als Factoren ihrer Potenzen auftretenden Zahlen Coefficienten der Reihe nennen, deren allgemeinste Form diese ist:

$$ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + dx^{\delta} + ex^{\varepsilon} + \ldots + mx^{\mu} + \text{etc.}$$

§. 147. Analysis. Die Anwendung der Grund- und Rangoperationen auf solche Reihen, um aus ihnen andere Reihen als Resultate abzuleiten, bildet einen Zweig der höheren oder allgemeinen Arithmetik, gewöhnlicher mit dem Namen Analysis bezeichnet. Die Rechnung wird hier umfassender, weitläufiger und in der Bestimmung von Zahlen, wie in der Schlußart, wodurch der Beweis für ein Gesetz der Reihe gegeben werden soll, ungleich schwieriger. Jene Bestimmung unbekannter aus gegebenen Zahlen geschieht vorzüglich durch Auflösung einfacher Gleichungen, diese Beweisführung aber durch die sogenannte Induction, indem man ein dem Anscheine nach gültiges, Gesetz vorläufig annimmt und dessen Allgemeingültigkeit dadurch zu bestätigen sucht, daß man, in der eigenthümlichen Bildung des Resultats noch einen Schritt weiter gehend, es aufs Neue wieder hervortreten sieht, wie davon der Beweis des allgemeinen Ausdrucks für figurirte Zahlen (§. 140.) ein Beispiel giebt.

Das weitläuffige Geschäft der Analysis, welcher alle Untersuchungen über Reihen angehören, zerfällt zunächst in: 1) Verknüpfung der Reihen durch Anwendung der Grundoperationen; 2) Entwickelung geschlossener Functionen in Reihen durch Bestimmung der Coefficienten ihrer Glieder, und 3) Bestimmung der Grundzahl, wenn der Werth der Reihe wie ihrer Coefficienten gegeben ist. Diese verschiedenen Untersuchungen können nicht zweckmäßiger eingeleitet werden, als durch die Darstellung der allgemeinen Gesetze und Regeln einer, bei ihnen sorgfältig zu beobachtenden Anordnung der einzelnen Glieder und ihrer Verbindungen, welche unter dem Namen der combinatorischen Operationen oder Combinationslehre hier zunächst folgt.

Erstes Capitel.

Die Combinationslehre.

§. 148. Gegenstand der Combinationslehre. Es kann bei der Betrachtung mehrer Dinge nicht sowohl nach der Größe oder Beschaffenheit derselben, als vielmehr nach ihren, gewissen Forderungen entsprechenden, Zusammenstellungen gefragt werden, und die Beantwortung dieser Frage bildet den Gegenstand der Combinationslehre. Da diese die Dinge, aus denen Zusammenstellungen gefordert werden, als eine Menge von einzelnen Be-

standtheilen lediglich in Beziehung auf die Folge derselben zu betrachten hat, so bieten sich Buchstaben oder Zahlen auch hier als die paßlichsten Zeichen dar. Ihr Gebrauch für die Combinationslehre als Elemente, aus denen durch Zusammenstellung Formen oder Complexionen gebildet werden sollen — wie abc, acd, adc . . . 1234, 1324, 3142 . . . aus den Elementen a, b, c, d oder 1, 2, 3, 4 — ist also durchaus verschieden von der gewöhnlichen arithmetischen Anwendung der Zahlen und Buchstaben, wo sie als Aliquotes sich auf eine bestimmte Einheit beziehen, während sie hier nur als Zeichen zur Unterscheidung verschiedener Dinge gelten.

§. 149. Anordnung der Formen. Eine Uebersicht der, aus gegebenen Elementen gebildeten, Formen läßt sich nur durch eine Anordnung derselben nach bestimmten Grundsätzen gewinnen, und hiezu stehen zwei verschiedene Wege offen. Man kann sie nämlich nach der Uebereinstimmung der gleichstelligen Elemente wie die Wörter eines Lexicons oder lexicographisch auf einander folgen lassen, ohne dabei Rücksicht auf ihre Anzahl zu nehmen, wie in der Formenreihe:

1, 12, 123, 13, 132, 2, 21, 213, 23, 231, 3, 31, 312, 32, 321

geschehen ist; oder man ordnet sie außerdem nach der Menge der Elemente in verschiedene Klassen und erhält dadurch die arithmographische Anordnung:

1, 2, 3; 12, 13, 21, 23, 31, 32; 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Jede Klasse solcher Formen kann man nach den Anfangselementen wieder in einzelne Ordnungen zerfällen; so enthält die dritte Classe der obigen Formen:

I. 123, 132. II. 213, 231. III. 312, 321.

§. 150. Bildungsgesetz. Aus diesen Grundsätzen der Anordnung ergiebt sich sehr einfach für die vollständige Bildung aller Formen aus gegebenen Elementen das allgemeine Gesetz: Aus der niedrigsten Form erzeugen sich dadurch allmählig alle höheren, daß man stets die späteste Stelle, welche eine Erhöhung zuläßt, um so wenig als möglich erhöhet, für die übrigen Stellen aber die natürliche Folge der Elemente beibehält. So entstehen als Formen der vierten Klasse aus den Elementen 1, 2, 3, 4 durch Versetzung allmählig:

I. 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432;

II. 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431 u. s. f.

§. 151. Combinatorische Operationen. Bei der Bildung von Complexionen aus gegebenen Elementen können nun entweder diese sämmtlich in allen verschiedenen Folgen zusammengestellt, oder es kann eine bestimmte Menge von Elementen jedesmal herausgehoben werden, um Formen zu bilden, die wiederum entweder alle durchaus verschiedene oder auch nur verschieden geordnete

Elemente enthalten. Diese drei Fälle erzeugen eben so viele combinatorische Operationen: das **Permutiren**, **Combiniren** und **Variiren**, als deren Andeutungen die Buchstaben **P**, **C**, **V** gelten. Eine den beiden letzten Zeichen übergesetzte Zahl (Index) zeigt die Menge der zusammenzufassenden Elemente oder die Classe der zu bildenden Form an. Beispiele davon sind:

1) $P\,(1, 2, 3) = 123, 132 \mid 213, 231 \mid 312, 321.$

2) $\overset{3}{C}\,(1 \ldots 5) = 123, 124, 125, 134, 135, 145 \mid$
$234, 235, 245 \mid 345.$

3) $\overset{2}{V}\,(1 \ldots 4) = 12, 13, 14 \mid 21, 23, 24 \mid 31, 32, 34 \mid 41, 42, 43.$

Man darf hiernach auch die Permutation als Veränderung in Bezug auf die Ordnung der Elemente, Combination als Veränderung in Bezug auf die Elemente selbst und Variation als Veränderung in Beziehung auf beides zugleich betrachten.

§. 152. **Wiederholbarkeit der Elemente.** Findet man es angemessen, durch dasselbe Zeichen das Dasein mehrer Dinge derselben Art anzudeuten oder ein Element zu **wiederholen**, so ändern sich die allgemeinen Gesetze für Anordnung und Bildung der Formen durchaus nicht. Es wird aber der Complexionen dann **weniger** geben, als wenn sämmtliche Elemente verschieden sind. Beispiele dieser Art sind:

1) $P\,(1, 1, 2) = 112, 121, 211.$

2) $\overset{3}{C}\,(1, 1, 2, 2, 3) = 112, 113, 122, 123, 223.$

3) $\overset{2}{V}\,(1, 1, 2, 3) = 11, 12, 13, 21, 23, 31, 32.$

Dürfen alle Elemente **gleich viele** Mal wiederholt werden, so kann man dies, wie bei den Potenzen durch **Exponenten** angeben, und ist **unbedingte Wiederholung** gestattet, durch die unbestimmte Bezeichnung n des Exponenten. Beispiele sind:

$$\overset{6}{C}\,(1, 2, 3)^{6},\ \overset{3}{V}\,(0, 1, 2)^{2},\ \overset{4}{C}\,(1\,..\,7)^{n}.$$

§. 153. **Permutation.** Die Bildung sämmtlicher Permutationsformen geschieht nach der allgemeinen Vorschrift (§. 150.) sehr einfach mit Rücksicht auf die einzelnen **Ordnungen**, wie in folgenden Beispielen:

1) $P\,(1, 2, 3, 4) =$

I.		II.		III.		IV.
1234	+	2134	+	3124	+	4123
1243		2143		3142		4132
1324		2314		3214		4213
1342		2341		3241		4231
1423		2413		3412		4312
1432		2431		3421		4321

2) $P\,(1, 2, 2, 3) =$

I.		II.			III.
1223	+	2123	2231	+	3122
1232		2132	2312		3212
1322		2213	2321		3221

Auch kann man, von einem Elemente anfangend, und durch Classen fortschreitend, die Permutationsformen allmählig bilden, indem man durch Anhängen der einzelnen Elemente die Formen der zweiten, dritten Classe u. s. w. erzeugt, wie in folgendem Schema angedeutet ist:

$P\,(a, b, c, d) =$

1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4
a	b	c	d	+	b	a	c	d	+	c	a	b	d	+	d	a	b	c
.	.	d	c		.	.	d	c		.		d	b		.	.	c	b
.	c	b	d		.	c	a	d		.	b	a	d		.	b	a	c
.	.	d	b		.	.	d	a		.	.	d	a		.	.	c	a
.	d	b	c		.	d	a	c		.	d	a	b		.	c	a	b
.	.	c	b		.	.	c	a		.	.	b	a		.	.	b	a

(S. Aufg. 1—3, §. 163.)

§. 154. Combination. Da unter Combiniren das Hervorheben einer bestimmten Anzahl stets verschiedener Elemente verstanden wird, so gilt hier bei Anwendung der allgemeinen Bildungsregel der Zusatz: daß nie auf ein höheres ein niedrigeres Element folge, weil nur dadurch die Erzeugung identischer Combinationsformen vermieden wird. Hiernach können die Formen unmittelbar in einzelnen Ordnungen, wie im Folgenden, dargestellt werden:

1) $\overset{4}{C}\,(1\ldots6) =$

I.			II.		III.
1234	1256	+	2345	+	3456
1235	1345		2346		
1236	1346		2356		
1245	1356		2456		
1246	1456				

2) $\overset{3}{C}\,(1\ldots4)^n =$

I.		II.		III.		IV.
111	+	222	+	333	+	444
112		223		334		
113		224		344		
114		233				
122		234				
etc.		244				

Aber auch durch allmähliges Fortschreiten von der niedrigsten Classe der einzelnen Elemente (durch Anhängen der späteren) kann man die Formen jeder höheren ableiten, wie in folgendem Schema angedeutet ist:

3) $\overset{3}{C}\,(a\ldots f) =$

1	2	3		1	2	3		1	2	3		1	2	3
a	b	c	+	b	c	d	+	c	d	e	+	d	e	f
.	.	d		.	.	e		.	.	f				
.	.	e		.	.	f		.	e	f				
.	.	f		.	d	e								
.	c	d		.	.	f								
etc.				.	e	f								

4) $\overset{3}{C}(a\ldots d)^n =$

1	2	3		1	2	3		1	2	3		1	2	3
a	a	a	+	b	b	b	+	c	c	c	+	d	d	d
.	.	b		.	.	c		.	.	d				
.	.	c		.		d			d	d				
.	.	d		.	c	c								
.	b	b		.	.	d								
etc.				.	d	d								

(S. Aufg. 4–8, §. 163.)

§. 155. **Variation.** Die Bildung solcher Complexionen, worin eine Anzahl von Elementen in allen möglichen Folgen zusammengestellt werden soll, wird sich offenbar durch die beiden vorstehenden Operationen, ein vorgängiges Combiniren und an den erhaltenen Combinationsformen dann vorgenommenes Permutiren, am einfachsten ausführen lassen, obgleich das Variiren auch unmittelbar wie in folgendem Beispiele geschehen kann:

1) $\overset{3}{V}(1\,..\,4) =$

I.		II.		III.		IV.
123	+	213	+	312	+	412
124		214		314		413
132		231		321		421
134		234		324		423
142		241		341		431
143		243		342		432

Durch Combination würde man die Formen 123, 124, 134, 234 und durch deren Permutation die nämlichen Variationsformen, wie vorhin, jedoch in folgender Anordnung erhalten haben:

2) $\overset{3}{V}(1\,..\,4) =$

123	+	124	+	134	+	234
132		142		143		243
213		214		314		324
231		241		341		342
312		412		413		423
321		421		431		432

Die successive Bildung der Variationsformen durch Fortschreiten von einer Classe zur andern geschieht dadurch, daß man ein Element nach dem anderen derjenigen Form, worin es noch nicht enthalten ist, anhängt, wie in folgender Darstellung:

3) $\overset{3}{V}(a\,..\,d) =$

1	2	3		1	2	3		1	2	3		1	2	3
a	b	c	+	b	a	c	+	c	a	b	+	d	a	b
.	.	d		.	.	d		.	.	d		.	.	c
.	c	b		.	c	a		.	b	a		.	b	a
.	.	d		.	.	d		.	.	d		.	.	c
.	d	b		.	d	a		.	d	a		.	c	a
.	.	c		.	.	c		.	.	b		.	.	b

Sollte aber unbedingte Wiederholbarkeit aller Elemente gestattet

sein, so dürfen jeder vorhandenen Form alle Elemente ohne Ausnahme angehängt werden.

$$4)\ \overset{3}{V}(a\,..\,d)^n = \begin{array}{|ccc|}\multicolumn{3}{c}{1\,2\,3}\\ a&a&a\\ .&.&b\\ .&.&c\\ .&.&d\\ .&b&a\\ \multicolumn{3}{|c|}{etc.}\end{array} + \begin{array}{|ccc|}\multicolumn{3}{c}{1\,2\,3}\\ b&a&a\\ .&.&b\\ .&.&c\\ .&.&d\\ .&b&a\\ \multicolumn{3}{|c|}{etc.}\end{array} + \begin{array}{|ccc|}\multicolumn{3}{c}{1\,2\,3}\\ c&a&a\\ .&.&b\\ .&.&c\\ .&.&d\\ .&b&a\\ \multicolumn{3}{|c|}{etc.}\end{array} + \begin{array}{|ccc|}\multicolumn{3}{c}{1\,2\,3}\\ d&a&a\\ .&.&b\\ .&.&c\\ .&.&d\\ .&b&a\\ \multicolumn{3}{|c|}{etc.}\end{array}$$

(S. Aufg. 9—15, §. 163.)

§. 156. **Anzahl der Permutationsformen.** Aus dem successiven Bildungsgange der Permutationsformen erkennt man sehr leicht, daß ihre Anzahl für ein Element (a) = 1, für zwei (a, b) = 1. 2, für drei (a, b, c) = 1. 2. 3 oder 6, für vier (a, b, c, d) = 1. 2. 3. 4 oder 24 allgemein für n Elemente = 1. 2. 3. 4....n sein müsse.

Sollten aber einige Elemente wiederholt vorkommen, so wird die Anzahl der Permut. Formen geringer ausfallen. Denkt man diese sämmtlich schon gebildet und dann die gleichen Elemente in verschiedene verwandelt, so entstehen aus jeder Form in Beziehung auf ein qmal wiederholtes Element 1.2.3...q, in Beziehung auf ein anderes rmal wiederholtes 1.2.3...r neue Formen. Betrachtet man aber sämmtliche gegebene n Elemente, mit Einschluß der gleichen, als verschieden, so ist, wenn man das Product 1.2.3.4...n abkürzend durch $\overset{n}{p}$, also 1. 2. 3 . . . q durch $\overset{q}{p}$, und 1. 2. 3...r durch $\overset{r}{p}$ andeutet, die Anzahl $\overset{n}{p}$ um das $\overset{q}{p}$ und $\overset{r}{p}$fache zu groß, folglich die wirkliche Anzahl

$$\frac{\overset{n}{p}}{\overset{q}{p}\times\overset{r}{p}} = \frac{1.2.3...............n}{1.2.3....q.1.2.3..r}.$$

(S. Aufg. 16—20, §. 163.)

§. 157. **Anzahl der Variationsformen.** Aus dem allmäligen Fortschritte der Variation von einer Classe zur andern ergiebt sich, wenn n verschiedene Elemente vorhanden sind, als Anzahl der Variationsformen für die erste Classe $\overset{1}{v} = n$, für die zweite, weil jeder vorhandenen Form nach der Reihe alle (n — 1) Elemente, die nicht in ihr vorkommen, angehängt werden sollen, $\overset{2}{v} = n\,(n-1)$; für die dritte, weil die (n — 2) übrigen Elemente jeder einzelnen Complexion wiederum anzuhängen sind, $\overset{3}{v} = n\,(n-1)\,(n-2)$, also allgemein für die kte Classe, da jede Form der (k — 1)ten mit den noch übrigen n — (k—1) Elementen der Reihe nach zu verbin-

den ist, um die Variationsformen derselben zu bilden $\overset{k}{v} = n\,(n-1)\,(n-2 \ldots (n-(k-1))$ oder $= n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-k+1)$.

Sollen die Elemente hingegen unbedingt wiederholt werden, so ist zwar auch $\overset{1}{v} = n$; aber, weil jeder Form alle Elemente angehängt werden dürfen $\overset{2}{v} = n \,.\, n = n^2$, $\overset{3}{v} = n^2 \,.\, n = n^3$; allgemein $\overset{k}{v} = n^k$.

§. 158. **Anzahl der Combinationsformen.** Da aus n Elementen sich allgemein $\overset{k}{v} = n\,(n-1)\,(n-2) \,.\,.\, (n-k+1)$ Variationsformen der kten Classe bilden lassen und eben diese Formen durch die 1 . 2 . 3 . 4 . . . . kmalige Permutation der Combinationsformen zu k aus n Elementen entstanden sein würden, so findet man als Anzahl dieser letztern:

$$\overset{k}{c} = \frac{\overset{k}{v}}{\overset{k}{p}} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \,.\, k}.$$

Ist aber unbedingte Wiederholbarkeit der Elemente für die Combinationen gestattet, so erhält man nicht, wie es scheint, $\frac{n^k}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots k}$, sondern $\frac{n\,(n+1)\,(n+2) \ldots (n+k-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \,.\, k}$ verschiedene Combinationsformen. Denn um aus den n Elementen a, b, c, d . . . . successiv sämmtliche Combinationsformen (nach §. 154, 4.) zu bilden, darf man zunächst nur jedes Element einem **gleichen** oder **frühern** also a **einmal**, b **zweimal** u. s. f. einem andern anhängen. Dadurch entstehen nun der Reihe nach 1, 2, 3 . . . n Combinationsformen zu 2 Elementen, unter denen man wiederum der ersten Form a, den (1 + 2) ersten b, den (1 + 2 + 3) ersten c u. s. f. anhängen darf, um die Combinationsformen zu 3 Elementen zu bilden. Man erhält für diese Classe mithin der Reihe nach 1, 3, 6, 10 . . . . Formen, aus denen durch Anhängen der einzelnen Elemente auf gleiche Weise 1, 4, 10, 20 . . . Formen zu 4 Elementen sich ergeben, von denen man zu denen der 5ten Classe u. s. w. fortschreiten kann. Jene Zahlen aber, welche die **Menge der allmählig gebildeten Combinationsformen** angeben, sind keine andern, als die sogenannten **figurirten Zahlen**, wie eine Vergleichung mit deren (im §. 140. mitgetheilten) Tafel zeigt. Es wird also durch deren allgemeinen Ausdruck

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) \ldots (n+k-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots \ldots k}$$

zugleich die Anzahl aller Combinationsformen angegeben, welche man

durch die Zusammenstellung von k aus n wiederholbaren Elementen allmählig zu bilden vermag.

Anmerkung. Sollen n Elemente auf jede mögliche Weise in zwei Abtheilungen, A, B zerlegt werden, deren eine k und die andere n — k = r Elemente enthalte, so ist die Anzahl solcher Zerlegungen für A und B:

$$(A) \overset{k}{c_n} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3.\ldots\ldots.k}, \quad (B) \overset{r}{c_n} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots\ldots.r},$$

und da jede dieser Abtheilungen durch Bildung der andern von selbst entsteht, der Werth für (A) und (B) der nämliche. Eben so findet man, wenn n Elemente in drei Abtheilungen A, B, C zerlegt werden sollen, von denen die erste k, die zweite r, und die dritte s Elemente enthalten möge, als Anzahl aller möglichen Complexionen, indem jede einzelne von A mit jeder einzelnen von B sich verbinden läßt, die gleichbedeutenden Ausdrücke

$$\overset{k}{c_n} \times \overset{r}{c_{n-k}} = \overset{k}{c_n} \times \overset{s}{c_{n-k}} = \overset{r}{c_n} \times \overset{k}{c_{n-r}} \text{ u. s. w.}$$

(S. Aufg. 21—26, §. 163.)

§. 159. Bedingte Combination. Es können Fälle eintreten, in denen nicht alle Combinationsformen, sondern nur solche, die einer gewissen Bedingung genügen, gültig bleiben. Solcher Bedingungen lassen sich zwar mancherlei denken, z. B. daß die Elemente in den Formen mit gleicher Differenz oder nach demselben Verhältniß fortschreiten, wie in 1357, 2468 oder 124, 248; die brauchbarste Bedingung ist aber die, daß die Elemente, als Zahlen betrachtet, in allen Formen dieselbe Summe geben. — Um nun nach einer bestimmten Regel Combinationsformen zu gegebenen Summen zu bilden, darf man nur alle Stellen bis zur vorletzten mit den niedrigsten, die letzte aber mit dem Ergänzungs-Elemente ausfüllen und beim Fortschreiten die früheren Stellen allmählig um eben so viel erhöhen, als man die letzten erniedrigt, ohne indessen je ein niedrigeres auf ein höheres Element folgen zu lassen. Beispiele solcher Combinationen, wofür die allgemeine Andeutung ${}^{r}\overset{k}{C}(1\ .\ .\ n)$ gilt, sind folgende:

1) ${}^{10}\overset{3}{C}(1\ .\ .\ .\ 7) = 127, 136, 145, 235.$

2) ${}^{14}\overset{4}{C}(1\ .\ .\ .\ 8) = 1238, 1247, 1256, 1346, 2345.$

3) ${}^{5}\overset{4}{C}(0\ .\ .\ .\ 5)^{n} = 0005, 0014, 0023, 0113, 0122, 1112.$

4) ${}^{20}\overset{5}{C}(3\ .\ .\ .)^{n} = 33338, 33347, 33356, 33446, 33455, 34445, 44444.$

Man erkennt leicht, daß in zwei Fällen diese Art von Combination unmöglich wird; nämlich 1) wenn die höchste Form die Summe noch nicht erreicht, oder 2) wenn die niedrigste Form dieselbe

schon übersteigt, wie es in ${}^{10}\overset{3}{C}(123)^n$ oder ${}^{10}\overset{3}{C}(4\ldots)^n$ der Fall ist. S. Aufg. 28, 29, §. 163.

§. 160. Bedingte Variation. Auch beim Variiren kann die Bedingung gemacht werden, daß die Summe der Elemente in allen Formen dieselbe sei, und für eine solche Variation zu bestimmten Summen gelten die nämlichen Regeln, wie oben, nur daß hier, wo jede andere Folge der Elemente eine andere Form erzeugt, auch niedrigere nach höheren Elementen gesetzt, oder die vorläufig gebildeten Combinationsformen noch permutirt werden dürfen. Folgende Beispiele mögen dieses verdeutlichen:

1) ${}^{9}\overset{2}{V}(1\,.\,.\,8) = 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,\ 72,\ 81.$

2) ${}^{7}\overset{3}{V}(1\,.\,.\,.) = 124,\ 142,\ 214,\ 241,\ 412.\ 421.$

3) ${}^{6}\overset{4}{V}(1\,.\,.\,.\,.)^n = 1113,\ 1122,\ 1131,\ 1212,\ 1221,\ 1311,\ 2112,\ 2121,\ 2211,\ 3111.$

4) ${}^{4}\overset{3}{V}(0\,.\,.\,.\,3)^n = 013,\ 022,\ 031,\ 103,\ 112,\ 121.\ 130,\ 202,\ 211,\ 220,\ 301,\ 310.$

Auch für die Variation zu bestimmten Summen treten zwei Fälle des Widerspruchs ein, nämlich dann, wenn die höchste Form zu wenig oder wenn die niedrigste Form zu viel giebt, wie z. B. in ${}^{9}\overset{2}{V}(1\ldots4)^n$ oder ${}^{9}\overset{2}{V}(6\ldots.)^n$. S. Aufg. 27 u. 30, §. 163.

§. 161. Anwendungen der Combinationslehre. Da bei den Zusammenstellungen, mit denen die Combinationslehre sich beschäftigt, die Elemente durchaus nicht in Absicht ihres Inhalts, sondern allein in Beziehung auf ihre Menge und (gleiche oder ungleiche) Beschaffenheit in Betracht gezogen werden, so findet sie in allen jenen Fällen Anwendung, wo man gleich- oder ungleichartige Einzelheiten in irgend einer Absicht zu verbinden hat. Zunächst wird durch ihre Anwendung die leichte und sichere Uebersicht einer Mannigfaltigkeit von Fällen gewonnen, welche letzte um so größer sein muß, je beträchtlicher die Anzahl der zu verbindenden Elemente ist. Die combinatorischen Operationen verschaffen die, den jedesmaligen Bedingungen der Zusammenstellung genügenden Complexionen oder Formen in gehöriger Ordnung und Vollständigkeit, sofern die Bildung dieser Formen selbst verlangt wird. Ungleich häufiger aber tritt die Forderung ein, nicht jene Zusammenstellungen aus gegebenen Elementen wirklich zu bilden, sondern vielmehr anzugeben, wie viele derselben von einer gewissen Art unter gegebenen Umständen überhaupt möglich sein werden, welches durch Berechnung der Anzahl von Permutations-, Combinations- oder Variationsformen geschieht.

Unter den Anwendungen der Combinationslehre auf wirkliche Formenbildung sind zunächst diejenigen zu beachten, welche zur Erleichterung und Sicherheit rein arithmetischer Betrachtungen dienen, z. B. der Zerlegung einer Zahl in ihre ganzen Summanden oder Factoren (§§. 16. und 18.), besonders aber der Behandlung allgemeiner Reihen von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots . + kx^n \ldots .$$

indem man nämlich die Glieder solcher Reihen als Elemente betrachtet, die nach gewissen Bestimmungen zusammenzustellen sind, und sie deshalb ihrer Folge nach durch Stellenzahlen (Indices) bezeichnet, die mit den Exponenten der Grundzahl x übereinstimmen. Sollen z. B. die Elemente als Factoren angesehen werden, so ist die Bedeutung der Combinationsformen

$$\overset{3}{C}\,(0123) = 012,\ 013,\ 023,\ 123$$

in Beziehung auf die vier ersten Glieder der obigen Reihe:

$$abcx^3,\ abdx^4,\ acdx^5,\ bcdx^6.$$

Sind dagegen der Reihen mehre gegeben, z. B.

$$\text{I. } a + bx + cx^2 \quad \text{II. } f + gx + kx^2 \quad \text{III. } p + qx + rx^2,$$

so hat man die Variationsformen

$$\overset{3}{V}\,(012)^n = 000,\ 001,\ 002,\ 011,\ 020 \ldots . 222$$

mit jeder ihrer einzelnen Stellen auf die entsprechende (erste, zweite, dritte) Reihe zu beziehen, und erhält nach ihrer Andeutung die Producte:

$$afp,\ afqx,\ afrx^2,\ agqx^2,\ \ldots .\ ckrx^6.$$

Eine andere sehr ausgedehnte Anwendung findet die Combinationslehre in geometrischen Betrachtungen, in sofern die Verbindung einer bestimmten Anzahl von Punkten, Linien, Winkeln u. s. w. aus einem gegebenen Vorrath derselben, oder auch nur die Angabe der Menge solcher möglichen Verbindungen gefordert wird. Nicht minder förderlich erscheint sie für manche naturwissenschaftliche Untersuchungen, z. B. über die Mannigfaltigkeit der Krystallformen, die Verbindungen der chemischen Elemente, der consonirenden Töne u. s. w., am unmittelbarsten aber anwendbar auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, wovon die Grundzüge hier folgen mögen.

§. 162. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit.

1) Sind unter m möglichen Fällen g solche, die einer bestimmten Forderung entsprechen und daher als die günstigen Fälle von den übrigen (m — g) oder u ungünstigen unterschieden werden mögen, so wird das Verhältniß der günstigen zu allen möglichen Fällen die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines günstigen Falles, das Verhältniß der ungünstigen zu allen möglichen Fällen aber die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit genannt. Bezeichnet man jene durch w, diese durch v, so ist demnach

$$\text{(I.)}\ w = \frac{g}{m} \text{ und } v = \frac{u}{m},$$

in sofern (nach §. 67.) jedes Verhältniß als eine Quotienten- oder Bruchform betrachtet werden darf. Die Wahrscheinlichkeit ist demnach um so geringer, je kleiner die Anzahl der günstigen im Vergleich zu derjenigen aller möglichen Fälle, hingegen um so größer, je beträchtlicher jene Anzahl in Beziehung zu diesen wird. Sollten alle möglichen Fälle zugleich günstig, also das Eintreten eines günstigen Falles gewiß sein, so verwandelt sich der Werth von w in die Einheit, welche mithin unter den Wahrscheinlichkeitszahlen als Ausdruck der Gewißheit anzusehen ist. So findet man z. B., wenn gefordert wird, ein Bild aus 52 Spielkarten zu ziehen, $w = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$, $v = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$, hingegen für das Erscheinen einer beliebigen Karte, wenn eine solche aus 52 gezogen werden soll, $w = \frac{52}{52} = 1$.

2) Sind unter allen möglichen m Fällen günstige von verschiedener (der ersten, zweiten, dritten ....) Art, und bezeichnet man deren Anzahl durch $g_1, g_2, g_3 \ldots$ die partiellen Wahrscheinlichkeiten aber durch $w_1, w_2, w_3 \ldots$ so ist

$$\text{(II.)}\ w = w_1 + w_2 + w_3 \ldots = \frac{g_1 + g_2 + g_3 \ldots}{m}$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für eines von mehren verschiedenartigen, aber gleich gültigen Ereignissen ist der Summe ihrer partiellen Wahrscheinlichkeiten gleich. Soll z. B. mit einem Würfel eines der Felder 1, 2, 3 geworfen werden, so hat man $w_1 = \frac{1}{6}$, $w_2 = \frac{1}{6}$, $w_3 = \frac{1}{6}$, also $w = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3) Wird aber das Ereigniß nur dann zu einem günstigen, wenn zwei oder mehre der einzelnen günstigen Fälle zugleich eintreten oder zusammentreffen, so wird der Ausdruck der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit, wenn man die möglichen Fälle der partiellen Ereignisse durch $m_1, m_2, m_3 \ldots$ andeutet:

$$\text{(III.)}\ w = w_1 \times w_2 \times w_3 \ldots = \frac{g_1 \times g_2 \times g_3 \ldots}{m_1 \times m_2 \times m_3 \ldots}$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für ein, aus mehren einzelnen zusammengesetztes Ereigniß ist dem Producte ihrer partiellen Wahrscheinlichkeiten gleich. Denn da hier jeder der m_1 mit jedem der m_2 Fälle zusammentreffen kann, so entstehen durch ihre Verbindung $m_1 \times m_2$ mögliche Fälle, die durch das Hinzutreten von m_3 neuen Fällen auf $m_1 \times m_2 \times m_3$ u. s. w. anwachsen. Dasselbe gilt von den günstigen Fällen $g_1, g_2, g_3 \ldots$, woraus denn nach dem Be-

griffe der Wahrscheinlichkeit der Ausdruck (III.) folgt. Werde z. B. verlangt, aus einer Urne, welche die Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6 enthält, in 3 Zügen, zuerst 1, dann entweder 2 oder 3, und endlich 4, 5 oder 6 zu ziehen, so ist w

$$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{20}.$$

Sind die partiellen Ereignisse einander gleich (oder Wiederholung eines einzigen), so wird $w = \left(\frac{g}{m}\right)^n$. So findet man z. B., wenn mit jedem von drei Würfeln 6 geworfen werden soll, $w = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$.

4) Sollen von m möglichen Fällen, welche aus g der ersten und u der zweiten Art bestehen, im Ganzen k + r, und zwar k der ersten mit r der zweiten Art in bestimmt gegebener Form zusammentreffen, so wird der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit für jede solche Folge:

$$\text{(IV.)}\; w = \left(\frac{g}{m}\right)\left(\frac{g-1}{m-1}\right)\cdot\cdot\left(\frac{g-k+1}{m-k+1}\right)\times\left(\frac{u}{m-k}\right)\left(\frac{u-1}{m-k-1}\right)\cdot\cdot\left(\frac{u-r+1}{m-k-r+1}\right).$$

Denn die einzelnen Factoren stellen die Wahrscheinlichkeiten für das gemeinschaftliche Eintreten eines ersten, zweiten, allgemein kten der einen Art und eben so eines ersten, zweiten, allgemeinen rten Falles der andern Art dar, woraus der Forderung gemäß (nach III.) das Product gebildet werden muß. Sollen z. B. von 20 verschiedenen Nummern, deren 8 besetzt und 12 unbesetzt sind, 6 gezogen werden, so ist für die Forderung, daß unter diesen gerade zwei besetzte zuerst herauskommen, oder zwischen den übrigen sonst irgend eine bestimmte Stelle einnehmen:

$$w = \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{7}{19}\right)\times\left(\frac{12}{18}\right)\left(\frac{11}{17}\right)\left(\frac{10}{16}\right)\left(\frac{9}{15}\right) = \frac{77}{3230}.$$

5) Wird aber unter den nämlichen Voraussetzungen keine bestimmte Folge für die einzelnen Fälle vorgeschrieben, sondern eine beliebige Ordnung derselben gestattet, so erhält man durch Hinzufügung eines Factors, der (nach 158, Anm.) die Anzahl der Versetzungen unter k Elementen der einen und r der andern Art ausdrückt.

$$\text{(V.)}\; w = \overset{k}{c}_{k+r}\left(\frac{g}{m}\right)\cdots\left(\frac{g-k+1}{m-k-1}\right)\cdot\left(\frac{u}{m-k}\right)\cdots\cdots\left(\frac{u-r+1}{m-k-r+1}\right).$$

So findet man z. B. als Wahrscheinlichkeit, daß von 30 besetzten Nummern unter 90, wenn 5 derselben gezogen werden, gerade drei herauskommen werden, sofern die Folge der Nummern gleichgültig ist:

$$w = \left(\frac{5.4.3}{1.2.3}\right)\left(\frac{30}{90}\right)\cdot\left(\frac{29}{89}\right)\left(\frac{28}{88}\right)\cdot\left(\frac{60}{87}\right)\left(\frac{59}{86}\right) = \frac{20650}{126291}.$$

(6) Werden die m möglichen Fälle nicht vermindert, indem k günstige mit r ungünstigen Fällen sich verbinden, welches namentlich geschieht, wenn die nämlichen Umstände bei jedem Ereigniß wiederkehren, so werden die partiellen Wahrscheinlichkeiten einander gleich, und daher

$$\text{(VI.)}\ w = \overset{k}{c}_{k+r} \cdot \left(\frac{g}{m}\right)^k \cdot \left(\frac{u}{m}\right)^r.$$

So ist z. B., wenn bei 7maligem Wurf mit einem Würfel (oder auch bei einmaligem Wurf mit 7 Würfeln) ein bestimmtes Feld gerade dreimal geworfen werden soll:

$$w = \frac{7.6.5}{1.2.3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{21875}{279936}.$$

7) Soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß von zwei verschiedenen Ereignissen das erste, oder wenn dieses nicht geschieht, dann doch das zweite eintreffe, so ist die einfache Wahrscheinlichkeit für das anfängliche Eintreffen des ersten Ereignisses $= w_1$, dagegen die zusammengesetzte für das Erscheinen des zweiten $= (1 - w_1)w_2$, indem dieses zweite Ereigniß nur dann stattfinden kann, wenn das erste nicht eingetreten ist, weshalb w_2 mit dessen entgegengesetzter Wahrscheinlichkeit $(1 - w_1)$ nach III. multiplicirt werden muß. Da nun aber das erste oder alsdann das zweite Ereigniß eintreten soll, so ist die verbundene Wahrscheinlichkeit für diese Forderung nach (II.):

$$\text{(VII.)}\ w = w_1 + w_2(1 - w_1) = w_1 + w_2 - w_1 . w_2.$$

So ist z. B., wenn mit zwei Würfeln zuerst 8, oder wenn dies nicht geschieht, beim zweiten Wurfe 9 Augen geworfen werden sollen:

$$w = \frac{5}{36} + \frac{4}{36}\left(1 - \frac{5}{36}\right) = \frac{5}{36} + \frac{4.31}{36.36} = \frac{19}{81}.$$

8) Von der im Vorstehenden durchgängig betrachteten absoluten unterscheidet sich die relative Wahrscheinlichkeit als ein aus zwei absoluten w_1, w_2 sich ergebendes Zahlenverhältniß:

$$\frac{w_1}{w_1 + w_2} \text{ oder } \frac{w_2}{w_1 + w_2}.$$

So findet man z. B. die relative Wahrscheinlichkeit für die Forderung, mit 2 Würfeln eher 7 als 10 Augen zu werfen:

$$\frac{w_1}{w_1 + w_2} = \frac{6}{6 + 3} = \frac{2}{3}.$$

Anmerkung. Bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Glücksspiele oder Wetten, wo es sich um Gewinn oder Verlust einer gewissen Summe handelt, bezeichnet man das Product aus der Wahrscheinlichkeit und dieser Summe mit dem Namen der mathematischen Erwartung. Sind nun unter $m_1 + m_2$ Fällen dem ersten Spieler m_1, dem andern m_2 günstig und der Einsatz des ersten $= a_1$, des zweiten $= a_2$, so hat man als Ausdruck der math. Erwartung für beide:

(1) $e_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} . a_2 = w_1 . a_2$; (2) $e_2 = \frac{m_2}{m_1 + m^2} . a_1 = w_2 . a_1$;
wonach wenn $e_1 = e_2$ sein soll, $a_1 : a_2 = w_1 : w_2$ sein muß.

S. Aufg. 31—50, §. 163.

§. 163. Aufgaben.

1. Das Wort **Roma** auf jede mögliche Weise umzustellen.
2. Eben so die Wörter **Alba** und **Otto**.
3. Eben so die harmonischen Töne c, e, g, b.
4. Welche verschiedene Würfe durchaus ungleicher Felder sind mit drei Würfeln möglich?
5. Aus 7 verschiedeuen Nummern sollen 4 gezogen werden. Welches sind die möglichen Ziehungen?
6. Welches sind die möglichen binären Verbindungen von Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Kohlenstoff, Schwefel und Phosphor (angedeutet durch 1, 2, 3, 4, 5, 6)?
7. Welches sind die ternären Verbindungen derselben Elemente?
8. Welche Dreiklänge lassen sich aus den Tönen c, e, g, b, d bilden?
9. Von vier verschiedenen Nummern sollen zwei gezogen werden, wobei zugleich ihre Folge in Betracht kommt. Sämmtliche mögliche Fälle aufzuzählen.
10. Die möglichen Arten eines Wechsels von je drei der 6 Farben: roth, orange, gelb, grün, blau, violett aufzuzählen.
11. Die zwei-, drei- und viersylbigen Versglieder aus langen und kurzen Sylben (a und b) geordnet darzustellen.
12. Aus einer Urne, worin 4 mit den Nummern 1, 2, 3, 4 bezeichnete Kugeln enthalten sind, soll dreimal nach einander eine Kugel gezogen, aber jedesmal wieder hineingeworfen werden. Welche verschiedene Ziehungen sind hier möglich?
13. Eben so, wenn unter gleichen Umständen von 8 Kugeln zwei nach einander gezogen werden sollen.
14. Welche verschiedenartige Würfe lassen sich mit zwei Würfeln thun?
15. Welche Würfe sind dagegen mit 2 Würfeln überhaupt möglich, wenn man jede Seite derselben berücksichtigt?
16. In wie vielen Folgen lassen die acht Töne der Tonleiter sich verbinden?
17. Wie viele Umstellungen gestattet das Wort **Mathematik**?
18. Wie oft können 10 Personen ihre Plätze wechseln?
19. Wie viele Umstellungen erlauben die Figuren auf der hintern Reihe des Schachbretts?
20. Wie viel beträgt die Summe der Ziffern in allen Permutationsformen der Elemente 112234 zusammengenommen?

21. Wie viele Combinationen zu 2, 3, 4 oder 5 Elementen sind aus 40 verschiedenen möglich?
22. Wie viel Amben, Ternen und Quaternen aus 90 Nummern?
23. Wie viele Producte zu 3, 6 oder 9 Factoren lassen sich aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 bilden?
24. Wie viele gänzlich verschiedene Spiele kann ein Piketspieler in die Hand bekommen? (Der Karten sind 32, wovon er 12 erhält.)
25. Auf wie viele Arten lassen sich 20 Personen so in zwei Abtheilungen stellen, daß die eine derselben 7, die andere 13 enthalte?
26. Auf wie viele Arten können 18 Kugeln in drei Haufen von 4, 5 und 9 Kugeln abgetheilt werden?
27. Ein Körper enthalte neun Atome (untheilbare Gewichtstheile) aus allen in Aufgabe 6 erwähnten chemischen Elementen. Welche Verbindungen sind hier möglich?
28. Welches sind die möglichen Verbindungen zu 8 Atomen aus jenen Elementen, wenn nicht alle, sondern vier beliebige unter ihnen den zusammengesetzten Körper bilden?
29. Auf welche und wie vielerlei Art können in vier Würfen mit einem Würfel 20 Augen geworfen werden?
30. Wie viel mal und auf welche Art kommt unter allen möglichen Würfen mit 4 Würfeln der Wurf von 20 Augen vor?

---

31. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem vollen Kartenspiele einen König zu ziehen? Ferner König oder Dame?
32. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Wurf 12 mit zwei Würfeln? Eben so für die Würfe 4, 5, 6 und 7? Ferner für den Wurf 4 mit drei Würfeln?
33. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen einer Treffkarte unter 6 aus einem Piketspiele (von 32) gezogenen Karten?
34. Eben so, daß unter 10 aus 32 gezogenen Karten gerade vier Coeurblätter vorkommen werden?
35. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln gerade zwei gleiche Felder zu werfen?
36. Eben so für drei gleiche Felder mit 5 Würfeln?
37. Eben so, mit drei Würfeln die Felder 2, 4 und 6 zu werfen?
38. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 12 besetzten unter den 90 Nummern eines Lotto's gerade zwei gezogen werden? (Die Ziehung enthält 5 Nummern.)
39. Eben so, daß gerade vier unter 24 besetzten Nummern herauskommen?
40. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, mit zwei Würfeln im ersten Wurfe 5, oder wenn dieses nicht gelingt, im zweiten Wurfe 7 Augen zu werfen?

41. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei zweimaligem Aufwerfen eines Thalers wenigstens ein Mal die Bildseite oben zu werfen?
42. Die relative Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer Ambe, Terne und Quaterne im Lotto zu finden.
43. Eben so für die Würfe von 4 und 9 Augen mit 2 Würfeln?
44. Eben so für den Wurf der Felder 3 und 5 und denjenigen von irgend zwei gleichen Feldern?
45. Ist es wahrscheinlicher aus einem vollen Spiele (von 52) in drei Zügen drei Karten von verschiedener Farbe oder drei Bilder zu bekommen?
46. Eben so, in zwei Zügen eine Treff- und eine Coeurkarte, oder vielmehr zwei Bilder?
47. Eben so, aus einer Urne mit 5 weißen, 6 rothen und 7 schwarzen Kugeln in zwei Zügen zwei rothe oder vielmehr eine weiße und eine schwarze zu ziehen?
48. Eben so, daraus in drei Zügen 3 verschiedenartige oder vielmehr zwei schwarze und eine weiße zu ziehen?
49. Wie verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten, aus den 90 Lottonummern zwei gerade Zahlen oder aus 52 Karten zwei von gleicher Farbe zu ziehen?
50. Eben so, mit 4 Würfeln 15 Augen oder mit 3 Würfeln 12 Augen zu werfen?

Zweites Capitel.

Die Reihen-Entwickelung.

I. Die Reihen überhaupt.

§. 164. Form der Reihen. Jede aus einer begränzten Anzahl von Gliedern bestehende Reihe kann in Beziehung auf die in denselben enthaltene Grundzahl entweder steigend oder fallend angeordnet werden; schreitet sie hingegen in's Unbegränzte fort, so ist nur eine jener Anordnungen nach dem allgemeinen Schema:

$$ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \text{rc.}$$

zulässig, welches die bestimmtere Form

$$ax^\alpha + bx^{\alpha+\mu} + cx^{\alpha+2\mu} + \text{rc.}$$

annimmt, sofern die Exponenten der Grundzahl mit gleicher Differenz fortschreiten. Dann aber kann man der Reihe durch Ausscheidung des gemeinschaftlichen Factors x^α und Substitution von z für x^μ die einfachere Form

$$x^\alpha (a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{2c.})$$

ertheilen, worin die Exponenten in der Folge der natürlichen Zahlen, übereinstimmend mit der Stelle der Glieder fortschreiten.

§. 165. Bildung der Reihen. Reihen der vorstehenden Form können entweder nach irgend einem willkürlichen Gesetze, wie z. B. die Verhältnißreihen durch fortgesetzte Multiplication mit dem nämlichen Factor, oder durch wirklich vollzogene Ausführung einer angedeuteten Operation gebildet werden. So erhält man durch ausgeführte Multiplication oder Division:

$$(1)\quad (1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

$$(2)\quad \frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 \ldots.$$

also im ersten Falle eine endliche oder geschlossene, im zweiten hingegen eine unbegränzt fortschreitende Reihe, beide nach den steigenden Potenzen der Grundzahl x geordnet. Augenscheinlich ist für die zweite Reihe keine andere Anordnung zulässig, während die Glieder der ersten auch in umgekehrter Folge gesetzt werden dürfen. Bezeichnet man nun allgemein durch $F(x)$, $\varphi(x)$ u. s. w. eine nur angedeutete Function von x, d. h. einen Zahlenausdruck, in welchem irgend eine mit x vorzunehmende Operation durch Zeichen vorgeschrieben wird, so kann mit Rücksicht auf die obigen und ähnliche Entwickelungen solcher Zahlenausdrücke untersucht werden, in welchen Reihen sich die gegebene Function etwa werde entwickeln lassen.
(S. Aufg. 1—4, §. 184.)

§. 166. Coefficienten der Reihen. Insofern als Entwickelung irgend einer angedeuteten Function $F(x)$ die Reihe

$$(\mathrm{I})\quad A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots. + Lx^n \ldots.$$

und eben so als die einer anderen Function $\varphi(x)$ die Reihe

$$(\mathrm{II})\quad \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots. + \lambda x^n \ldots.$$

angenommen wird, welche mit jener in Absicht des Fortschritts der Grundzahl x völlig übereinstimmt, kann eine Abweichung beider Reihen nur in der Verschiedenheit ihrer Coefficienten liegen. Sind daher die Functionen $F(x)$ und $\varphi(x)$ verschieden, wie z. B. $(1+x)^3$ und $(1+x)(1+2x)(1+3x)$, so müssen es ebenfalls die Coefficienten (wenigstens einzelner) gleichstelliger Glieder ihrer Entwickelung sein. Werden dagegen die Functionen $F(x)$ und $\varphi(x)$, wenn auch ihrem Ausdrucke nach von verschiedener Form, wie z. B. $\sqrt{(1+x)}$ und $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, doch ihrem Begriffe nach als identisch angenommen, so müssen auch ihre Entwickelungen (I) und (II) die nämlichen, d. h. sämmtliche Coefficienten gleich hoher Glieder identisch sein, auf welchem Wege man immerhin zu denselben gelangen möge. Durch Subtraction beider Reihen erhält man nämlich:

$$(\mathrm{III})\quad F(x) - \varphi(x) = (A-\alpha) + (B-\beta)x + (C-\gamma)x^2 + (D-\delta)x^3 \ldots$$

welche Gleichung der Voraussetzung gemäß für jeden beliebigen Werth von x zu Null werden muß. Setzt man nun zunächst $x=0$, so ergiebt sich $A-\alpha=0$, und indem man dann einen beliebig kleinen Werth k für x substituirt, diesen aber durch Division wiederholt ausscheidet:

$$\frac{o}{k}=(B-\beta)+(C-\gamma)k+(D-\delta)k^2+\text{etc.}, \text{ also } B-\beta=o,$$

in sofern nämlich sämmtliche den Factor k enthaltende Glieder als verschwindend angesehen werden können, wenn man den Werth von k in's Unendliche abnehmen läßt. Eben so ergiebt sich

$$\frac{o}{k}=(C-\gamma)+(D-\delta)k+(E-\varepsilon)k^2+\text{etc.}, \text{ also } C-\gamma=o \text{ u. s. f.}$$

Folglich ist allgemein $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$, $D=\delta$ u. s. f. oder mit anderen Worten: es läßt sich die nämliche Function nicht in zwei, nach den ganzen Potenzen derselben Grundzahl gleichmäßig fortschreitenden Reihen mit verschiedenen Coefficienten darstellen.

Das Nämliche gilt von Reihen der Form:

(IV) $F(x, y) = A+Bx+Cy+Dxy+Ex^2 \ldots.$

(V) $\varphi(x, y) = \alpha+\beta x+\gamma y+\delta xy+\varepsilon x^2+\ldots.$

welche in Beziehung auf zwei Grundzahlen von unbestimmtem, beliebigem Werthe fortschreiten, wofür der Beweis in gleicher Weise zu führen ist, indem man abwechselnd x und y anfangs annullirt und dann $=k$ setzt.

§. 167. Totalwerthe der Reihen. Durch Substitution eines bestimmten Werthes für die Grundzahl x erhält jede Reihe der Form:

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3 \ldots.+Lx^k+Mx^{k+1} \ldots.$$

worin die Coefficienten als von x abhängige, gegebene Zahlen zu betrachten sind, einen ebenfalls bestimmten Werth, sofern sie eine begränzte Menge von Gliedern enthält, während ihr Werth im Allgemeinen unbestimmt bleibt, wenn die Anzahl ihrer Glieder unbegränzt ist. So wird z. B., wenn man in den Reihen

(1) $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$

(2) $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4 \ldots..+\frac{1}{k}x^{k-1} \ldots$

für x die Zahl 2 substituirt, der Totalwerth von (1) $=129$, während derjenige von (2) gar nicht zu bestimmen ist, sofern nicht etwa für k ein bestimmter Werth angenommen und die unbegränzte Reihe dadurch zu einer begränzten gemacht wird. Dennoch ist man im Stande, auch für eine solche unbegränzte Reihe dann einen Totalwerth anzugeben, wenn dieselbe als Entwickelung einer bekannten, geschlossenen Zahlenform zu betrachten ist, aus welcher jener Werth unmittelbar durch Substitution sich ergiebt. So findet man z. B. als

Entwickelung der Quotientenform $\frac{a}{1-x}$ und $\frac{a}{1+x}$ durch wirklich vollzogene Division:

$$(1)\quad \frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 \ldots\ldots + ax^k \ldots$$

$$(2)\quad \frac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 \ldots\ldots (-1)^k ax^k \ldots$$

also für den besonderen Werth $x = \frac{2}{3}$, den Totalwerth der Reihe (1) $= 3a$, der Reihe (2) $= \frac{3a}{5}$.

Sollte der Werth von $x > 1$ sein, so würden die Glieder der Reihe (2) unaufhörlich zunehmen. In diesem Falle gebe man dem Ausdrucke folgende Entwickelungsform:

$$(3)\quad \frac{a}{x+1} = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} - \frac{a}{x^n} \ldots\ldots (-1)^{k+1} \cdot \frac{a}{x^k} \ldots$$

Eben so findet man für $x > 1$ die Reihe:

$$(4)\quad \frac{a}{x-1} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} + \frac{a}{x^4} \ldots\ldots + \frac{a}{x^k} \ldots$$

Betrachtet man die Grundzahl x einer Reihe als veränderlich, so muß der Totalwerth X derselben sich zugleich mit dem Werthe von x ändern. Angenommen, die Reihe sei begränzt und $= A$, wenn $x = a$ gesetzt wird, so geht ihr Totalwerth in andere (positive oder auch negative) Zahlen über, wenn man x vermehrt oder vermindert, also $x = a \pm z$ setzt. So werden z. B. die Totalwerthe der Reihe $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 8$ für $x = 3$ und $x = 4$ zu $X_3 = -13$ und $X_4 = +24$; für $x = 1$ und $x = 2$ zu $X_1 = +3$ und $X_2 = -8$. (S. Aufg. 5—7, §. 184).

§. 168. Convergenz und Divergenz der Reihen. Wenn eine unbegränzt fortschreitende Reihe mit irgend einem (kten) Gliede abgebrochen wird und der Rest (R) derselben dem Werthe 0, folglich die Summe ihrer k ersten Glieder (S_k) einem bestimmten Gränzwerthe sich um so mehr nähert, je größer man die Anzahl k der Glieder annimmt, so wird die Reihe eine convergirende oder convergent genannt. Divergent heißt im Gegensatze eine solche, deren Rest, sofern sie mit beliebigen k Gliedern abgebrochen wird, sich nicht der Gränze 0 nähert. So ist z. B. die aus den positiven ganzen Potenzen einer unbestimmten Grundzahl x gebildete Reihe $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 +$ 2c. convergent, wenn man einen ächten, hingegen divergent, wenn man einen unächten Bruch für x substituirt. Denn da man durch wirklich vollzogene Division:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots\ldots + x^k + \left(\frac{x^{k+1}}{1-x}\right)$$

findet, wo der Rest R in geschlossener Form erscheint, so läßt sich der Werth desselben für besondere Voraussetzungen leicht beurtheilen.

Die $(k+1)$te Potenz von x nähert sich aber augenscheinlich dem Werthe 0, wenn $x<1$, entfernt sich hingegen immer mehr von demselben, wenn $x>1$ und k in's Unbegränzte wachsend angenommen wird, da jeder ächt-gebrochene Factor verkleinert, jeder unächt gebrochene dagegen vergrößert. Diese Eigenschaft der einfachen obigen Reihe, worin man die abnehmende geometrische Progression (§. 137.) erkennt, convergent oder divergent zu werden, je nachdem man einen ächt- oder unächt-gebrochenen Werth für x setzt, begründet folgende allgemeine Lehrsätze:

1) Sei $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots + a_k + a_{k+1} \ldots\ldots$ die abkürzende Andeutung einer nach den ganzen, positiven Potenzen von x gesetzmäßig fortschreitenden Reihe $A + Bx + Cx^2 \ldots\ldots + Lx_k + Mx_{k+1} \ldots\ldots$ so ist diese Reihe convergent, wenn der Quotient *) $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ für stets zunehmende Werthe von k sich einem ächten Bruche β, als Gränze nähert. *) d. h. das Verhältniß aufeinander folgender Glieder

Da nämlich der Voraussetzung zufolge:

$$(A)\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} < \beta;\quad \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} < \beta;\ \ldots\ldots \frac{a_{k+n}}{a_{k+n-1}} < \beta;$$

so findet man durch fortgesetzte Multiplication

$$(B)\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} < \beta;\quad \frac{a_{k+2}}{a_k} < \beta^2;\ \frac{a_{k+3}}{a_k} < \beta^3;\ \ldots\ldots \frac{a_{k+n}}{a_k} < \beta^n;$$

also $a_{k+n} < a_k \cdot \beta^n$. Da nun $\beta < 1$, also β^n und somit auch a_{k+n} dem Werthe 0 bei wachsenden n immer näher kommen müssen, so folgt, daß der Werth des Gliedes a_k der obigen allgemeinen Reihe sich der Gränze 0 um so mehr nähert, je größer k ist. Nun findet man aber aus (B):

$$(C)\quad a_{k+1} < a_k \cdot \beta;\ a_{k+2} < a_k \cdot \beta^2;\ \ldots\ a_{k+n} < \alpha_k \cdot \beta^n \ldots$$

also $(a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \ldots\ldots a_{k+n}) < a_k\,(1 + \beta + \beta^2 \ldots + \beta^n \ldots)$

d. i. I. $R < \frac{a_k}{1-\beta}$.

Demnach ist, da der Werth a_k bei zunehmendem k der Gränze 0 sich unaufhörlich nähert, dies ebenfalls mit dem Reste R der Reihe der Fall und dieselbe daher convergent. Sollte die Reihe überhaupt oder von dem nten Gliede an mit abwechselnden Zeichen ihrer Glieder fortschreiten, so ist in den vorstehenden Ausdrücken statt $+\beta$ überall $-\beta$ zu setzen;

also $(a_k - a_{k+1} + a_{k+2} \ldots\ldots) < a^k\,(1 - \beta + \beta^2 - \beta^3 \ldots)$

d. i. II. $R < \frac{a_k}{1+\beta}$;

woraus die Convergenz der Reihe auf gleiche Weise folgt.

Zusatz I. Ist eine Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots + a_k \ldots\ldots$ convergent, so sind es auch die beiden, aus ihren abwechselnden Gliedern gebildeten Reihen:

$a_0 + a_2 + a_4 + a_{2k} \ldots$ und $a_1 + a_3 + a_5 \ldots a_{2k+1} \ldots$ da der Voraussetzung gemäß der Rest der ganzen Reihe dem Werthe 0 sich bei wachsendem k unbegränzt nähert, welches unmöglich wäre, wenn nicht dasselbe von den Resten der partiellen Reihen gälte.

Zusatz II. Eine abnehmende und unendliche Reihe mit abwechselnden Zeichen ist jedesmal convergent, wenn die Glieder sich fortwährend der Gränze 0 nähern.

Denn daß der Totalwerth s der Reihe

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_n$$

zwischen $a_0 - a_1$ und a_0 enthalten sein müsse, folgt aus den beiden Formen

$$(1)\ S = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots$$

$$(2)\ S = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots$$

wonach $S < a_0$ und $> (a_0 - a_1)$ ist. Daher muß aber auch der auf S_k folgende Rest $R < a_k$ sein.

2) Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_k + a_{k+1} \ldots$ ist divergent, wenn der Quotient $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ für stets zunehmende Werthe von k sich einem unächten Bruche β nähert.

Denn indem man unter der Voraussetzung, daß $\beta > 1$ sei, wiederum die vorstehenden Ausdrücke (A) (B) (C) aufstellt, wird man zu der divergirenden Summenform

$$(1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 \ldots + \beta^n \ldots)$$

geleitet, wonach der Rest R sich nicht der Gränze 0 nähert.

Anmerkung. Nähert sich der Werth des obigen Quotienten für ein unbegränztes k der Einheit als Gränze, so bleibt es im Allgemeinen unentschieden, ob die Reihe convergirt oder divigirt.

(S. Aufg. 8—10, §. 184.)

II. Binomialreihe.

§. 169. Binomial-Product. Die wichtigste aller Reihen-Entwickelungen ist die der Potenz eines Binoms $(a+x)$ nach den steigenden Potenzen eines der beiden Theile a, x angeordnet. Da aber die Zahlform $(a+x)^n$ als specieller Fall des allgemeinen Ausdrucks der Multiplication von Binomialfactoren:

$$(a+x)\ (b+x)\ (c+x)\ (d+x) \ldots (m+x)$$

zu betrachten ist, so beruhet jene Reihen-Entwickelung auf der Bildung des hier allgemein angedeuteten Products. Nun läßt sich die vorgeschriebene Multiplication entweder allmählig nach den allgemeinen Regeln (§. 46. und 47.) ausführen, oder das Product mit Hülfe combinatorischer Lehren unmittelbar aus den gegebenen Factoren bestimmen. Da nämlich jedes Glied des allmählig entwickelten

Products auf keine andere Weise gebildet sein kann, als durch eine solche Zusammenstellung der einzelnen Glieder aus den gegebenen Binomialfactoren, wobei aus *jedem* derselben *ein Glied* genommen ist, so läßt sich die Bildungsweise eines solchen Products auch ohne dessen allmählige Entwickelung unmittelbar übersehen. Zunächst erkennt man sogleich das Product aller ersten Glieder $a.b.c.d...m$ als Anfangsglied, die Potenz x^n aber als Schlußglied, zwischen denen sämmtliche Glieder mit den geringeren Potenzen von x enthalten sein müssen. Sei nun $k < n$, so ist allgemein das $k$te Glied nach dem anfänglichen dadurch gebildet, daß der Factor x aus k verschiedenen Binomen mit den $(n-k)$ Anfangsgliedern aus den übrigen *auf jede mögliche Weise* zusammengestellt worden. Eine derartige Zusammenstellung ist aber (nach §. 151.) nichts Anderes, als eine Combination zu $(n-k)$ aus n gegebenen Elementen $a.b.c...m$, wobei diese Elemente als *Factoren* zu betrachten sind. Man darf mithin das $k$te Glied nach dem anfänglichen im Producte der gegebenen Binomialfactoren allgemein durch $\overset{n-k}{C}.x^k$ bezeichnen, indem man $\overset{n-k}{C}$ auf deren Anfangsglieder bezieht. Demnach erhält man: $(a+x)(b+x)(c+x)(d+x).....(m+x) =$

$$\overset{n}{C} + \overset{n-1}{C}x + \overset{n-2}{C}x^2 + \overset{n-3}{C}x^3 .... \overset{1}{C}x^{n-1} + x^n$$

oder in fallender Anordnung der Potenzen von x:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d).....(x+m) =$$

$$x^n + \overset{1}{C}x^{n-1} + \overset{2}{C}x^{n-2} + \overset{3}{C}x^{n-3} .... \overset{n-1}{C}x + \overset{n}{C}.$$

So ist z. B. das Product der vier Binomialfactoren $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$ $(x+d)$:

$$\begin{array}{rl|rl|rl|l} x^4 + & a & x^3 + & ab & x^2 + & abc & x + abcd. \\ & b & & ac & & abd & \\ & c & & ad & & acd & \\ & d & & bc & & bcd & \\ & & & bd & & & \\ & & & cd & & & \end{array}$$

Würde der Coefficient von x in der Reihe des Products von $(x+4)$ $(x+3)$ $(x+6)$ $(x+2)$ $(x+7)$ verlangt, so findet man

$$\overset{4}{C}(4, 3, 6, 2, 7) = 4.3.6.2 + 4.3.6.7 + 4.3.2.7 + 4.6.2.7 + 3.6.2.7 = 1404.$$

(S. Aufg. 11 u. 12, §. 184.)

§. 170. **Binomialreihe für ganze, positive Exponenten.** Unter der Voraussetzung, daß aus n *gleichen* Binomialfactoren der Form $(a+x)$ ein Product gebildet, oder mit anderen Worten, daß das Binom $(a+x)$ zur $n$ten *Potenz* erhoben werden solle, wird man nur in der vorhergehenden Betrachtung die Glieder b, c,

d . . . m sämmtlich $=$ a zu setzen und folglich die combinatorischen Andeutungen auf das nmal wiederholbare Element a zu beziehen haben. Demnach werden hier alle Combinationsformen Potenzen von a, die mit den zu n ergänzenden Potenzen von x zusammentreten, und es braucht jedem einzelnen der Glieder $a^n . x^0$, $a^{n-1} . x^1$, $a^{n-2} . x^2$ u. s. w. nur noch der Zahlencoefficient hinzugefügt zu werden, welcher angiebt, wie vielmal es sich aus den n zweitheiligen Factoren hervorheben läßt. Dies ist aber allgemein für das kte Glied $a^{n-k} . x^k$ (nach §. 158.) auf

$\frac{n(n-1) \ldots . (n-k+1)}{1 . 2 . 3 \ldots . k}$ verschiedene Arten möglich, so daß die Reihe:

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 . 2} a^{n-2}x^2 + \ldots .$$
$$+ \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{1 . 2 \ldots\ldots k} a^{n-k}x^k \ldots . + x^n$$

als Entwickelung der Potenz eines Binoms oder Binomialreihe hervorgeht, sofern n eine beliebige ganze und positive Zahl ist. Das unter dem Namen des binomischen oder Newton'schen Lehrsatzes bekannte Gesetz dieser Entwickelung liegt in der gleichmäßigen Abnahme der Potenzen von a und Zunahme derjenigen von x, so daß ihre Exponentensumme in jedem Gliede $=$ n bleibt, und in der allmähligen Bildung der Coefficienten ihrer Producte durch Erweiterung des Zählers und Nenners um einen Factor, der um 1 abnimmt oder steigt, so daß es leicht ist, jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden vollständig zu bilden.

Eine noch einfachere Gestalt erhält der binomische Lehrsatz, wenn man $(a+x)^n = a^n \left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ oder $a^n (1+z)^n$ setzt, so daß der erste Theil des Binoms $=1$ wird; denn in diesem Falle wird seine Entwickelung:

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1 . 2} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} z^3 \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{1 . 2 \ldots . . k} z^k \ldots + z^n .$$

Die Coefficienten dieser Reihe pflegt man ihres häufigen Vorkommens wegen durch die Bezeichnung n_1, n_2, $n_3 \ldots n_k$ anzudeuten, worin n sich auf die Potenz, k auf die Stelle bezieht, so daß kürzer

$$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)}{1 . 2 . 3 \ldots . k} = {}^nB^k \text{ oder } = n_k$$

gesetzt wird. (S. Aufg 13, 14, 17—25, §. 184.)

Zusatz. Wäre ein Polynom $(1+ax+bx^2+cx^3+ \text{ꝛc.})$ zur Potenz des ganzen und positiven Exponenten n zu erheben, so dürfte

man, um den obigen Ausdruck für $(1+z)^n$ darauf anzuwenden, nur z als Andeutung der Reihe $ax+bx^2+cx^3 \ldots$ betrachten und die Entwickelung höherer Potenzen von z dadurch vornehmen, daß man zunächst das Binom $(ax+w)$ für z substituirte, wo w als abkürzende Andeutung von bx^2+cx^3+ &c. gilt. Auf diese Weise findet man, in

$$(1+z)^n = 1+n_1\, z+n_2\, z^2+n_3\, z_3+n_4\, z^4 \ldots\ldots$$

für z seinen obigen Werth setzend und auf der rechten Seite die ersten Glieder der höheren Potenzen entwickelnd:

$$(1+ax+bx^2+cx^3 \ldots)^n = 1+n_1\, ax+n_1\, bx^2+n_1\, cx^3+ \text{etc.}$$
$$+n_2 a^2x^2+2n_2 abx^3+ \text{etc.}$$
$$+n_3\, a^3x^3+ \text{etc.}$$

§. 171. Binomialcoefficienten. In Absicht der oben als Coefficienten der binomischen Entwickelung gefundenen Zahlen hat man sich folgende Eigenschaften derselben zu merken:

1. Diejenigen Glieder der Binomialreihe, welche gleichweit vom Anfang und Ende derselben abstehen, haben gleiche Binomial-Coefficienten.

Denn vergleicht man in den Entwickelungen

$$(a+x)^n = a^n+n_1\, a^{n-1}x+n_2\, a^{n-2}x^2 \ldots +n_{n-1}\, ax^{n-1}+x^n$$
$$(x+a)^n = x^n+n_1\, x^{n-1}a+n_2\, x^{n-2}a^2 \ldots +n_{n-1}\, xa^{n-1}+a^n$$

die identischen Glieder, so ergiebt sich

$$n_1 = n_{n-1};\ n_2 = n_{n-2};\ \text{allgemein } n_k = n_{n-k}.$$

Es reicht also hin, diese Zahlen bis zur Mitte der Reihe bestimmt zu haben, weil sie von da in umgekehrter Ordnung wiederkehren.

2. Man kann von den Binomialcoefficienten einer Potenz n zu denen der nächst höheren $n+1$ übergehen, indem man je zwei benachbarte addirt. Denn es ist mit Hinzufügung des Factors $\left(\frac{k+1}{k+1}\right)=1$:

$$n^k = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,..\,(n-k+1)}{1.2.3\,..\,k} \cdot \frac{k+1}{k+1},$$

$$n_{k+1} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2\,...\,(n-k+1)\,(n-k)}{1.2.3\,...\,k.k+1},$$

$$\text{folglich } n_k + n_{k+1} = \left(\frac{n\,(n-1)\,...\,(n-k+1)}{1.2\,....\,k}\right)\left(\frac{n+1}{k+1}\right)$$

oder nach der vereinfachenden Bezeichnung $= (n+1)_{k+1}$, wonach jeder Binomialcoefficient, eben so wie (nach §. 140.) jede figurirte Zahl durch Addition zweier anderer entsteht. Man kann demnach leicht eine Tafel dieser Zahlenwerthe entwerfen, die so anfangen wird:

Potenz n	Binomialcoefficienten.								
	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

3) Die Summe jeder geschlossenen Reihe von Binomialcoefficienten irgend einer nten Potenz ist stets eine Potenz von $2 = 2^n$.

Denn substituirt man 1 für a und x, so wird die obige Entwickelung von $(a+x)^n$:

$$(1+1)^n = 1 + n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_k \ldots + n_{n-1} + 1.$$

4) Die Summe der abwechselnden Glieder in der Reihe der Binomialcoefficienten irgend einer nten Potenz ist immer eine Potenz von 2 und zwar $= 2^{n-1}$.

Ist n eine ungerade Zahl, so erhält man zwei identische Reihen, jede $= 2^{n-1}$, da sie zusammen 2^n ausmachen. Summirt man aber paarweise die Glieder in der Entwickelung von $(1+1)^n$, so erhält man solche der nächsthöheren, $(n+1)$ten Potenz, welche durch die übrigen, als Zwischenglieder geschieden sind. Diese zusammengenommen müssen also ebensowohl 2^n betragen, als jene, da die ganze Reihe hier $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ beträgt.

§. 172. **Binomialreihe für gebrochene positive Exponenten.** Ein Beispiel, daß das oben für ganze positive Exponenten gefundene Gesetz der Entwickelung ebenfalls für gebrochene Exponenten eines Binoms hervortritt, giebt der Ausdruck $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1+x)}$, für welchen man durch Ausziehung der Quadratwurzel findet:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \text{2c.}$$

$$\text{d. i.} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{2c.}$$

Um nun zu prüfen, ob jenes Gesetz in der That für gebrochene Exponenten unbedingt gültig bleibe, hat man die muthmaßliche Gleichung

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \left(\frac{m}{n}\right)_1 x + \left(\frac{m}{n}\right)_2 x + \left(\frac{m}{n}\right)_3 x^3 + \text{rc.}$$

nur auf beiden Seiten zur nten Potenz zu erheben und zu untersuchen, ob sie zu einer identischen werde. Nun erhält man aber, wenn man

$$\left[(1+x)^{\frac{m}{n}}\right]^n = \left[1 + \left(\frac{m}{n}\right)_1 x + \left(\frac{m}{n}\right)_2 x^2 + \left(\frac{m}{n}\right)_3 x^3 + \text{rc.}\right]^n$$

oder kürzer: $(1+x)^m = (1+z)^n$ nach §. 170. Zus. entwickelt

$$(1)\quad (1+x)^m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_2 x^3 + m_3 x^4 \ldots\ldots$$

$$(2)\quad (1+z)^n = 1 + n_1 \left(\frac{m}{n}\right)_1 x + n_1 \left(\frac{m}{n}\right)_2 x^2 + n_1 \left(\frac{m}{n}\right)_3 x^2 \ldots\ldots$$

$$+ n_2 \left(\frac{m}{n}\right)_1^2 x^2 + 2n_2 \left(\frac{m}{n}\right)_1 \left(\frac{m}{n}\right)_2 x^3 \ldots\ldots$$

$$+ n_3 \left(\frac{m}{n}\right)_1^3 x^3 \ldots\ldots$$

und wenn beide Entwickelungen identisch sein sollen:

$$m_1 = n_1 \left(\frac{m}{n}\right)_1 ; \quad m_2 = n_1 \left(\frac{m}{n}\right)_2 + n_2 \left(\frac{m}{n}\right)_1^2 ;$$

$$m_3 = n_1 \left(\frac{m}{n}\right)_3 + 2n_2 \left(\frac{m}{n}\right)_1 \left(\frac{m}{n}\right)_2 + n_3 \left(\frac{m}{n}\right)_1^3 ;$$

die Identität dieser Ausdrücke ergiebt sich aber sofort, wenn man für die abkürzenden Andeutungen ihre Werthe substituirt.

§. 173. **Binomialreihe für negative Exponenten.** Da man als Entwickelung der Potenzen

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}, \text{ und } (1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+2x+x_2}$$

nach den Regeln der Division die Reihen

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^5 + \text{rc.}$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \text{rc.}$$

erhält, deren Coefficienten durchaus dem oben (§. 170.) gefundenen Bildungsgesetze entsprechen, so scheint dasselbe sich ebenfalls auf negative Exponenten zu erstrecken. Hiervon sich näher zu überzeugen, multiplicire man die muthmaßliche Gleichung

$$(1)\quad (1+x)^{-n} = 1 + (-n)_1 x + (-n)_2 x_2 + (-n)_3 x^3 + \text{rc.}$$

mit der nach dem Vorhergehenden unzweifelhaften

$$(2)\quad (1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x_3 + \text{rc.}$$

so wird man mit leichter Mühe in dem Resultat;

$$(1+x)^0 = 1 + (-n)_1 x + (-n)_2 x^2 + (-n)_3 x^3 + \text{rc.}$$

$$+ n_1 x + n_1 (-n)_1 x^2 + n_1 (-n)_2 x_3 + \text{rc.}$$

$$+ n_2 x^2 + n_2 (-n)_1 x_3 + \text{rc.}$$

$$+ n_3 x^3 + \text{rc.}$$

eine identische Gleichung erkennen, indem sämmtliche Coefficienten gleich hoher Potenzen von x zusammengenommen zu Null werden; wie man bei Substitution ihrer Werthe findet.

Anmerkung. Die hier gegebenen Beweise für die Ausdehnung der binomischen Entwickelung auf gebrochene und negative Exponenten sind allerdings unvollständig, indem sie die unbedingte Gültigkeit derselben nur für die ersten Glieder nachweisen. Ein vollständiger Beweis würde sich aber seiner Weitläufigkeit wegen nicht für diese Anfangsgründe eignen.

§. 174. Unbegränzte Binomialreihen. Obgleich nach dem Vorstehenden das Gesetz für die Bildung der Binomialcoefficienten das Nämliche bleibt, wenn statt ganzer und positiver negative oder auch gebrochene Werthe des Exponenten angenommen werden, so unterscheidet sich doch die Entwickelung von $(1+x)^n$ in beiden letzten Fällen wesentlich dadurch, daß sie nicht in geschlossener, sondern nur in unendlicher oder unbegränzter Reihenform erscheinen kann. Denn sei 1) der Exponent $n = -m$, so wird seine fortgesetzte Abnahme (nach §. 170.) zu einer fortgesetzten Zunahme der negativen Zahl m, also das Verschwinden irgend eines späteren Binomialcoefficienten unmöglich. Sei ferner 2) der Exponent $= \frac{n}{m}$, so wird jene fortgesetzte Verminderung um ganze Einheiten diesen gebrochenen Zahlenwerth eben so wenig jemals erschöpfen, mithin keiner der Coefficienten $= 0$ werden können. Durch wirkliche Entwickelung beider Potenzformen des Binoms erhält man nach einigen Umformungen die Reihen:

$$\text{I. } (1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

$$\text{II. } (1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + \frac{n}{m}x + \frac{n(n-m)}{m.2m}x^2 + \frac{n(n-m)(n-2m)}{m.2m.3m}x^3 \ldots$$

welche nach dem, aus ihren ersten Gliedern leicht erkennbaren, Bildungsgesetze bis zu jedem beliebigen kten Gliede unbegränzt erweitert werden können.

Die unbegränzte Form beider hier betrachteten Binomialreihen folgt übrigens schon aus der Bedeutung einer Potenz mit negativem oder gebrochenem Exponenten (nach §. 114.) indem für die Ausdrücke

$$\text{I. } (1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m}$$

$$\text{II. } (1+x)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(1+x)^n}$$

nach den Vorschriften der Division und Wurzelausziehung keine geschlossene Resultate hervorgehen können. Aufg. 15, 16. §. 184.

§. 175. Convergenz der Binomialreihe. Soll eine der beiden obigen Formen einer unbegränzten Binomialreihe zu an-

nähernder Berechnung irgend eines bestimmten Zahlenwerthes gebraucht werden, so darf dieses nur dann geschehen, wenn man sich von ihrer Convergenz überzeugt hat. Nun ist aber der Bestimmungsquotient Q (nach §. 168):

für die Reihe I. $Q = -x\left(\frac{n+k-1}{k}\right) = -x\left(1+\frac{n-1}{k}\right)$

für die Reihe II. $Q = x\left(\frac{n-(k-1)\,m}{k\,.\,m}\right) = -x\left(1-\frac{n+m}{km}\right)$,

wonach im Allgemeinen nur ächt-gebrochene Werthe β für x zulässig sind, da für solche Q bei zunehmendem k der Gränze β sich nähert.

Es darf demnach die Entwickelung von $(1+x)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(1+x)^n}$ zu wirklicher Berechnung der mten Wurzel einer Zahl $(1+x)^n$ angewendet werden, sofern $x<1$ ist, welches sich jeder Zeit ohne Mühe bewirken läßt, indem man die allgemeine Binomialform $(a+z)^n$, worin $a>z$ und z entweder positiv oder negativ sein möge, in die gleichbedeutende $a^n\left(1+\frac{z}{a}\right)^n$ umgestaltet. Dadurch wird nämlich (nach §. 174. II.):

$$\sqrt[m]{(a+z)^n} = \sqrt[m]{a^n\left(1+\frac{z}{a}\right)^n} = a^{\frac{n}{m}}\left(1+\frac{z}{a}\right)^{\frac{n}{m}} =$$

$$a^{\frac{n}{m}}\left\{1+\frac{n}{m}\left(\frac{z}{a}\right)+\frac{n.n-m}{m.2m}\left(\frac{z}{a}\right)^2+\frac{n.n-m.n-2m}{m.2m.3m}\left(\frac{z}{a}\right)+\text{ꝛc.}\right\}$$

also z. B. $\sqrt[5]{(a+z)} = \sqrt[5]{a\left(1+\frac{z}{a}\right)} = a^{\frac{1}{5}}\left(1+\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{5}} =$

$$a^{\frac{1}{5}}\left\{1+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{a}\right)-\frac{1.4}{2.5^2}\left(\frac{z}{a}\right)^2+\frac{1.4.9}{2.3.5^3}\left(\frac{z}{a}\right)^3+\text{ꝛc.}\right\}$$

Dieser Ausdruck kann zur Ausziehung der fünften Wurzel einer dekadischen Zahl benutzt werden, indem man die nächst niedrige oder nächsthöhere reine fünfte Potenz = a und den Rest z setzt. Sei z. B. die gegebene Zahl 260, so ist $a = 243$, und $z = 17$,

$$\text{also } a^{\frac{1}{5}} \text{ oder } \sqrt[5]{a} = 3;\ \frac{z}{a} = \frac{17}{243},$$

$$260^{\frac{1}{5}} = 3\,(1+0{,}0139918-0{,}0003915+0{,}0000164+\text{ꝛc.})$$

oder zusammengezogen = 3,04084 . . . (Aufg. 26, 27, §. 184.

Anhang.

Summation gleich hoher Potenzen der natürlichen Zahlen.

Nach der Binomial-Entwickelung hat man für beliebige Werthe des Exponenten k die im Allgemeinen unendlich fortschreitenden Reihen:

$$(1+1)^k = 1^k + k_1\ 1^{k-1} + k_2\ 1^{k-2} + k_3\ 1^{k-3} + \text{ꝛc.}$$
$$(2+1)^k = 2^k + k_1\ 2^{k-1} + k_2\ 2^{k-2} + k_3\ 2^{k-3} + \text{ꝛc.}$$
$$(3+1)^k = 3^k + k_1\ 3^{k-1} + k_2\ 3^{k-2} + k_3\ 3^{k-3} + \text{ꝛc.}$$

. .

. .

. .

$$(n+1)^k = n^k + k_1\ n^{k-1} + k_2\ n^{k-2} + k_3\ n^{k-3} + \text{ꝛc.}$$

also durch Summirung und nach Aufhebung der gleichen Glieder auf beiden Seiten:

(A) $(n+1)^k = 1 + k_1\ \Sigma(n^{k-1}) + k_2\ \Sigma(n^{k-2}) + k_3\ \Sigma(n^{k-3}) + \text{ꝛc.}$

indem man nämlich durch $\Sigma(n^k)$ die Summe aller kten Potenzen der Zahlen 1, 2 . . . n andeutet. Unter der Annahme nun, daß k eine beliebige (ganze oder gebrochene) positive Zahl sei, ist $1^k < 2^k < 3^k \ldots < n^k$, also $(1^k + 2^k + 3^k \ldots + n^k) < n.n^k$

d. h. $\Sigma(n^k) < n^{k+1}$, folglich $\Sigma(n^{k-2}) < n^{k-1}$ oder $= \beta . n^{k-1}$, wenn man durch β einen ächten Bruch bezeichnet. Eben so lassen sich $\Sigma(n^{k-3})$, $\Sigma(n^{k-4})$ . . . durch $\beta' . n^{k-2}$, $\beta'' . n^{k-3}$ ausdrücken, wodurch die Gleichung (A) folgende Gestalt erhält:

(B) $(n+1)^k = 1 + k_1\ \Sigma(n^{k-1}) + k_2\ \beta . n^{k-1} + k_3\ \beta' . n^{k-2} + \text{ꝛc.}$

Wird diese Gleichung nun in ihren sämmtlichen Gliedern durch $k . n^k$ dividirt, und dann n unendlich groß angenommen, so reducirt sie sich auf

$$\text{(C)}\quad \frac{1}{k} = \frac{\Sigma(n^{k-1})}{n^k} \text{ oder } \Sigma(n^{k-1}) = \frac{n^k}{k},$$

ein Ausdruck für die Summirung gleich hoher Potenzen der natürlichen Zahlen, sofern die Reihe derselben unendlich groß angenommen wird, von welchen man in Fällen, wo Größen in eine unendliche Menge kleiner Theile zerlegt gedacht werden, vielfache Anwendung macht. (Vergl. die Anmerkung zu §. 143.)

III. Exponentialreihe.

§. 176. Exponentialreihe. Wenn im Vorhergehenden für die Reihe des entwickelten Binoms $(1+x)^n$ dessen zweiter Theil

die Grundzahl, der Exponent hingegen deren Coefficienten lieferte, so läßt sich umgekehrt eben sowohl eine Entwickelung der Form $(1+z)^n$ denken, deren Glieder nach den Potenzen des Exponenten fortschreiten und ihre Coefficienten, aus dem zweiten Theil des Binoms gebildet, erhalten. Man kann eine solche Entwickelung eine Exponentialreihe nennen, insofern der Exponent die Grundzahl bildet, nach deren Potenzen sie fortschreitet. Die Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf die Potenzform $(1+z)^x$ liefert die Reihe:

$$1+x_1\, z+x_2\, z^2+x_3\, z^3+x_4\, z^4+\ldots+x_k\, z^k\ldots$$

welche bei der völligen Unbestimmtheit des Exponenten als unbegränzt angesehen werden muß. Um ihr die Gestalt einer Anordnung nach den Potenzen der Grundzahl x zu ertheilen, so daß

$$(1+z)^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots+Mx^k\ldots$$

entwickelt erscheine, suche man vor Allem den Coefficienten **A** zu bestimmen. Offenbar wird dieser Coefficient selbst eine unendliche Reihe, da er aus allen Gliedern der obigen Binomial-Entwickelung einen Beitrag erhält, nämlich aus:

$x_1\, z = x\,.\,z$ .... den Beitrag z.

$$x_2\, z^2=\frac{x\,(x-1)}{1\,.\,2}z^2=\frac{z^2}{2}x^2-\frac{z^2}{2}x \ldots\ldots\ldots -\frac{z^2}{2}.$$

$$x_3\, z^3=\frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3=\frac{z^3}{6}x^3-\frac{z^3}{2}x^2+\frac{z^3}{3}x\ldots+\frac{z^3}{3}.$$

Allgemein liefert das kte Glied nach dem anfänglichen:

$$x_k\, z^k=\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}z^k,$$

dessen entwickeltes Product mit $x\,(-1)\,(-2)\ldots(-k+1)\dfrac{z^k}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}$ schließen muß, indem man

$$(-1)\,.\,(-2)\ldots(-k+1)=(1\,.\,2\,.\,3\ldots k-1)\,(-1)^{k-1}$$

setzt, als Beitrag zu dem Coefficienten **A**:

$$\frac{(1\,.\,2\,.\,3\ldots k-1)\,(-1)^{k-1}\,.\,z^k}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}=(-1)^{k-1}\,.\,\frac{z^k}{k},$$

so daß die Reihe, wodurch der Coefficient von x in der Entwickelung von $(1+z)^x$ ausgedrückt wird, folgende ist:

$$A=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\ldots(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k}\ldots$$

Dem Werthe der folgenden Coefficienten **B**, **C**, **D** rc. ließen sich allerdings auf demselben Wege finden; indessen wird ihre Bestimmung dann viel beschwerlicher sein, als wenn man sie auf folgende Art recurrirend aus einander abzuleiten sucht.

§. 177. Exponential-Coefficienten. Wird die Entwickelung von

$$(1+z)^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots\ldots + Lx^{k-1} + Mx^k \ldots$$

oder $(1+z)^y = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 \ldots\ldots + Ly^{k-1} + My^k \ldots$

gesetzt, so entstehen durch Einführung dieser hypothetischen Form der Exponentialreihe in die identische Gleichung

$$(1+z)^x \,.\, (1+z)^y = (1+z)^{x+y}$$

folgende gleichbedeutende Entwickelungen:

$$\text{I. } (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.})\,(1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \text{etc.})$$
$$= 1 + A(x+y) + B(x^2+y^2) + C(x^3+y^3) + D(x^4+y^4) + \ldots$$
$$+ A^2xy + AB(x^2y+xy^2) + AC(x^3y+xy^3) + \ldots$$
$$+ AL(x^{k-1}y + xy^{k-1}) + \text{etc.}$$

$$\text{II. } 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 \ldots\ldots + M(x+y)^k \ldots\ldots$$
$$= 1 + A(x+y) + B(x^2+y^2) + C(x^3+y^3) + D(x^4+y^4) + \ldots$$
$$+ 2Bxy + 3C(x^2y+xy^2) + 4D(x^3y+xy^3) + \ldots$$
$$+ kM(x^{k-1}y + xy^{k-1}) + \text{etc.}$$

Durch Gleichsetzung der entsprechenden Coefficienten beider identischen Reihen erhält man (nach §. 166.) die Bestimmungsgleichungen:

$$2B = A^2, \text{ also } B = \frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{1.2}$$

$$3C = AB, \text{ also } C = \frac{AB}{3} = \frac{A^3}{1.2.3}$$

$$4D = AC, \text{ also } D = \frac{AC}{4} = \frac{A^4}{1.2.3.4}.$$

Die Allgemeinheit dieses einfachen Gesetzes für die Bildung der Exponential-Coefficienten bestätigt sich dadurch, daß, wenn man denjenigen des $(k-1)$ten Gliedes, $L = \frac{A^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)}$ annimmt, nach der der Gleichung $kM = AL$ in der That

$$M = \frac{AL}{k} = \frac{A^k}{1.2.3\ldots k}$$

sich ergiebt. Demnach ist die gesuchte Entwickelung:

$$\text{I. } (1+z)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{1.2}x^2 + \frac{A^3}{1.2.3}x^3 + \frac{A^4}{1.2.3.4}x^4 \ldots\ldots$$
$$+ \frac{A^k}{1.2\ldots k}x^k \ldots\ldots$$

der in Function von z bestimmte Werth des ersten Coefficienten aber nach dem Vorhergehenden:

$$\text{II. } A = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots (-1)^{k-1} \,.\, \frac{z^k}{k} \ldots$$

Dieser erste Coefficient in der Exponentialreihe, der sich nicht ändert, so lange in der Potenz $(1+z)^x$ die Basis $(1+z)$ die nämliche bleibt, welche Werthe man auch dem Exponenten ertheilen möge, und von dem alle folgenden Coefficienten nach einem sehr einfachen Gesetze bestimmt werden, heißt der Modulus der Reihe.

§. 178. Convergenz der Exponentialreihe. Durch die

Annahme regelmäßig zunehmender Werthe für den Exponenten x und eines beständigen Werthes für die Basis $(1+z)$ der Potenzform $(1+z)^x$ würde man bei wirklicher Berechnung ein Potenzsystem, d. h. eine geordnete Reihe zusammengehöriger Exponenten und Potenzen erhalten. Zu einer solchen Berechnung erscheint nun die Exponentialreihe für jeden beliebigen Werth des Modulus A, so wie des Exponenten x fähig, da der allgemeine Quotient zwei auf einander folgender Glieder:

$$\frac{A^{k+1}}{1.2.3\ldots k+1}x^{k+1} : \frac{A^k}{1.2\ldots k}x^k = \frac{A}{k+1}.x$$

für unbegränzt zunehmende Werthe von k der Gränze 0 sich unaufhörlich nähert, was für Werthe man auch für A und x annehmen möge. Da indessen die Reihe um so langsamer convergiren wird, je größer der Modulus A ist, so setze man, um die Exponentialreihe zu wirklicher Berechnung numerischer Werthe geeignet zu machen, $A=1$ und den davon abhängigen Werth der Basis $1+z=e$. Sie erhält dadurch die einfachere Form

$$\text{III.}\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}\ldots\ldots\frac{x^k}{1.2.3\ldots k}\ldots$$

und bildet die Grundlage des sogenannten natürlichen Potenzensystems, dessen Basis e aus ihr leicht gefunden wird, indem man $x=1$ setzt. Denn aus der sehr schnell convergirenden Reihe

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}\ldots\frac{1}{1.2.3\ldots k}\ldots$$

ergiebt sich als Näherungswerth bis auf 7 Decimalstellen für e die irrationale Zahl 2,7182818 . . . Allerdings könnte durch Substitution anderer Werthe für x die Reihe III. zur Berechnung beliebiger Potenzen von e benutzt werden; statt aber für regelmäßige fortschreitende Werthe des Exponenten x die zugehörigen Potenzen e^x in geordneter Folge zu berechnen, erscheint es zweckmäßiger, umgekehrt für die regelmäßige Reihe der ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . . n, als Potenzen betrachtet, die entsprechenden Exponenten aufzusuchen, wodurch man zu den Logarithmen des natürlichen Potenzensystems gelangt. Aufg. 28, §. 184.

IV. Logarithmische Reihe.

§. 179. Logarithmische Reihe. Denkt man sich die beliebige Zahl $(1+z)$ als mte Potenz der Basis e, also $(1+z)=e^m$, so erhält man in Folge der Exponentialreihe III.:

$$(1+z)^x = (e^m)^x = e^{mx} = 1 + mx + \frac{m^2x^2}{1.2} + \frac{m^3x^3}{1.2.3} + \text{2c.}$$

oder da nach der Voraussetzung $m = \log.(1+z)$ ist;

$$(1+z)^x = 1 + \log.(1+z).x + \frac{\log.(1+z)^2.x^2}{1.2} + \frac{\log.(1+z)^3.x^3}{1.2.3} + \text{2c.}$$

Vergleicht man nun diese Reihe mit der oben gefundenen Entwickelung I. der nämlichen Potenzform:

$$(1+z)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{1.2}x^2 + \frac{A^3}{1.2.3}x^3 + \frac{A^4}{1.2.3.4}x^4 \ldots.$$

so folgt aus der Identität ihrer gleichstelligen Coefficienten (nach §. 166.), daß log. $(1+z) = A$, d. h. nach II.

$$\text{V. } \log.(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \ldots (-1)^{k-1}.\frac{z^k}{k} \ldots.$$

wonach man in dem oben abgeleiteten Modulus der Exponentialreihe zugleich die logarithmische Reihe des natürlichen Potenzensystems gewonnen hat.

Die vermöge dieser Reihe zu bestimmenden und auf die Basis e sich beziehenden Logarithmen werden zur Unterscheidung von andern (z. B. den auf die Basis 10 bezogenen gemeinen oder briggischen) natürliche Logarithmen genannt und daher auch wohl ausdrücklich durch log. nat. angedeutet, obgleich man in der höheren Arithmetik unter der einfachern Bezeichnung log. nur natürliche Logarithmen zu verstehen hat.

§. 180. Logarithmenberechnung. Für die wirkliche Berechnung der natürlichen Logarithmen erhält man nach der obigen Reihe (V.):

$$\text{(A) } \log.(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \ldots.$$

$$\text{(B) } \log.(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} \ldots.$$

und durch Subtraction der zweiten von der ersten:

$$\text{(C) } \log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \text{ic.}\right).$$

oder wenn man $\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = y$, also $z = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)$ setzt:

$$\text{(D) } \log.\ y = 2\left\{\left(\frac{y-1}{y+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 \ldots\right\}$$

Hiernach wird z. B. der log. 2 des natürlichen Systems gefunden durch die Reihe:

$$\log.\ 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \text{ic.}\right)$$
$$= 0{,}6931472.$$

Eben so berechnet man log. $3 = 1{,}0986123$ und log. $5 = 1{,}6094379$, woraus nach der Formel log. $(a.b) =$ log. a + log. b sehr leicht die Logarithmen der Zahlen 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24 u. s. w. durch Addition gefunden werden.

Um aber aus dem berechneten Logarithmus einer Zahl denjenigen der nächst höheren ableiten zu können, setze man in (A)

$$z = \frac{1}{y}, \text{ also } \log.\left(\frac{y+1}{y}\right) \text{ oder } \log.(y+1) - \log. y$$

$$= \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{4y^4} + \text{ıc., folglich}$$

$$\text{(E)} \log.(y+1) = \log. y + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} \cdots\right)$$

Hiernach ist $\log. 11 = \log. 10 + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40000}\right.$

$$\left. = \text{ıc.}\right) = 2{,}3978953.$$

Auf gleiche Weise findet sich durch Substitution von $z = \frac{1}{y}$ in (B) die Formel:

$$\log.\left(\frac{y-1}{y}\right) \text{ oder } \log.(y-1) - \log y$$

$$= -\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{4y^4} - \frac{1}{5y^5} - \text{ıc.}$$

oder (F) $\log.(y-1) = \log. y - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} \cdots\right)$

Endlich ergiebt sich durch Verbindung der beiden Formeln (E) und (F) die neue:

$$\text{(G)} \log. y = \frac{1}{2}\log.(y+1) + \frac{1}{2}\log.(y-1)$$

$$+ \left(\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{4y^4} + \frac{1}{6y^6} + \text{ıc.}\right)$$

wonach die Berechnung der Logarithmen für Primzahlen aus denen der benachbarten Zahlen $(y+1)$ und $(y-1)$ vorgenommen werden kann. Aufg. 29, §. 184.

§. 181. **Künstliche Logarithmen.** Wird nicht die Zahl e, sondern irgend eine andere b zur Basis eines Potenzensystems gewählt, so nennt man die Logarithmen eines solchen zur Unterscheidung **künstliche** und deutet sie als solche am zweckmäßigsten durch Anhängung der Basis (also durch $\log. a_b$) an, wenn man sich nicht etwa durchaus auf ein einziges Potenzensystem bezieht und dadurch die Andeutung der Basis überflüssig macht, wie es beim Gebrauche der gemeinen Logarithmen der Fall ist. Die Berechnung künstlicher Logarithmen für irgend eine beliebige Basis b hat keine Schwierigkeiten, wenn eine Tafel der natürlichen Logarithmen als vollständig berechnet vorausgesetzt wird. Denn sei für irgend eine Zahl a nach dieser Tafel: $\log. a = \alpha$ und $\log. b = \beta$, also $a = e^\alpha$ und $b = e^\beta$, so ist, wenn man $a = b^x$ setzt:

$$\log. a = x. \log. b \text{ oder } \alpha = \beta . x,$$

$$\text{also } x = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ d. h. } \log. a_b = \frac{\log.\ \text{nat.}\ a}{\log.\ \text{nat.}\ b}.$$

Um also den **künstlichen** Log. der Zahl in Beziehung auf die Basis

b zu finden, darf man nur den **natürlichen** Log. von a durch den von b dividiren oder durch den Factor $\left(\frac{1}{\text{log. nat. b}}\right)$ multipliciren. Diesen Factor, der für das natürliche System zur Einheit wird, pflegt man den **logarithmischen Modulus** zu nennen. Wollte man nach dem Vorstehenden z. B. Logarithmen des **gemeinen** oder **briggischen** Potenzensystems, d. h. in Beziehung auf die Basis 10 berechnen, so ist z. B., weil $\frac{1}{\text{log. } 10} = 0{,}4342945$ gefunden wird:

$$\text{log. } 2_{10} = 0{,}4342945 \,.\, 0{,}6931471 = 0{,}3010300.$$
$$\text{log. } 5_{10} = 0{,}4342945 \,.\, 1{,}6094379 = 0{,}6989700.$$

und aus den, auf diese Weise mittelbar aus den **natürlichen** berechneten, **künstlichen** Logarithmen einzelner Primzahlen finden sich durch Addition diejenigen ihrer Zusammensetzungen sehr einfach. Aufg. 30, §. 184.

V. Potenzial-Functionen.

§. 182. **Cyklische Functionen.** Wird in der Exponentialreihe des natürlichen Potenzensystems

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{rc.}$$

dem Exponenten x der Factor $\sqrt{\alpha - 1}$ hinzugefügt und dann $\alpha = o$ gesetzt, so theilt die Entwickelung sich in die beiden Reihen

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \frac{x^8}{1\ldots8} - \text{rc.}$$

$$\text{und } \left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \frac{x^9}{1\ldots9} - \text{rc.}\right) i.$$

Bezeichnet man diese (nach §. 178. und §. 168. L. 1. Zusatz) stets convergirenden Reihen als eigenthümliche Functionen des Exponenten x durch die Benennungen: Cosinus x und Sinus x, so ist kürzer:

$$\text{I. } e^{xi} = \text{cos. } x + \text{sin. } x \,.\, i.$$

Setzt man ferner in der Exponentialreihe zu x den Factor $-\sqrt{\alpha - 1}$ und dann $\alpha = o$, so bleibt in der Entwickelung die Reihe des Cosinus unverändert, während diejenige des Sinus ihre Vorzeichen ändert; also erhält man:

$$\text{II. } e^{-xi} = \text{cos. } x - \text{sin. } x \,.\, i.$$

Wird $x = n \,.\, z$ gesetzt, so folgt aus

$$e^{(nz)i} = \text{cos. } (nz) + \text{sin. } (nz) \,.\, i$$

$$\text{und } e^{(zn)i} = (\text{cos. } z + \text{sin. } z \,.\, i)^n, \text{ daß}$$

$$\text{III. } (\text{cos. } z + \text{sin. } z \,.\, i)^n = \text{cos. } (nz) + \text{sin. } (nz) i.$$

Ferner findet man durch Addition und Subtraction von I. und II. für die, mit dem Namen Sinus und Cosinus bezeichneten Functionen die geschlossenen Ausdrücke

$$\text{IV.}\quad \cos.\, x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}.$$

$$\text{V.}\quad \sin.\, x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Werden hingegen die Formeln I. und II. multiplicirt, so ergiebt sich ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen Cosinus und Sinus in dem Ausdrucke

$$\text{VI.}\quad 1 = \cos.\, x^2 + \sin.\, x^2.$$

wonach $\sin.\, x = \sqrt{1 - \cos.\, x^2}$ und $\cos.\, x = \sqrt{1 - \sin.\, x^2}$, also $\sin.\, x = \pm 1$ für $\cos.\, x = 0$, und $\cos.\, x = \pm 1$ für $\sin.\, x = 0$ gefunden wird.

Der Umstand, daß man hier zwischen Sinus und Cosinus als aus der Exponentialreihe abgeleiteten Functionen die nämliche ergänzende Beziehung wieder erkennt, welche den gleichbenannten goniometrischen Functionen (oder den Coordinaten der Kreislinie) eigenthümlich ist, hat jene gleiche Benennung für Zahlen eines sehr verschiedenen Ursprunges und zugleich den Namen cyklische Functionen für die obigen Reihen veranlaßt. Man kann also die nach geometrischen Vorstellungen ursprünglich berechneten Tafeln der Sinus und Cosinus benutzen, um Werthe der Form e^{xi} darzustellen, indem man nur die Zahlen für den Ausdruck $e^{xi} = \cos.\, x + \sin.\, xi$ aus jenen Tafeln zu entnehmen braucht. Indessen muß man, da die Angaben der Tafeln sich auf die Winkeleintheilung des Kreises in 360° beziehen, bei dem Aufsuchen der Werthe für $\cos.\, x$ und $\sin.\, x$ hierauf Rücksicht nehmen und zuvor den, der Zahl x entsprechenden Winkel α berechnen, indem man $\alpha : 360° = x : 2\pi$ setzt, wo 2π den Umfang des mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises bezeichnet.

Um den Werth von x in Function seines Sinus oder Cosinus auszudrücken, ziehe man aus I. und II. die Gleichungen

$$xi \log.\, e = \log.\, (\cos.\, x + \sin.\, x \,.\, i)$$
$$-\, xi \log.\, e = \log.\, (\cos.\, x - \sin.\, x \,.\, i)$$

und aus diesen durch Subtraction, weil $\log.\, e = 1$:

$$\text{VII.}\quad x = \frac{1}{2i} \log. \left(\frac{\cos.\, x + \sin.\, x \,.\, i}{\cos.\, x - \sin.\, x \,.\, i}\right).$$

Will man diese Form im Zähler und Nenner mit $\cos.\, x$ dividiren und den Quotienten $\frac{\sin.\, x}{\cos.\, x}$ kürzer durch $\text{tangens}\, x$ bezeichnen, so wird sie:

$$\text{VIII.}\quad x = \frac{1}{2i} \log. \left(\frac{1 + \text{tang.}\, x \,.\, i}{1 - \text{tang.}\, x \,.\, i}\right).$$

Die Entwickelung dieses Ausdrucks ist aber (nach §. 180., C.)

$$x = \frac{1}{2i} \,.\, 2i \left(\text{tang.}\, x - \frac{\text{tang.}\, x^3}{3} + \frac{\text{tang.}\, x^5}{5} - \text{etc.}\right)$$

worin die entgegengesetzten imaginären Factoren einander aufheben.

Anmerkung. Wird in den letzten Ausdrücken von x der Werth von sin. x = cos. x, also tang. x = 1 angenommen, welches beim Kreise für $\frac{1}{4}\pi$ der Fall ist, so erhält man für x die Zahlenreihe $(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots .)$, durch deren Multiplication mit 4 man $\pi = 3{,}14159 \ldots$ findet.

§. 183. * Geometrische Ableitung der cyklischen Functionen. Wenn im Vorstehenden die Benennungen sin. x und cos. x auf die beiden aus der Exponentialreihe hergenommenen Reihen ungerader oder gerader Potenzen von x angewendet worden, so drängt sich die Frage auf, ob diese Ausdrücke den nämlichen Functionen im goniometrischen Sinne des Wortes (§. 268.) zukommen. Die Ueberzeugung hiervon gewinnt man nun, indem man einen beliebigen Kreisbogen **AB** (Fig. 96.) in n unendlich kleine, gleiche Theile getheilt und aus den Theilpunkten **F, H, L** .... Linien senkrecht gegen den Radius **AC** oder demselben parallel gezogen denkt, um folgende Betrachtung an diese Construction zu knüpfen.

Da es bei der vorausgesetzten Kleinheit der Bogenstücke **BF**, **FH, HL** ... gestattet sein wird, dieselben mit ihren Sehnen zu verwechseln und diese senkrecht gegen die Radien des Kreises anzunehmen, darf man

$$\mathbf{BG : BF = Cb : 1} \text{ oder } \mathbf{BG = BF . Cb},$$
$$\text{und folglich gleichfalls } \mathbf{GI = FH . Cf},$$
$$\mathbf{IN = HL . Cb},$$

u. s. w. setzen. Bezeichnet man nun die gleichen Bogen **BF, FH, HL** ... durch β, also Cb durch cos. $n\beta$, Cf durch cos. $(n-1)\beta$ u. s. f., so erhält man durch Summirung der vorstehenden Gleichungen:

$$(1)\ \sin. n\beta = \beta\,(\cos. n\beta + \cos. (n-1)\beta + \cos. (n-2)\beta \ldots + \cos. \beta).$$

Nehmen wir nun an, daß die Function des Cosinus eines Bogens β sich in einer nach Potenzen von β gesetzmäßig fortschreitenden Reihe entwickeln lasse, so ist leicht zu erkennen, daß die Form dieser Reihe nur gerade Exponenten von β gestattet, oder daß man

$$(2)\ \cos. \beta = 1 + p . \beta^2 + q . \beta^4 + r . \beta^6 + \text{etc.}$$

zu setzen hat, da bekanntlich cos. β für $\beta = 0$ sich in 1 verwandelt, übrigens aber für gleiche positive und negative Werthe von β stets denselben Werth annimmt. Demnach führt die in Gleichung (1) eingeklammerte Reihe zu folgenden Ausdrücken:

$$\cos. \beta = 1 + 1 . p\beta^2 + 1 . q\beta^4 + 1 . r\beta^6 + \text{etc.}$$
$$\cos. 2\beta = 1 + 2^2 . p\beta^2 + 2^4 . q\beta^4 + 2^6 . r\beta^6 + \text{etc.}$$
$$\cos. 3\beta = 1 + 3^2 . p\beta^2 + 3^4 . q\beta^4 + 3^6 . r\beta^6 + \text{etc.}$$

.

.

.

$$\cos. n\beta = 1 + n^2 . p\beta^2 + n^4 . q\beta^4 + n^6 . r\beta^6 + \text{etc.}$$

und durch Summirung auf beiden Seiten (mit Rücksicht auf den Anhang zu §. 175.) zu der summatorischen Reihe:

$$\Sigma(\cos. n\beta) = n + \Sigma(n^2) . p\beta^2 + \Sigma(n^4) . q\beta^4 + \text{etc.}$$

$$\text{d. i.} = n + \frac{n^3}{3} . p\beta^2 + \frac{n^5}{5} . q\beta^4 + \text{etc.}$$

Folglich erhält Gleichung (1) die Gestalt:

$$(3)\ \sin. n\beta = n\beta + \frac{p}{3}(n\beta)^3 + \frac{q}{5}(n\beta)^5 + \text{etc.}$$

und wenn man $n . \beta = x$ setzt:

$$(4)\ \sin. x = x + \frac{p}{3} . x^3 + \frac{q}{5} . x^5 + \text{etc.}$$

während (5) $\cos. x = 1 + p . x^2 + q . x^4 + \text{etc.}$ ist.

Werden diese Ausdrücke zum Quadrat erhoben, so erhält man:

$$(6)\ \sin. x^2 = x^2 + 2 . \frac{p}{3} . x^4 + \text{etc.}$$

$$(7)\ \cos. x^2 = 1 + 2p . x^2 + (p^2 + 2q)x^4 + \text{etc.}$$

und durch Addition:

$$(8)\ 1 = 1 + (1 + 2p)x^2 + \left(\frac{2}{3}p + p^2 + 2q\right)x^4 + \text{etc.}$$

Damit dieser Gleichung für jeden Werth von x Genüge geschehe, müssen sämmtliche Coefficienten der x enthaltenden Glieder $= 0$ werden; folglich ist

$$1 + 2p = 0, \text{ oder } p = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{2}{3}p + p^2 + 2q = 0, \text{ oder } q = +\frac{1}{24} = \frac{1}{1.2.3.4};$$

Durch Einführung dieser Werthe verwandeln sich die Gleichungen (4) und (5) in folgende:

$$(9)\ \sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$(10)\ \cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

und diese Werthe sind augenscheinlich die nämlichen, für welche im §. 182. die Benennungen von Sinus und Cosinus eingeführt wurden, so daß diese durch die vorstehende Ableitung auch im goniometrischen Sinne gerechtfertigt erscheinen.

Allerdings ist die vorstehende Ableitung insofern noch eine unvollständige, als sie sich auf die ersten Glieder der Reihen beschränkt, welche die Entwickelung der Functionen von Sinus und Cosinus darstellen. Um sich aber von der Allgemeingültigkeit des in beiden Reihen hervortretenden Gesetzes zu überzeugen, kann man von der bekannten goniometrischen Formel

$$\sin. 2x = 2 \sin. x . \cos. x$$

Gebrauch machen, indem man einerseits 2x statt x in Gleichung (9)

substituirt, und andernseits die Ausdrücke (9) und (10) multiplicirt. Dadurch erhält man mit k eine beliebige ungerade Zahl andeutend:

$$(11)\ \sin. 2x = 2x - \frac{8x^3}{1.2.3} + \frac{32x^5}{1.2.3.4.5} \ldots \pm \frac{2^k . x^k}{1.2.3\ldots k} \ldots$$

$$(12)\ \sin. x . \cos. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots \pm \frac{x^k}{1.2.3..k}$$

$$- \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^5}{1.2.3.1.2} \ldots \pm \frac{x^k}{1.2..(k-2).1.2}$$

$$+ \frac{x^5}{1.1.2.3.4} \ldots \pm \frac{x^k}{1.2..(k-4).1..4}$$

$$\vdots$$

$$\pm \frac{x^k}{1.1.2.3..(k-1)}$$

In dieser letzten Entwickelung ist der Coefficient von x^k:

$$\frac{\pm 1}{1.2.3\ldots k}\left(1 + \frac{k(k-1)}{1.2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{k}{1}\right)$$

oder, da nach (4) im §. 171. die eingeklammerte Reihe sich auf den Werth 2^{k-1} reducirt:

$$\frac{\pm 2^{k-1}}{1.2.3.4\ldots k}$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten in (12) mit 2, wie es die obige Formel erfordert, so erhält man in der That den Coefficienten des x^k enthaltenden Gliedes ganz übereinstimmend mit demjenigen in (11), womit die Allgemeingültigkeit des in den Reihen (9) und (10) hervortretenden Gesetzes sich bestätigt.

§. 184. Aufgaben.

1. Das Product $(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x)(1 + 4x)$ in einer Reihe zu entwickeln.
2. Eben so das Product $(1 + x)(2 + x)(3 + x)(4 + x)$.
3. Eben so den Quotienten $\frac{1}{1 + 2x + x^2}$.
4. Eben so den Quotienten $\frac{1 + x}{1 - x} = (1 + x)\left(\frac{1}{1 - x}\right)$.
5. Den Totalwerth der begränzten Reihe $a + x\frac{ax}{2} + \frac{ax^2}{3} + \frac{ax^3}{4} + \frac{ax^4}{5} + \frac{ax^5}{6}$ für $x = 5$ zu berechnen.
6. Eben so der unbegränzten Reihe $b + bz + bz^2 \ldots\ldots$ für $z = \frac{4}{5}$.
7. Eben so der Reihe $k - ky + ky^2 - ky^3 \ldots\ldots$ für $y = 9$.
8. Für welche Werthe von x ist die Reihe $1 + 2x + 3x^2 + 4x \ldots$ convergent und für welche Werthe divergent?

9. Eben so die Reihe $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots\ldots + \frac{x^k}{k} \ldots$

10a. Eben so die Reihe $1 + 1 . x + 1 . 2x^2 + 1 . 2 . 3x^3 \ldots$

10b. Wie unterscheiden sich die Reihen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ und $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{n}$ in Absicht auf Con- und Divergenz?

10c. Convergirt oder divergirt die Reihe $1 - \frac{1}{2.3} \ldots - \frac{1}{2n(2n+1)}$?

10d. Eben so die Reihe $\frac{2^0}{1.2} + \frac{2^1}{2.3} + \frac{2^2}{3.4} + \frac{2^3}{4.5} \ldots + \frac{2^{n-1}}{n(n+1)}$?

10e. In welche convergirende Reihen läßt sich die Reihe $1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}$ zerlegen?

11. Das Product aus $(2 + x)(4 - x)(7 + x)(10 - x)$ combinatorisch zu bilden.

12. Den Coefficienten von x^3 im Producte aus $(4 + x)(5 - x)(7 + x)(8 - x)(10 + x)$ unmittelbar zu berechnen.

13. Die Potenz $(a + x)^9$ in einer Reihe zu entwickeln.

14. Eben so die Potenzen $(a - x)^9$ und $(a - x)^{10}$.

15. Eben so $(m + z)^{-7} + (m - z)^{-7}$ bis auf 6 Glieder.

16. Eben so $(4 + 3y)^{\frac{1}{3}} - (4 - 3y)^{\frac{1}{3}}$ bis auf 7 Glieder.

17. Eben so $(\sqrt{a} + \sqrt{z})^4 + (\sqrt{a} - \sqrt{z})^4$.

18. Eben so $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})^6 - (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x})^6$.

19. Eben so $(a + z)^n - (a - z)^n$.

20. Eben so $(1 + xi)^5 + (1 - xi)^5$.

21. Eben so $(a + zi)^n + (a - zi)^n$.

22. Eben so $(a + bi)^2 \times (a - bi)^2$.

23. Eben so $(1 + \sqrt{-z})^4 \times (1 - \sqrt{-z})^4$.

24. Das 5te Glied nach dem anfänglichen in der Entwickelung von $(a + x)^7$ anzugeben.

25. Eben so das 7te Glied aus $(1 - 2z)^{10}$.

26. Die 5te Wurzel von 1027 zu bestimmen.

27. Eben so die 7te Wurzel von 15618.

28. Den Werth für e^2 auf 5 Decimalen zu berechnen.

29. Eben so den Werth für log. nat. 7.

30. Eben so den Werth für log. vulg. 7.

Drittes Capitel.

Die höheren Gleichungen.

§. 185. Algebra. Die Aufgabe der allgemeinen Arithmetik, für die Grundzahl x einer Reihe von der Form $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots + Gx + K$ diejenigen Werthe aufzufinden, die dem gegebenen Totalwerthe der Reihe entsprechen, führt in ihrem ganzen Umfange auf so viele Schwierigkeiten und weitläufige Untersuchungen, daß man dieselben unter dem Namen Algebra abgesondert zu behandeln pflegt. Und da es zu den vergeblichen Bemühungen der Wissenschaft gehört, jene Aufgabe allgemein zu lösen, nämlich die Wurzeln, d. h. die genügenden Werthe von x für jede beliebige Gleichung der Form

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + Gx + K = L$$

in Functionen der gegebenen Coefficienten A, B, C . . . durch arithmetische Ausdrücke darzustellen oder eine solche Gleichung so aufzulösen, daß die einzelnen Werthe von x, wie es bei einfachen und quadratischen Gleichungen möglich war, in Buchstabenformeln gefunden werden, die auf jeden speciellen Fall angewendet werden können, so ist man genöthigt, die allgemeine Aufgabe auf numerische Gleichungen, d. h. solche, deren Coefficienten in bestimmten (dekadischen) Zahlen gegeben sind, zu beschränken. Doch lassen sich über Bildung, Zerlegung und gewisse Eigenschaften der Gleichungen allgemeine Sätze aufstellen, die jeder Auflösung zur Vorbereitung dienen.

§. 186. Form der Gleichungen. Jede Gleichung, als eine Reihe von Gliedern, die nach den Potenzen einer unbekannten Grundzahl fortschreitet, aber einen bestimmten Werth hat, fällt unter die Form

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots + gx + k = s,$$

oder wenn man durchgehends mit a dividirt und s transponirt, unter das einfachere Schema

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + Gx + K = 0,$$

worin der Coefficient der höchsten Potenz von x die Einheit, jedes anderen Gliedes aber irgend eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl oder auch Null ist. Der Exponent n bestimmt (nach §. 58.) den Grad der Gleichung, nachdem man derselben die vorstehende gesetzmäßige Form gegeben hat. So ist

$$7x^3 + \frac{3}{x} - 5 - 3x + \frac{70}{x^2} = 0,$$

$$\text{als identisch mit } 7x^5 + 3x - 5x^2 - 3x^3 + 70 = 0$$

$$\text{oder } x^5 - \tfrac{3}{7}x^3 - \tfrac{5}{7}x^2 + \tfrac{3}{7}x + 10 = 0$$

eine Gleichung des fünften Grades.

§. 187. Bildung aus Binomialfactoren. Ist eine Zahl x nach einander der verschiedenen Werthe a, b, c . . . k fähig, worunter beliebige (ganze oder gebrochene, positive oder negative) Zahlen verstanden werden mögen, als x = a, x = b, x = c . . . . x = k, oder x — a = 0, x — b = 0, x — c = 0 . . . . x — k = 0, so läßt sich durch Multiplication dieser einfachen Gleichungen eine Gleichung vom höheren Grade bilden. Mit Hülfe der combinatorischen Bezeichnung erhält man (nach §. 169.) als Product derselben die allgemeine Form:

$$x^n - \overset{1}{C}x^{n-1} + \overset{2}{C}x^{n-2} - \overset{3}{C}x^{n-3} + \ldots . \pm \overset{n-1}{C}x \mp \overset{n}{C} = 0,$$

worin sämmtliche Coefficienten durch Combination der gegebenen Wurzeln a, b, c . . . k entstehen. Da diese aber in den obigen Binomialfactoren mit dem negativen Vorzeichen behaftet sind, so müssen nothwendig sämmtliche Glieder von ungerader Stelle nach dem anfänglichen mit den entgegengesetzten Zeichen von a, b, c . . . . a . b . c . . . . a . b . c . d . e u. s. w. gesetzt werden, während die Coefficienten von gerader Stelle, worin a . b, a . c . . . a b c d u. s. w. vorkommen, unverändert bleiben, man möge nun die Wurzeln mit ihren eigenthümlichen Vorzeichen oder den entgegengesetzten nehmen.

Das erste Beispiel einer solchen Entstehung höherer Gleichungen gab schon früher (§. 106.) die Bildung quadratischer Gleichungen aus zwei binomischen Factoren, worauf sich umgekehrt die Bestimmung der beiden Wurzeln einer solchen Gleichung begründen ließ. Eben so bildet sich eine Gleichung des dritten Grades aus drei binomischen Factoren, z. B. aus (x — 2) = 0, (x — 3) = 0, (x — 5) = 0 die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, worin $-10 = -\overset{1}{C}$ (2, 3, 5); $31 = +\overset{2}{C}$ (2, 3, 5) und $-30 = -\overset{3}{C}$ (2, 3, 5) ist.

In Beziehung auf die Bildunsgweise einer höheren Gleichung aus solchen des ersten Grades darf man, wenn irgend eine beliebige Gleichung:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + Gx + K = 0$$

gegeben ist, unter der Annahme, sie sei durch Multiplication einfacher Gleichungen von der Form

$$x - a = 0,\ x - b = 0,\ x - c = 0 \ldots . x - k = 0.$$

entstanden, ihre Coefficienten A, B, C . . . . K als Combinationen unbekannter Wurzeln a, b, c . . . . k betrachten, nur daß dieselben in allen ungeraden Gliedern nach dem anfänglichen mit dem entgegengesetzten Zeichen zu nehmen sind. (Aufg. 1, 2, §. 199.)

§. 188. Zerlegung in Binomialfactoren. Daß eine jede Gleichung der Form $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots . . + Gx + K = 0$, wenn a, b, c . . . . k ihre Wurzeln sind, in die

Factoren $(x-a)$ $(x-b)$ $(x-c)$ ... $(x-k)$ zerlegt werden könne, beweist man durch Substitution einer Wurzel a für x und Einführung des dadurch gewonnenen Werthes

$$K = -a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} - Ca^{n-3} \ldots . Ga.$$

Denn dadurch erscheint die gegebene Gleichung unter der Form

$$(x^n - a^n) + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots G(x-a) = 0.$$

Da sich nun aber die Differenzform $x^k - a^k$ durch $x - a$ ohne Rest dividiren läßt, indem man

$$\frac{x^k - a^k}{x - a} = x^{k-1} + x^{k-2}a + x^{k-3}a^2 \ldots . + xa^{k-2} + a^{k-1}$$

findet, so erscheint die vorstehende Gleichung in ihren sämmtlichen Gliedern durch $x - a$ divisibel. Das Resultat der Division ist eine neue Gleichung, aber im Vergleich zu der gegebenen dem Grade nach um 1 niedriger, und wenn b Wurzel desselben ist, aus dem nämlichen Grunde durch $(x - b)$ divisibel. Hieraus folgt, daß die Gleichung durch allmählige Division in eine Reihe von Binomialfactoren zerlegt werden könne, sofern ihre Wurzeln a, b, c . . , bekannt sind.

Soll aber eine Gleichung als ein, aus Binomialfactoren entstandenes oder in dieselben zerlegbares Product angesehen werden, so ist man genöthigt, jener Factoren, mithin auch der Wurzeln, so viele anzunehmen, als der Grad der Gleichung Einheiten enthält. So hat die cubische Gleichung

$$\text{I. } x^3 - 18x^2 + 32x + 480 = 0,$$

zerlegbar in die Factoren $(x - 10)$, $(x - 12)$ und $(x + 4)$, die drei Wurzeln $x = 10$, 12 und -4; die biquadratische

$$\text{II. } x^4 + 2x^3 - 41x^2 - 42x + 360 = 0,$$

als Product der Factoren $(x - 3)$, $(x - 5)$, $(x + 4)$ und $(x + 6)$, die vier Wurzeln $x = 3$, 5, -4 und -6. (Aufg. 3. und 4., §. 199.).

Anmerkung. Für die reine cubische Gleichung $x^3 - a = 0$ oder $x^3 - \alpha^3 = 0$ findet man, durch $x - \alpha$ dividirend, als Quotienten $x^2 + \alpha x + \alpha^2 = 0$, und demnach als zweite und dritte Wurzel die imaginären Zahlformen:

$$x = \alpha(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \text{ und } x = \alpha(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}).$$

§. 189. Positive und negative Wurzeln. Sind alle Wurzeln einer Gleichung positiv, also $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$ ... oder $(x - \alpha) = 0$, $(x - \beta) = 0$, $(x - \gamma) = 0$, ... so wechseln (nach §. 187.) die Zeichen der Glieder des entwickelten Products regelmäßig ab; sind die Wurzeln aber alle negativ, also $x = -\alpha'$, $x = -\beta'$, $x = -\gamma'$, ... oder $(x + \alpha') = 0$, $(x + \beta') = 0$, $(x + \gamma') = 0$, ... so erhalten sämmtliche Glieder die positive Vorzeichnung. Sind unter den Wurzeln der Gleichung zugleich positive und negative Zahlen $(\alpha, \beta, \gamma \ldots . -\alpha', -\beta', -\gamma' \ldots .)$, so kann die Bezeichnung ihrer Glieder auf die mannigfachste Weise ab-

wechseln. Ob die Summe der positiven oder der negativen Wurzeln überwiege, ist aus dem ersten Coefficienten A und ob die Anzahl der negativen Wurzeln gerade oder ungerade sei, aus dem letzten (d. h. von x freien) Gliede K der Gleichung leicht erkennbar. Denn A ist die Summe aller Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen: $A = -\overset{1}{C}$ und K ist das Product sämmtlicher Wurzeln $K = \pm\overset{k}{C}$; folglich deutet in den obigen Beispielen I. und II. (§. 188.) $A = -18$ auf die größere Summe der positiven, $A = +2$ hingegen der negativen Wurzeln; ferner $K = +480$ in einer cubischen Gleichung auf eine ungerade, und $K = +360$ in einer Gleichung des vierten Grades auf eine gerade Menge negativer Wurzeln. (Aufg. 5, 6, §. 199.)

Setzt man in den Binomialfactoren $(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)$ .... $(x+\alpha')\,(x+\beta')\,(x+\gamma')$ .... sämmtliche Wurzeln mit dem entgegengesetzten Zeichen, so werden in ihrem Producte

$$x^n - \overset{1}{C}x^{n-1} + \overset{2}{C}x^{n-2} - \overset{3}{C}x^{n-3} + \ldots \pm \overset{n-1}{C}x \pm \overset{n}{C}$$

(nach §. 36, Zus.) die Coefficienten der Glieder von gerader Stelle ungeändert bleiben, die von ungerader Stelle hingegen ihre Vorzeichen ändern, also jeder Zeichenwechsel ($\pm\mp$) bei benachbarten Gliedern in eine Zeichenfolge ($\pm\pm$), und umgekehrt jede Zeichenfolge in einem Zeichenwechsel übergehen. So ist z. B.

$$(x+4)\,(x-3)\,(x-5) = x^3 - 4x^2 - 17x + 60.$$
$$(x-4)\,(x+3)\,(x+5) = x^3 + 4x^2 - 17x - 60.$$

§. 190. °Anzahl positiver und negativer Wurzeln

Sei $X = 0$ die Andeutung irgend einer beliebigen, nach ganzen Potenzen der Unbekannten x geordneten, höheren Gleichung, so geht dieselbe nach dem Vorhergehenden in eine, die entgegengesetzten Wurzeln enthaltende, Gleichung $X' = 0$ über, wenn man die Vorzeichen sämmtlicher Coefficienten in den ungeraden Gliedern nach dem anfänglichen ändert. In Beziehung auf diese beiden Gleichungen $X = 0$ und $X' = 0$ gilt nun folgender (unter dem Namen des Cartesischen bekannte) Lehrsatz:

Die Gleichung $X = 0$ kann nicht mehr positive Wurzeln haben, als es Zeichenwechsel in X giebt, und nicht mehr negative Wurzeln, als Zeichenwechsel in X′ sind.

Denn denkt man sich in dem Polynom X bloß die wirklich vorhandenen Glieder (nicht die etwa fehlenden mit dem Coefficienten ± 0) aufgestellt, so läßt sich eine Zerlegung eines Polynoms in gleichartig bezeichnete Abtheilungen vornehmen, wodurch die Gleichung $X = 0$ folgende allgemeine Form erhält:

I. $(x^n + \ldots) - (Px^p + \ldots) + (Qx^q + \ldots) - (Rx^r + \ldots) = 0.$

Multiplicirt man sie in dieser Gestalt mit dem Binomialfactor $x - \alpha$, so entsteht das neue Polynom

$$\text{II.}\begin{cases}(x^{n+1} + \ldots) - (Px^{p+1} + \ldots) + (Qx^{q+1} \ldots) - (Rx^{r+1} \ldots) \\ \quad - \alpha x^n \ldots \qquad + \alpha Px^p \ldots \qquad - \alpha Qx^q \ldots + \alpha Rx^r \ldots\end{cases}$$

in welchem, wenn auch immerhin bei wirklicher Zusammenziehung gleich hoher Glieder irgendwo ein Zeichen der untern Reihe überwiegen möge, doch von dem Anfangsgliede x^{n+1} bis zum Gliede $-(Rx^{r+1})$ mindestens eben so viele Zeichenwechsel bleiben müssen, als in der anfänglichen Gleichung (I.) vorhanden sind. Ferner wechseln die Zeichen nothwendig mindestens noch einmal zwischen dem Gliede $-Rx^{r+1}$ und dem entgegengesetzt bezeichneten letzten Gliede der untern Reihe, so daß in $X(x-\alpha)=0$ jedenfalls wenigstens ein Zeichenwechsel mehr, als in $X=0$ enthalten sein muß.

Sei nun $X = Z(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)$, wo Z das Product aller Binomialfactoren mit nicht positiven Wurzeln der Gleichung, $(x+\alpha')(x+\beta')(x+\gamma')\ldots$, bezeichnet, so finden sich in $Z(x-\alpha)$ wenigstens ein, in $Z(x-\alpha)(x-\beta)$ wenigstens zwei, und also in X, sofern darin allgemein m positive Wurzeln enthalten sind, wenigstens m Zeichenwechsel mehr, als in Z. Also kann die Gleichung $X=0$ nicht mehr positive Wurzel haben, als Zeichenwechsel in ihr vorkommen. Hieraus folgt zugleich, daß in der durch Aenderung der Zeichen sämmtlicher Wurzeln von X entstehenden, Gleichung $(X'=0)$ nicht mehr positive Wurzeln (folglich negative W. von $X=0$) enthalten sein können, als es Zeichenwechsel in derselben giebt, womit der obige Satz bewiesen ist. (Aufg. 7—10, §. 199.)

§. 191. **Imaginäre Wurzeln.** Wenn die sämmtlichen Wurzeln einer Gleichung $X=0$ einen reellen, entweder positiven oder negativen Werth hätten, d. h. $x=\alpha, \beta, \gamma \ldots -\alpha' -\beta' -\gamma' \ldots$ wäre, so würde in Folge des Cartesischen Lehrsatzes die Anzahl der Zeichenwechsel (1) in X diejenige der positiven und (2) in X' die der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung unmittelbar zu erkennen geben. Nun können aber unter den Wurzeln einer Gleichung auch imaginäre der Form $(a \pm b\sqrt{-1})$ oder $(a \pm bi)$ vorkommen, wie sie bei den quadratischen Gleichungen $x^2 + gx + k = 0$ sich dann ergeben, wenn im Ausdrucke der beiden Wurzeln $x = -\frac{1}{2}(g \pm \sqrt{g^2 - 4k})$ der Werth von $4k > g^2$ sein sollte (§. 109.). Die imaginäre Wurzel $a+bi$ setzt aber zugleich die andere $a-bi$ in der Gleichung voraus, weil nur durch das Dasein beider die imaginären Zahlformen sich gegenseitig aufheben können. Denn ist $x=a+bi$ oder $x-a-bi=0$, und $x=a-bi$ oder $x-a+bi=0$, so erhält man durch Multiplication dieser trinomischen Factoren das Product

$$(x-a)^2 + b^2 \text{ oder auch } x^2 - 2ax + (a^2+b^2) = 0,$$

worin keine Spur des imaginären Theils der Wurzel zu entdecken ist. Es sind also unmögliche Wurzeln immer paarweise in einer

Gleichung vorhanden und die einfachen können in trinomische reelle Factoren des zweiten Grades zusammengefaßt werden. So enthält die Gleichung $x^6 + 4x^5 - 2x^4 + 20x^3 + 261x^2 - 24x - 260 = 0$ die reellen Factoren $x + 1$, $x - 1$, $x^2 + 8x + 20$, $x^2 - 4x + 13$, wovon die beiden letzten in die einfachen imaginären

$$x + 4 - 2i,\ x + 4 + 2i$$
$$\text{und}\ x - 2 - 3i,\ x - 2 + 2i$$

zerfallen, folglich die sechs Wurzeln -1, $+1$, $-4 + 2i$, -4, $-2i$, $2 + 3i$ und $2 - 3i$.

Um die Anwesenheit imaginärer Wurzeln in einer numerischen Gleichung $X = 0$ zu entdecken, hat man X oder X' mit dem Binomialfactor $x - u$ zu multipliciren und im Resultat für die unbestimmte Zahl u verschiedene (namentlich sehr kleine und sehr große) Werthe aus der Reihe der dekadischen Einheiten:

$$\ldots 1000;\ 100;\ 10;\ 1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots$$

zu substituiren. Entsteht im Producte $X(x - u)$ dann mehr als ein neuer Zeichenwechsel im Vergleich zu X, oder erhält man eine verschiedene Anzahl von Zeichenwechseln für verschiedene positive Werthe für u, so kann dieser Erfolg, der nach dem Cartesischen Lehrsatze unmöglich wäre, wenn die Gleichung $X = 0$ nur reelle Wurzeln enthielte, allein von imaginären Wurzeln derselben herrühren. Sollte indessen in $X(x - u)$ bei den versuchten verschiedenen Werthen von u stets nur ein neuer Zeichenwechsel hinzukommen, so läßt sich daraus nicht umgekehrt schließen, daß die sämmtlichen Wurzeln von X reell sein müssen, wonach man nicht darauf rechnen darf, das Vorhandenseyn imaginärer Wurzeln durch Anwendung des vorstehenden Verfahrens in allen Fällen nachweisen zu können.

Anmerkung. Es ist zweckmäßig, hier auf die Construction der Gleichungen vermittelst der Coordinaten einzugehen (vergl. §. 339.), um dadurch die Anzahl reeller und imaginärer Wurzeln zu erkennen.

Mit Bestimmtheit giebt es sich indessen jedesmal dann zu erkennen, wenn die Gleichung $X = 0$ unvollständig ist und zwischen zwei gleichbezeichneten Gliedern Lücken enthält. Denn in diesem Falle nimmt die Anzahl der Zeichenwechsel von X in $X(x - u)$ oder $X'(x - u)$ um mehr, als einen, zu. So wird z. B. die unvollständige cubische Gleichung

$$x^3 + 4x - 80 = 0.$$

mit $(x - u)$ multiplicirt, zur vollständigen biquadratischen:

$$x^4 - ux^3 + 4x^2 - (80 + 4u)x + 80u = 0.$$

worin im Vergleiche zu jener zwei Glieder und drei Zeichenwechsel hinzugekommen sind. Dieser Erfolg läßt mit Sicherheit auf imaginäre Wurzeln der cubischen Gleichung schließen, welche aus den Factoren $(x - 4)$ $(x + 2 + 4i)$ $(x + 2 - 4i)$ gebildet ist. Aufg. 11, 12, §. 199.

§. 192. Gränzen der Wurzeln. In jeder numerischen Gleichung der Form $X = 0$, wo X ein aus positiven und negativen Gliedern zusammengesetztes Polynom bezeichnet, läßt sich dieses dergestalt in zwei Polynome P und Q zerlegen, daß in dem ersten die sämmtlichen positiven, im zweiten die sämmtlichen negativen Glieder zusammengefaßt werden. Deutet man nun in dem Ausdruck $X = P - Q$ die Substitution zweier bestimmten positiven Zahlenwerthe durch a und d durch X_a, X_d an, und findet durch wirkliche Berechnung:

$$(\text{I.})\ X_a = P_a - Q_a = + A;\ (\text{II.})\ X_d = P_d - Q_d = - D,$$

so ist mindestens eine der positiven Wurzeln zwischen den Werthen a und d enthalten. Denn da P und Q Polynome aus ganzen und positiven Potenzen von x sind, so müssen (nach §. 167.) ihre Werthe mit denen von x zugleich sich ändern. Man wird daher, um den von P_a herrührenden zu hohen Werth von x in (I.) bis auf 0 zu erniedrigen, eine Zahl $= (a \pm z)$, um dagegen den von Q_d herrührenden zu niedrigen Werth von X in (II.) auf 0 zu erhöhen, eine Zahl $= (d \pm z)$ für x zu substituiren haben, wenn man durch $\pm z$ die (positive oder negative) Correction des zu hohen oder zu niedrigen Werthes bezeichnet.

Hieraus folgt demnach der Satz, daß, wenn der Totalwerth des Polynoms einer auf 0 reducirten Gleichung für $x = a$ positiv, dagegen für $x = d$ negativ wird, mindestens eine der Wurzeln zwischen a und d enthalten sein müsse. Solche Gränzwerthe für die Wurzeln verschafft man sich am einfachsten durch unmittelbare Substitution der ganzen Zahlen 0, ± 1, ± 2 u. s. w. für x, wenn man nicht etwa die Differenzreihen zu Hülfe nehmen will. (Aufg. 13—15, §. 199.

§. 193. Begränzung durch Differenzreihen. Der allgemeine Ausdruck sämmtlicher Glieder einer höhern Differenzreihe vom Range x ist (nach §. 142.):

$$k + (x-1)g + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}f \ldots \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2\ldots n}d$$

oder nach den Potenzen von x entwickelt:

$$Mx^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + Gx + K,$$

so daß man das Polynom X einer Gleichung als geordneten Ausdruck des allgemeinen Gliedes einer höhern Differenzreihe ansehen darf, deren Rang mit ihrem Grade übereinstimmt. Die durch Substitution der Zahlenwerthe 0, 1, 2, 3 .... als Totalwerthe einer gegebenen Gleichung berechneten Zahlen X_0, X_1, X_2 ... X_n müssen also eine höhere Differenzreihe bilden, von welcher man (nach §. 142.) durch Subtraction zu niedrigeren, und endlich zu einer Reihe gleicher Differenzen hinabsteigen kann. Aus diesem Grunde ist es erforderlich, für x so viele successive ganze (oder auch nö=

thigenfalls gebrochene) Zahlen zu substituiren, als man Glieder bedarf, um zu der letzten Reihe der gleichen Differenzen zu gelangen, weil man dann, von dieser wiederum aufsteigend, die Hauptreihe vor- und rückwärts beliebig zu erweitern vermag. Man hat bei diesem Verfahren nicht einmal nöthig, das höchste Glied der Gleichung von seinem Coefficienten zu befreien, wodurch die Rechnung noch einfacher wird. Sei z. B. die Gleichung $9x^4 - 3x^3 - 130x^2 - 17x + 260 = 0$ gegeben, so darf man nur ihre Totalwerthe für $x = 0$, $+1$, -1, $+2$ und -2 berechnen, und erhält von der constanten Differenz 216 zurückgehend, die übrigen so weit, als es erforderlich ist, indem man auf der positiven Seite durch Addition auf der negativen durch Subtraction zur Hauptreihe emporsteigt. Die Berechnung ist diese:

X_{-4}	X_{-3}	X_{-2}	X_{-1}	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
+744	−49	(−58	+159	+260	+119	−174)	−313	+224
	−793	−9	(+217	+101	−141	−293)	−139	+537
		+784	+226	(−116	−242	−152)	+154	+676
			−558	−342	(−126	+90)	+306	+522
				+216	+216	(+216)	+216	+216

Die vier Wurzeln der Gleichung fallen demnach zwischen die Zahlen -4 und -3, -2 und -1, $+1$ und $+2$, $+3$ und $+4$, womit lediglich ihre Begränzung durch ganze Zahlen ausgemittelt, also die eigentliche Bestimmung nur vorbereitet ist

§. 194. Abgeleitete Reihen. Die nähere Berechnung einer reellen Wurzel, wenn man dieselbe bereits zwischen zwei benachbarte ganze Zahlen eingeschlossen und also nur noch auf Decimaltheile genau zu bestimmen hat, läßt sich vermöge einer angemessenen Umgestaltung der gegebenen Gleichung ausführen. Man gebe nämlich in der Gleichung $X = 0$ d. h.

$$\text{I.}\quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \;.\;.\;.\; + Gx + K = 0$$

der vorläufig nur näherungsweise bestimmten Zahl x den noch bestimmten, dieselbe zu einer vollständigen Wurzel ergänzenden, Zuwachs z, so entwickeln sich die Glieder des Polynoms

$$\text{II.}\quad (x+z)^n + A\,(x+z)^{n-1} + B\,(x+z)^{n-2} \ldots + G\,(x+z) + K$$

nach dem binomischen Lehrsatze (§. 170.) in den Reihen:

$$x^n \;+\; nx^{n-1}\,.\,z + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,x^{n-2}\,.\,z^2 + \ldots$$

$$A\Big(x^{n-1} + (n-1)\,x^{n-2}\,.\,z + \frac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}\,x^{n-3}\,.\,z^2 + \ldots$$

$$B\Big(x^{n-2} + (n-2)\,x^{n-3}\,.\,z + \frac{(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2}\,x^{n-4}\,.\,z^2 + \ldots$$

u. s. f.

Nach den Potenzen der Zahl z geordnet, nimmt die vorstehende Entwickelung folgende Gestalt an:

$$x^n + A\,.\,x^{n-1} + B\,.\,x^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots + Gx + K$$
$$+ [nx^{n-1} + A(n-1)x^{n-2} + B(n-2)x^{n-3} \ldots\ldots\ldots]\,z$$
$$+ \frac{1}{1.2}[n(n-1)x^{n-2} + A(n-1)(n-2)x^{n-3} + B(n-2)(n-3)x^{n-4}]\,z^2$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}[n(n-1)(n-2)x^{n-3} + A(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \ldots]\,z^3$$

u. s. f.

Man erkennt leicht, daß diese Reihen sich **unmittelbar aus einander** entwickeln lassen, indem man jedes Glied durch seinen Exponenten multiplicirt und diesen dann um 1 vermindert. Aus diesem Grunde pflegt man jede Reihe die **derivirte** oder **abgeleitete** aus der vorhergehenden, oder kürzer eine **Ableitung** aus der gegebenen Reihe zu nennen. Bezeichnet man nun die erste, zweite, dritte . . . Ableitung aus X durch dX, d^2X, d^3X . . . so erhält dadurch die gegebene Gleichung die neue Form:

$$\text{III. } X + dX\,.\,z + \frac{1}{1.2}d^2X\,.\,z^2 + \frac{1}{1.2.3}\,d^3Xz^3 \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}d^nXz^n = 0.$$

Der Coefficient des letzten Gliedes ist immer die Einheit, da $d^nX = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots 3\,.\,2\,.\,1$ gefunden wird, indem bei wiederholter Ableitung wegen der zu Null werdenden Exponenten von x die späteren Glieder verschwinden. Die Werthe der übrigen Coefficienten werden durch den **jedesmaligen** Näherungswerth der Wurzel, welchen man für x substituirt, bestimmt. Angenommen nun, daß dieser Näherungswerth vom gesuchten **wahren Werthe** der Wurzel nur um einen **ächten Bruch** verschieden sei, so werden die höheren Potenzen von z in der Entwickelung III. zu stets kleineren Factoren und deshalb die späteren Glieder im Allgemeinen von einem immer geringeren Inhalte.

§. 195. **Annähernde Bestimmung der Wurzeln.** Das einfachste Verfahren, sich der, nach den Potenzen von z geordneten, Form

$$X + dX\,.\,z + \frac{1}{1.2}\,d^2X\,.\,z^2 + \frac{1}{1.2.3}d^3X\,.\,z^3 \ldots + z^n = 0$$

zur annähernden Bestimmung der reellen Wurzeln von $X = 0$ zu bedienen, beruht auf der Annahme, daß der Inhalt des Gliedes $dX\,.\,z$ den der nachfolgenden Glieder ansehnlich **überwiegen** werde, da diese **höheren** Potenzen des ächt-gebrochenen Factors z enthalten. Vernachlässigt man dieselben demnach, so erhält man die einfachen Ausdrücke:

$$(1)\ X_a + dX_a\,z = 0;\ \text{also}\ (2)\ z = \frac{-X_a}{dX_a};$$

wonach eine (**positive** oder **negative**) **Correction** des Näherungs-

werthes a einer der Wurzeln von $X = 0$ dadurch gefunden wird, daß man den Totalwerth von X für $x = a$ mit entgegengesetztem Zeichen durch seine erste Ableitung dividirt. Setzt man nun den corrigirten Werth für $x = a'$, so giebt das nämliche Verfahren eine zweite Correction z', indem $-X_{a'}$ durch $dX_{a'}$ dividirt wird, und dasselbe kann so lange fortgesetzt werden, bis die verlangte Anzahl von Decimalstellen für die Wurzel gefunden ist.

Sei z. B. die Gleichung $x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$ gegeben, die (nach §. 190.) eine negative und zwei positive Wurzeln haben muß, sofern sie nicht etwa imaginäre enthält, so findet sich $X_4 = +4$ und $X_5 = -20$, also eine jener Wurzeln zwischen 4 und 5. Nun ist die gegebene Gleichung, wenn $(x+z)$ für x gesetzt, und die Entwickelung in Beziehung auf z geordnet wird:

$$X + dX \,.\, z + \tfrac{1}{2} d^2X \,.\, z^2 + z^3 = 0$$

Setzt man nun für x den Näherungswerth 4, und demzufolge $X^4 = x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = \div 4$ und $dX^4 = 3x^2 - 18x - 4 = -28$, so ergiebt sich als erste Correction jenes Näherungswerthes:

$$z = \frac{-X^4}{dX^4} = \frac{-4}{-28} = \frac{1}{7} = 0{,}14.$$

Wird nun x genauer $= 4{,}14$ gesetzt, so findet man $X_{4,14} = 0{,}141544$ und $dX_{4,14} = -27{,}1012$, also als zweite Correction für x:

$$z = \frac{-X_{4,14}}{dX_{4,14}} = \frac{-0{,}141544}{-27{,}1012} = 0{,}0052.$$

Dadurch ist $x = 4{,}1452$, also eine der Wurzeln bis zur vierten Decimalstelle bestimmt worden. Die beiden anderen Wurzeln, deren eine zwischen 7 und 8, die andere zwischen -3 und -4 fällt, können auf die nämliche Weise berechnet werden. Hat man aber eine Wurzel α einer cubischen Gleichung hinlänglich genau bestimmt, so ist es zweckmäßiger, die übrigen beiden, zumal da diese imaginär sein können, dadurch aufzusuchen, daß man (nach §. 188.) die gegebene Gleichung $X = 0$ durch die einfache $x - \alpha = 0$ dividirt, um zu einer quadratischen zu gelangen, welche sich mit geringer Mühe auflösen läßt. So findet man z. B., wenn die obige Gleichung $x^3 - 9x^2 - 4x + 100 = 0$ durch $x - 4{,}1452$ dividirt wird, als Quotienten die quadratische Gleichung $x^2 - 4{,}8548x - 24{,}1242 = 0$, woraus sich als Wurzeln $x = +7{,}9061$ und $-3{,}0513$ ergeben. In der That findet man als Summe der drei berechneten Wurzeln die Zahl 9, wie es der Coefficient -9 im zweiten Gliede der gegebenen Gleichung (nach §. 189.) verlangt. (Aufg. 16—18, §. 199.)

Anmerkung. Das hier geschilderte Verfahren der Auflösung numerischer Gleichungen, ursprünglich von Newton herrührend, ist in neuerer Zeit allerdings durch vollkommnere Methoden, namentlich diejenigen von Fourrier und Gräffe, welche auch die imaginären Wurzeln berücksich-

tigen, übertroffen worden. Dennoch wird es für die Anwendung seiner großen Einfachheit und Leichtigkeit wegen wohl immer den ersten Rang behaupten; man pflegt in der Praxis bei der successiven annähernden Bestimmung der Wurzeln sogar noch weiter zu gehen und spätere Glieder der gegebenen Gleichung anfangs ganz zu überschlagen, um schnell einen Näherungswerth zu erhalten, durch dessen Hülfe man dann die Wurzel genauer zu bestimmen sucht. Folgende Beispiele werden dieses Verfahren näher erläutern:

1. In dem Lehrbuche der Hydraulik von d'Aubuisson de Voisins findet sich (Nr. 120.) die Gleichung:
$$h^5 - 0{,}03547\, h^2 - 0{,}4684 = 0.$$
Hier wird anfänglich das zweite Glied ganz vernachlässigt und man erhält als Näherungswerth von h:
$$h = \sqrt[5]{(0{,}4684)} = 0{,}865.$$
Setzt man nun, da dieser Werth offenbar etwas zu klein sein muß, $h = 0{,}87$, so wird der Totalwerth $= 0{,}0033$; $h = 0{,}869$, dagegen giebt $0{,}0003$ und kann daher als die gesuchte Wurzel gelten.
2. Ebendaselbst (Nr. 191.) stößt man auf die Gleichung.
$$D^5 - 0{,}006464\, D^2 - 0{,}0006547\, D - 0{,}013318 = 0,$$
wobei anfangs das zweite und dritte Glied ganz übergangen werden. So findet man
$$D = \sqrt[5]{(0{,}013318)} = 0{,}4216$$
und dann durch Einführung des N. W. $D = 0{,}425$ den Totalwerth $-0{,}0009$, durch $D = 0{,}43$ aber $-0{,}00009$, so daß man $0{,}43$ (oder noch genauer $0{,}4306$) als Wurzel ansehen kann.
3. In **Péclet Traité de la chaleur** (Nr. 407.) wird die Gleichung
$$D^5 = \frac{0{,}27\,(13\,D + 2)}{441{,}45}$$
so gelöst, daß man aus $D^4 = 351 : 441{,}45$ den N. W. $D = 0{,}298$ zieht und dann durch dessen Substitution genauer $D = 0{,}3235$ und $0{,}3272$ findet.

§. 196. Umformung der Gleichungen. Die Annahme daß in der, nach z geordneten, Form der Gleichung $X = 0$ sämmtliche Glieder mit höheren Potenzen von z im Vergleich zu den beiden ersten Gliedern als unerheblich zu vernachlässigen seien, sofern man eine annähernde Bestimmung der Wurzeln beabsichtige, erleichtet allerdings diese Bestimmung im hohen Grade; indessen wird man sie nicht unbedingt gelten lassen dürfen. Es können nämlich die Näherungswerthe von x ächte Brüche und deshalb die höchsten Potenzen von x von dem geringsten Inhalte sein, also die auf $dX.z$ folgenden Glieder von verhältnißmäßig bedeutendem, ja, selbst überwiegendem Inhalte werden. Sofern nun dieser Umstand eintritt, erscheint das obige einfache Verfahren einer annähernden Bestimmung der Wurzeln durch fortgesetzte Correction offenbar nicht gerechtfertigt. Indessen wird man es selbst auch dann noch anwenden können, wenn man durch Substitution von $\frac{1}{10}y$, $\frac{1}{100}y$ . . . .

für x die gegebene Gleichung zuvor umformt, weil in der dadurch entstehenden der Werth von $y > 1$, und deshalb das oben für diese Voraussetzung entwickelte Verfahren der Wurzelbestimmung auch hier wieder anwendbar wird.

Sei die in der hier bezeichneten Weise aufzulösende Gleichung folgende biquadratische:

$$x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 8x + 1 = 0,$$

so findet man bei der Substitution ganzer Zahlen (nach §. 193.) nur für die Werthe -3, -4 und -5, -6 eine Zeichenabwechselung. Zwei andere reelle Wurzeln können aber zwischen irgend zwei benachbarten ganzen Zahlen, und weil (nach §. 189.) das Product aller $= 1$ ist, ächte Brüche oder zwischen 0 und 1 enthalten sein. In der That finden wir durch Substitution von Decimalbrüchen:

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & X_{0,1} & X_{0,2} & X_{0,3} & X_{0,4} \\ +1 & +0{,}3381 & -0{,}0144 & -0{,}0059 & +0{,}4176, \end{array}$$

also zwischen 0,1 und 0,2 eine dritte, und zwischen 0,3 und 0,4 eine vierte reelle Wurzel der Gleichung. Um nun diese beiden Wurzeln (bis zur dritten Decimalstelle) zu bestimmen, substituire man zunächst $\frac{1}{10}y$ für x, wodurch die Gleichung sich verwandelt in:

$$y^4 + 80y^3 + 1300y^2 - 8000y + 10000 = 0.$$

Bezeichnet man den Totalwerth dieser Reihe, wenn $y = a$ gesetzt wird, durch Y_a und den ihrer ersten Ableitung durch dY_a, so erhält man (nach §. 195.) als Ausdruck der Correction:

$$z = \frac{-Y_a}{dY_a}$$

folglich (1) wenn man den Näherungswerth $x = 0{,}2$ oder $y = 10x = 2$ wählt:

$$z = \frac{-Y_2}{dY_2} = \frac{+144}{-1808} = -0{,}08$$

$$\text{mithin} \begin{cases} y = 2 - 0{,}08 = 1{,}92 \\ x = \frac{1}{10}y = 0{,}192 \end{cases}$$

und (2) für $x = 0{,}3$, also $y = 10x = 3$:

$$z = \frac{-Y_3}{dY_3} = \frac{+59}{+2068} = +0{,}02$$

$$\text{mithin} \begin{cases} y = 3 + 0{,}02 = 3{,}02 \\ x = \frac{1}{10}y = 0{,}302. \end{cases}$$

Dividirt man nun die gegebene Gleichung $X = 0$ nach einander durch die einfachen Gleichungen $x - 0{,}192 = 0$ und $x - 0{,}302$, so erhält man die quadratische $x^2 + 8{,}494x + 17{,}144 = 0$, und als deren Wurzeln $x = -3{,}302$ und $x = -5{,}192$.

§. 197. Algebraische Auflösung cubischer Gleichungen Eine Gleichung des dritten Grades von der allgemeinen Form $x^3 + Ax^2 + Bx + K = 0$ algebraisch, d. h. unabhängig von den spe-

ciellen Werthen ihrer Coefficienten aufzulösen, setze man $x = y + z$, und bestimme den Werth von y so, daß in der Entwickelung:

$$(1)\ (y^3 + Ay^2 + By + K) + (3y^2 + 2Ay + B)\,z + (3y + A)\,z^2 + z^3 = 0$$

der Coefficient von z^2, d. h. $3y + A = 0$ werde. Dies geschieht, wenn $y = -\frac{1}{3}A$, und die Gleichung wird durch Einführung dieses Werthes:

$$(2)\ (\tfrac{2}{27}A^3 - \tfrac{1}{3}AB + K) + (B - \tfrac{1}{3}A^2)\,z + z^3 = 0$$

oder in kürzerer Andeutung:

$$(3)\ z^3 + Pz + Q = 0.$$

Nun setze man $z = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$, unter α und β gewisse Zahlenwerthe verstehend, die auf irgend eine noch zu entdeckende Weise mit den Zahlen P und Q zusammenhängen, so wird:

$$z^3 = \alpha + 3\sqrt[3]{\alpha^2}\,.\,\sqrt[3]{\beta} + 3\sqrt[3]{\alpha}\,.\,\sqrt[3]{\beta^2} + \beta =$$
$$\alpha + \beta + 3\sqrt[3]{\alpha\,.\,\beta}\,(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}) = \alpha + \beta + 3z\sqrt[3]{\alpha\,.\,\beta}.$$

Also erhält die Gleichung die neue Gestalt:

$$(4)\ (\alpha + \beta) + (3\sqrt[3]{\alpha\beta} + P)\,z + Q = 0.$$

Offenbar wird dieser Gleichung Genüge geschehen, wenn $\alpha + \beta + Q = 0$ und zugleich $3\sqrt[3]{\alpha\beta} + P = 0$ ist. Hiernach wäre

$$\alpha + \beta = -Q \text{ und } \alpha\beta = -\tfrac{1}{27}P^3$$

und (nach §. 107.) $\alpha = \frac{1}{2}\left(-Q + \sqrt{Q^2 + \frac{4}{27}P^3}\right)$

$$\beta = \tfrac{1}{2}\left(-Q - \sqrt{Q^2 + \tfrac{4}{27}P^3}\right)$$

Also findet man als algebraischen Ausdruck der Wurzel folgende (die sogenannte Cardanische) Formel:

$$(5)\ z = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-Q + \sqrt{Q^2 + \tfrac{4}{27}P^3}\right)} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-Q - \sqrt{Q^2 + \tfrac{4}{27}P^3}\right)}$$

(S. §. 199, Aufg. 20, 19 und 21.)

Wenn $Q + \frac{4}{27}P^3$ negativ $= -R$ sein sollte, so erhält man einen imaginären Ausdruck für die Wurzel z, der sich indessen in einen reellen verwandelt, sobald man seine beiden Theile nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, indem aus den Reihen für

$$(-\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{2}\sqrt{R}\,.\,i)^{\frac{1}{3}} + (-\tfrac{1}{2}Q - \tfrac{1}{2}\sqrt{R}\,.\,i)^{\frac{1}{3}}$$

der Factor i (nach §. 184, Aufg. 21.) völlig verschwindet.

Anmerkung. In anderer Weise läßt dieser Fall (der sogenannte **casus irreducibilis**) sich zur Berechnung bringen, indem man von den cyklischen Functionen des Sinus und Cosinus Gebrauch macht. Wird nämlich in dem Ausdruck

$$z = (-\tfrac{1}{2}Q)^{\frac{1}{3}}\,.\,\left\{\left(1 + \frac{\sqrt{R}}{Q}i\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{\sqrt{R}}{Q}i\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$ für $\frac{\sqrt{R}}{Q}$ substituirt, so erhält man:

$$z = \left(\frac{-Q}{2\cos.\varphi}\right)^{\frac{1}{3}} . \left\{(\cos.\varphi + \sin.\varphi . i)^{\frac{1}{3}} (+\cos.\varphi - \sin.\varphi i)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

und da (nach §. 182) I. $e^{\varphi i} = \cos.\varphi + \sin.\varphi . i$

II. $e^{-\varphi i} = \cos.\varphi - \sin.\varphi . i$

III. $(\cos.\varphi + \sin.\varphi . i)^n = \cos.(n\varphi) + \sin.(n\varphi) . i$

IV. $\cos.\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}$,

so zieht der vorstehende Ausdruck der Cardanischen Formel sich zusammen auf den einfacheren:

$$(6)\quad z = \sqrt[3]{\left(\frac{-Q}{2\cos.\varphi}\right)} . 2\cos.\tfrac{1}{3}\varphi,$$

dessen Anwendung erfordert, daß man $\cos\varphi$ und $\cos\frac{1}{3}\varphi$ vermöge der Tafeln bestimme, indem man in der Columne der Tangenten

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \frac{\sqrt{R}}{Q} = \frac{\sqrt{(Q^2 + \frac{4}{27}P^3)}}{Q}$$

aufsucht, wodurch sich φ und $\frac{1}{3}\varphi$ ergiebt. (S. Aufg. 19—24 §. 199.)

§. 198. **Algebraische Auflösung biquadratischer Gleichungen.** Sei die aufzulösende Gleichung des vierten Grades von der allgemeinen Form $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + K = 0$, so verwandelt sie sich, wenn man $(x - \frac{1}{4}A)$ für x substituirt, in eine viergliedrige der Form

$$(1)\quad z^4 + Pz^2 + Qz + R = 0.$$

Betrachtet man nun diese Gleichung als Product der beiden quadratischen

$$(z^2 + az + b) = 0, \qquad (z^2 - az + c) = 0,$$

so findet man durch Multiplication:

$$(2)\quad z^4 + (b + c - a^2)\,z^2 + (ac - ab)\,z + bc = 0,$$

und durch Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit (1):

$$b + c - a^2 = P;\ ac - ab = Q;\ bc = R)$$

daraus folgt, weil $c + b = P + a^2$ und $c - b = \frac{Q}{a}$ ist;

$$c = \tfrac{1}{2}\left(P + a^2 + \frac{Q}{a}\right) \text{ und } b = \tfrac{1}{2}\left(P + a^2 - \frac{Q}{a}\right),$$

$$\text{also } b . c \text{ oder } R = \tfrac{1}{4}\left(P^2 + 2Pa^2 + a^4 - \frac{Q^2}{a^2}\right).$$

Dieser Ausdruck giebt nach einiger Umgestaltung

$$(3)\quad a^6 + 2Pa^4 + (P^2 - 4R)\,a^2 - Q^2 = 0,$$

oder wenn man $a^2 = w$ setzt:

$$w^3 + 2Pw^2 + (P^2 - 4R)\,w - Q^2 = 0,$$

mithin eine cubische Gleichung, durch deren Auflösung vermittelst der Cardanischen Formel man a, b, c entdeckt, und alsdann die gegebene biquadratische Gleichung in ihren beiden Factoren ohne Mühe auf-

lösen kann. Die hier bezeichnete Auflösungsmethode wird die Cartesische genannt.

§. 199. Aufgaben.

1. Aus den einfachen Gleichungen $x + 2 = 0$; $x + 3 = 0$; $x - 4 = 0$; $x - 5 = 0$; $x + 7 = 0$ eine Gleichung des fünften Grades combinatorisch zu bilden.
2. Eben so eine Gleichung des vierten Grades aus $x + 7 = 0$; $x + 9 = 0$; $x - 0{,}4 = 0$; $x - 0{,}3 = 0$.
3. Die Gleichung $x^4 - 25x^3 + 131x^2 - 95x - 300 = 0$ hat die Wurzeln 2 und 5. Man soll die beiden anderen Wurzeln finden.
4. Eben so für $x^3 - 64 = 0$, wo die Wurzel $x = 8$ unmittelbar gegeben ist.
5. Welche ganze Wurzeln, kann die Gleichung $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$ in Folge ihres zweiten und letzten Gliedes haben?
6. Eben so die Gleichung $x^4 - 2x^3 - 49x^2 - 22x + 240 = 0$.
7. Wie viele positive und negative Wurzeln kann die Gleichung in (3) haben?
8. Eben so $x^4 - 2x^3 - 49x^2 - 22x + 240 = 0$.
9. Eben so $x^4 + 45x^2 - 40x + 100 = 0$.
10. Eben so $x^5 + 6x^3 + 19x - 44 = 0$.
11. Die Gleichungen 8, 9, 10 in Absicht imaginärer Wurzeln zu prüfen.
12. Eben so die Gleichung $x^4 - 14x^3 + 86x^2 - 264x + 360 = 0$.
13. Die Gränzen der Wurzeln von $7x^3 - 2x^2 + 11x - 33 = 0$ in ganzen Zahlen auszumitteln.
14. Eben so von $4x^4 - 13x^3 + 5x^2 - 11x - 80 = 0$.
15. Eben so von $2x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 18 = 0$.
16. Die Wurzeln der Gleichung in (13) indirect bis auf 4 Decimalstellen zu berechnen.
17. Eben so die Wurzeln der Gleichung in (14).
18. Eben so die Wurzeln der Gleichung in (15).
19. Nach der Cardanischen Formel die Gleichung $x^3 - 3x - 2 = 0$ aufzulösen.
20. Eben so $z^3 - 21z + 344 = 0$.
21. Eben so $x^3 - 12x^2 + 60x - 96 = 0$.
22. Eben so $z^3 - 49z = 120$.
23. Eben so $z^3 - 21z + 20 = 0$.
24. Eben so $x^3 - 12x^2 + 37x - 7 = 0$.
25. Ein Parallelepipedon, dessen Seiten = 16,5; 21,4 und 10,7 Fuß sind, soll an cubischem Inhalte durch eine gleiche Vermehrung aller Seiten verdoppelt werden. Wie viel beträgt dieselbe?

26. Die Gleichung einer Curve sei $y = 5x^4 - 10x^3 + 23$. Welche Werthe der Abscisse x entsprechen der Ordinate $y = 2{,}5$?
27. Zwischen den veränderlichen Größen w und x herrscht folgende Beziehung: $w = -0{,}16x + 0{,}0185x^2 - 0{,}00005x^3$. Welcher Werth von x entspricht demnach dem Werthe $w = 20$?
28. Werden die drei Dimensionen eines Würfels der Reihe nach um 4′, 5′ und 6′ verkürzt, so enthalte das dadurch entstehende Parallelepipedon 1368 Cubikfuß. Wie groß ist die Seite des Würfels?
29. Die Kuppel eines Gebäudes, aus Cylinder und Halbkugel bestehend, nimmt einen Raum von 15410 Cubikfuß ein; die Höhe ihrer senkrechten Wand betrage 18 Fuß. Wie groß ist demnach ihr Durchmesser?
30. Man berechne die Länge der Kante eines regulären Octaëders, welches einem Cubus von 21 Cubikzoll und einem Kegel von 4″ Höhe und einem, jener Kante gleichen, Basisdurchmesser inhaltsgleich sei.

Viertes Capitel.

Die Zahlenlehre.

§. 200. Gegenstand der Zahlenlehre. Die Arithmetik, obgleich von dem beschränkten Begriffe der ganzen, positiven Zahl ausgehend, ist in ihrem Fortgange sehr bald genöthigt, ihre Operationen auf gebrochene und negative, so wie später auf irrationale, ja sogar imaginäre Zahlen auszudehnen, wenn sie mit Consequenz die Begriffe jener Operationen verfolgen und den zusammensetzenden (Addition, Multiplication und Potenzirung) die zerlegenden (Subtraction, Division und Wurzel-Ausziehung) gegenüberstellen will, wobei denn freilich manche Zahlenausdrücke als Resultate von Operationen, die nur unter bestimmten Bedingungen ausführbar sind, eine bloß hypothetische Geltung haben. Dadurch aber entfernt man sich nun allerdings sehr weit von dem einfachen Begriffe der ganzen Zahl, als einer aus wiederholtem Setzen der Einheit entstandenen Vielheit, und es ergiebt sich für die höhere Arithmetik die Aufgabe, jenen einfachen Grundbegriff wieder aufzunehmen und die Eigenthümlichkeit der ganzen Zahlen nach Uebereinstimmung und Verschiedenheit einzelner Abtheilungen derselben, so wie ihre gegenseitigen

Beziehungen, namentlich in Absicht der Theilbarkeit, näher zu erforschen. Eine solche Betrachtung der Zahlen, wodurch gebrochene, negative, irrationale und imaginäre absichtlich ausgeschlossen werden, ist der Gegenstand der eigentlichen Zahlenlehre oder Theorie der Zahlen. Eine der lehrreichsten Anwendungen dieses unendlich ausgedehnten und schwierigen Theils der höheren Arithmetik bildet die Auflösung unbestimmter Gleichungen, welche im allgemeinen mehrfache Werthe für die in ihnen enthaltenen Unbekannten zulassen, wofür indessen nur ganze, positive Zahlen gestattet werden. Beschränken diese Gleichungen sich auf den ersten Grad, so gewähren die Eigenschaften der Kettenbrüche ein leichtes und sicheres Mittel, dieselben aufzulösen. Als Anfangsgründe der reinen Zahlenlehre mögen daher zunächst eine Reihe der einfachsten und wichtigsten Sätze über die Theilbarkeit der Zahlen, dann eine kurze Darstellung der Kettenbrüche und endlich die Auflösung einfacher unbestimmter Gleichungen im Nachstehenden mitgetheilt werden.

I. Theilbarkeit der Zahlen.

§. 201. Erklärungen über Theilbarkeit.

1. Jede durch mehrfaches Setzen einer Zahl a entstehende Zahl P ist ein Vielfaches derselben und ihre allgemeine Andeutung $P = a \cdot v$, wo v einen unbestimmten, aber ganzen Multiplicator bezeichnet. Eben so ist $Q = b \cdot w$, $R = c \cdot x$, $S = d \cdot y$ u. s. w. zu setzen, wenn diese Zahlen als Vielfache der anderen b, c, d . . . . vorausgesetzt werden.

2. Eine Zahl P heißt durch eine andere a theilbar oder divisibel, wenn der Quotient $P : a = v$ eine ganze Zahl ist. Die Zahlen P, Q, R, S sind demnach der Reihe nach durch a, b, c, d theilbar wenn

$$\frac{P}{a} = v, \frac{Q}{b} = w, \frac{R}{c} = x, \frac{S}{d} = y$$

oder nach der Definition der Division (§. 13.), wenn

$$P = a \cdot v,\ Q = b \cdot w,\ R = c \cdot x,\ S = d \cdot y,$$

d. h. wenn sie Vielfache der Zahlen a, b, c, d sind. Man nennt diese Zahlen daher Theiler von P, Q, R, S oder sagt, daß sie in denselben aufgehen.

3. Zahlen, welche nur Vielfache der Einheit oder durch keine andere Zahl als 1, theilbar sind, werden absolute Primzahlen genannt. Sie mögen im Folgenden durch beigefügte Accente (z. B. a′, b′, c′, d′) von anderen unterschieden werden.

4. Zusammengesetzte Zahlen a, b, c, d sind Vielfache von absoluten Primzahlen, also anzudeuten durch

$$a = a' . v, \; b = b' . w, \; c = c' . x, \; d = d' . y.$$

5. Ist $P = a . v$ und $Q = a . w$, so haben diese Zahlen (nach §. 15.) ein gemeinschaftliches Maaß oder (nach 2.) einen gemeinschaftlichen Theiler a. Haben sie einen solchen nicht, so sind sie relative Primzahlen.

6. Ist eine Zahl a kein Vielfaches einer anderen k, sondern muß einem Vielfachen der letzten (k . v) noch eine ganze Zahl $\alpha < k$ hinzugefügt werden, um a hervorzubringen, so ist a durch k nicht theilbar.

7. Da in dem zweitheiligen Ausdruck $k . v + \alpha$ einer durch k nicht theilbaren Zahl a nur der erste Theil durch k theilbar ist, so bleibt bei einer Division durch k der untheilbare Rest α. Eben so lassen die Zahlen b, c, d . . . die Reste β, γ, δ . . ., wenn

$$d = k . w + \beta, \; c = k . x + \gamma, \; d = k . y + \delta$$

und $\beta, \gamma, \delta \ldots < k$ angenommen wird.

§. 202. Theilbarkeit der Summen und Differenzen.

1. Sind zwei Zahlen a, b durch eine dritte k theilbar, so ist es auch ihre Summe oder Differenz.

Denn ist $a = k . v$, $b = k . w$, so ist auch (1) $a + b = k (v + w)$ und (2) $a - b = k (v - w)$.

2. Die Summe mehrerer Zahlen $a + b + c + d$ ist durch eine Zahl k jedesmal theilbar, wenn die Summe der Reste $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche entstehen, indem man die einzelnen Summanden durch k dividirt, solches ist.

Denn da nach Vg. $a = k . v + \alpha$, $b = k . w + \beta$, $c = k . x + \gamma$, $d = k . y + \delta$, so erhält man durch Summirung

$$(a + b + c + d) = k (v + w + x + y) + (\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

also ist $(a + b + c + d)$ durch k theilbar (nach L. 1) wenn $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ es ist.

3. Die Differenz zweier Zahlen $a - b$ ist durch eine Zahl k theilbar, wenn die Differenz der Reste, welche bei der Division jener Zahlen durch k entstehen, null ist.

Denn da $a = k . v + \alpha$, $b = k . w + \beta$, so ist $a - b = k (v - w) + \alpha - \beta$; also ist $a - b$ durch k theilbar, wenn $\alpha - \beta = 0$ ist.

4. Jede in einem bestimmten Zahlensysteme ausgedrückte vielziffrige Zahl ist durch eine Zahl k theilbar, wenn die Summe der Producte aus den einzelnen Ziffern in die Reste, welche durch Division der Einheiten ihrer Stellen entstehen, solches ist.

Werden die Ziffern der gegebenen Zahl durch a, b, c . . . d, e, f, die successiven Einheiten der ihnen entsprechenden Stellen mit 10^n, 10^{n-1}, 10^{n-2} . . . . 10^2, 10^1, 10^0 und die durch Division mit k

entstehenden Reste mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots \delta, \varepsilon$ 1 bezeichnet, so erhält man allgemein die Gleichungen.

$$
\begin{array}{llll}
10^n = Ak + \alpha & \text{also} & a.\,10^n & = aAk + a\alpha \\
10^{n-1} = Bk + \beta & & b.\,10^{n-1} & = bBk + b\beta \\
10^{n-2} = Ck + \gamma & & c.\,10^{n-2} & = cCk + c\gamma \\
\cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & \\
10^2 = Dk + \delta & & d.\,10^2 & = dDk + d\delta \\
10^1 = Ek + \varepsilon & & e.\,10^1 & = eEk + e\varepsilon \\
10^0 = \ldots 1 & & f.\,10^0 & = \ldots\ldots f,
\end{array}
$$

und durch Summation derselben das Endresultat:

$$abc..def = (aA + bB .. + eE)k + (a\alpha + b\beta .. e\varepsilon + f).$$

Also ist abc ... def durch k theilbar, wenn $a\alpha + b\beta \ldots + \varepsilon e + f)$ solches ist.

§. 203. Anwendung auf das Decimalsystem. Die Regeln für die Prüfung der Theilbarkeit einer gegebenen Zahl Z hängen zunächst von der Grundzahl des Systems ab, wie denn z. B. alle durch Sieben theilbare Zahlen augenblicklich erkennbar sind, wenn man nach dem heptadischen Systeme rechnen und folglich die Potenzen von Sieben = 10, 100, 1000 .... schreiben will, während sie in dekadisch gebildeten Zahlen nur mit Mühe erkannt werden. Viel einfacher läßt sich die Theilbarkeit solcher durch 2, 4, 8 .... 3, 6, 9 beurtheilen, wie aus folgender Anwendung des obigen allgemeinen Satzes (§. 204. L. 4.) hervorgehen wird. Es sei nämlich:

1. $k = 2$, so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon = 0$, also Z theilbar, wenn die letzte Ziffer f es ist.

2. $k = 3$, so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon = 1$, also Z theilbar, wenn die Quersumme der Ziffern $(a + b + c \ldots + f)$ es ist.

3. $k = 4$, so ist $\alpha, \beta \ldots \delta = 0$ und $\varepsilon = 2$, also Z theilbar, wenn $(2e + f)$ es ist.

4. $k = 5$, so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon = 0$, also Z divisibel, wenn f es ist.

5. $k = 6$, so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon = 4$, also Z theilbar, wenn $4(a + b + c \ldots + e) + f$ es ist.

6. $k = 7$, so ist die, sich immer wiederholende Reihenfolge der Reste 5, 4, 6, 2, 3, 1, also Z divisibel, wenn $(\ldots 5a + 4b + 6c + 2d + 3e + f)$ es ist.

7. $k = 8$, so ist $\varepsilon = 2$, $\delta = 4$ und jeder höhere Rest $= 0$, also Z theilbar, wenn $(4d + 2e + f)$ es ist.

8. $k = 9$, so ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varepsilon = 1$, also Z divisibel, wenn die Quersumme $(a + b + c \ldots + f)$ es ist. Aufg. 1—4, §. 216.

§. 204. Theilbarkeit der Producte.

1. Ein Product $P = a.b.c...p.q$ ist durch jeden seiner Factoren theilbar; oder ist (§. 201. 2.) ein Vielfaches jedes in ihm enthaltenen Factors.

Dieser Satz folgt (nach §. 201, 1.) unmittelbar aus dem Fundamentalsatze der Multiplication (§. 12.) daß man jeden Factor eines Products beliebig versetzen dürfe. Um denselben streng und allgemein zu beweisen, denke man sich nach den Andeutungen

(1)

	b				
c	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1

(2)

	b				
c	a	a	a	a	a
	a	a	a	a	a
	a	a	a	a	a

zuerst zwei Factoren in ihre Einheiten zerlegt, so erscheint es gleichgültig, ob man b Einheiten c mal, oder c Einheiten b mal setzt; also ist (1) $b \times c = c \times b$.

Werde nun ferner jede Einheit a mal gesetzt, so entsteht nach (2) das nämliche Product, indem man entweder 1) a zuerst b mal und das Resultat c mal; oder 2) a zuerst c mal und das Resultat b mal; oder endlich 3) a so viel mal setzt, als das Product $b \times c$ Einheiten enthält; d. i. $(a.b).c = (a.c).b = a.(b.c)$. Hieraus folgt (II.) $a.b.c = a.(b.c)$.

Sei nun allgemein $P = a.b.c...m.n.p.q$, so ist

nach (II) $a.b.c....m.n.p = (a.b.c...m).(n.p)$

nach (I) $(a.b.c...m)(n.p) = (a.b.c...m).(p.n)$

d. i. nach (II) $a.b.c....m..n.p = a.b.c....m.p.n$

also auch $a.b.c...m.n.p.q = a.b.......m.p.n.q$.

Es ist demnach der Factor p um eine Stelle weiter links, oder der Factor n um eine Stelle weiter rechts gesetzt, ohne daß dadurch der Inhalt des Products geändert wäre, welches auf gleiche Weise mit jedem Factor bis zu jeder beliebigen Stelle geschehen kann.

Zusatz I. Enthält eine Zahl P die einzelnen Factoren a, b, c, d, so ist sie auch durch deren Product theilbar.

Zusatz II. Ist eine Zahl P durch eine andere $Q = a.b.c$ theilbar, so ist sie auch durch jeden in Q enthaltenen Factor theilbar.

2. Sind n Zahlen a, b, c, d . . . sämmtlich durch k theilbar, so ist ihr Product durch k^n theilbar.

Denn aus $a = k.v$, $b = k.w$, $c = k.x$, $d = k.y$ . . . . folgt, daß $a.b.c.d... = k^n.z$.

3. Das Product P mehrer Zahlen a, b, c, d . . . . ist durch eine Zahl k nur dann theilbar, wenn das Product der Reste, welche jene einzelnen Zahlen bei der Division durch k lassen, solches ist.

Denn sei $a = k.v + \alpha$, $b = k.w + \beta$, $c = k.x + \gamma$, $d = k.y + \delta$, so erhält man durch Multiplication:

(1) $a \, . \, b = k \, . \, z + \alpha \, . \, \beta$.

(2) $a \, . \, b \, . \, c = k \, . \, z + \alpha \, . \, \beta \, . \, \gamma$.

(3) $a \, . \, b \, . \, c \, . \, d = k \, . \, z + \alpha \, . \, \beta \, . \, \gamma \, . \, \delta$ u. s. w.

4. Das Product P mehrer Factoren a, b, c, d .... ist durch eine Primzahl k' nur dann theilbar, wenn irgend einer seiner Factoren es ist.

Denn es sei $a = k' . v + \alpha$, $b = k' . w + \beta$, $c = k' . x + \gamma$... also $P = k' . z + \alpha . \beta . \gamma$ ...., so muß, wenn P durch k' theilbar sein soll, auch $\alpha . \beta . \gamma$ .... (nach L. 3) solches sein. Nun kann aber k' weder unter α, β, γ .... vorkommen (da diese Zahlen als Reste kleiner sein müssen), noch durch Verbindung kleinerer Factoren entstehen (da k' eine Primzahl ist). Folglich ist $\alpha . \beta . \gamma$ ... und demnach auch P nur dann durch k theilbar, wenn einer der Reste = 0, d. h. einer der Factoren a, b, c ... = $k' . v$ ist.

5. Sind die Factoren a, b, c ... eines Products P sämmtlich relative Primzahlen zu k, so ist jenes Product durch k nicht theilbar.

Denn es sei k (1) eine absolute Primzahl, so folgt der Satz aus L. 4; oder (2) ein Vielfaches einer Primzahl, $= p' . v$, so hätte man, wenn P durch k theilbar wäre:

$$\frac{P}{k} = \frac{a . b . c ...}{p' . v} = m, \text{ also } a . b . c ... = m . p' . v$$

und es müßte demnach a . b . c ... durch p' theilbar sein, welches nach L. 4. unmöglich ist.

Zusatz. Ist das Product a . b . c . f, worin alle Factoren außer f relative Primzahlen zu k sind, durch k theilbar, also $a . b . c . f = k . v$, so ist f durch k theilbar.

6. Sind b und c relative Primzahlen und eine Zahl P durch jede von ihnen theilbar, so ist sie auch durch ihr Product theilbar.

Denn da nach Vg. $P = b . v = c . w$ ist, b aber als relative Primzahl durch c nicht theilbar sein kann, so muß $v = c . x$, also $P = b . c . x$ und folglich durch b . c theilbar sein.

(Aufg. 5–7, §. 216.)

§. 205. Theibarkeit der Potenzen.

1. Ist eine Zahl P durch k theilbar, so ist jede Potenz von P durch eine gleich hohe Potenz von k theilbar.

Denn sei $P = k . v$, so ist $P^n = k^n . v^n = k^n . z$.

2. Potenzen einer Zahl P sind durch keine zu P relative Primzahlen a, b, c ... theilbar.

Denn die Annahme, daß $P^n = P . P . P ... P = a . v = b . w = c . x$ u. s. w. sein könne, streitet gegen §. 204, L. 5.

3. Potenzen einer Primzahl p' sind durch keine andere Zahlen, als diese selbst und deren kleinere Potenzen theilbar.

Daß $(p')^n$ durch p' und $(p')^{n-m}$ theilbar ist, folgt aus §. 204, L. 1. nebst Zusatz III; daß es aber durch keine andere Zahl theilbar sein kann, aus vorigem Lehrsatze.

4. Ist $\left(\frac{a}{b}\right)$ ein in kleinster Benennung (also durch relative Primzahlen) ausgedrückter unächter Bruch, so giebt es keine Potenz desselben, die durch irgend eine ganze Zahl theilbar wäre.

Denn angenommen, es sei $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = k \cdot v$, also $a^n = b^n \cdot k \cdot v$, so müßte (nach §. 204, L. 1.) a^n durch b theilbar sein, welches (nach L. 2.) unmöglich ist.

Zusatz. Da demnach durch Potenzirung eines unächten Bruchs $\left(\frac{a}{b}\right)$ unmöglich eine ganze Zahl k entstehen kann, so ist umgekehrt keine geschlossene Wurzel $\left(\frac{a}{b}\right)$ einer ganzen Zahl k denkbar, wenn $\sqrt[n]{k}$ zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen enthalten ist.

5. Irgend eine bestimmte (nte) Potenz einer Zahl a ist durch eine andere Zahl k theilbar, wenn die gleich hohe (nte) Potenz des Restes α, welcher bei der Division von a und k entsteht, solches ist.

Denn aus $a = k \cdot v + \alpha$ folgt (nach §. 204, L. 3.), daß $a^n = k \cdot z + \alpha^n$, also die Theilbarkeit von a^n durch die von α^n bestimmt wird.

(Aufg. 8—11, §. 216.)

§. 206. Lehrsätze über zusammengesetzte und Primzahlen.

1. Jede zusammengesetzte Zahl P kann nur auf eine einzige Art in Primfactoren zerlegt werden.

Sei die Zahl $P = a^m \cdot b^n \cdot c^p$, so kann sie zunächst (nach §. 204, L. 4.) nicht Product anderer Primfactoren, als a, b, c sein. Sie kann aber auch nicht mehr, noch weniger, als die angedeutete Anzahl dieser einzelnen Primzahlen enthalten, da, wenn $a^m \cdot b^n \cdot c^p = a^q \cdot b^r \cdot c^s$ und z. B. $q < m$ wäre, auch $a^{m-q} \cdot b^n \cdot c^p = b^r \cdot c^s$ sein würde, welches (nach §. 205, L. 3.) unmöglich ist.

2. Jede zusammengesetzte Zahl P ist allein durch die in ihr enthaltenen Primfactoren a, b, c . . . und alle aus denselben zu bildenden Producte theilbar.

Daß P durch a, b, c . . . oder $a \cdot b$, $a \cdot b \cdot c$ u. s. w. theilbar ist, folgt aus §. 204, L. 1; daß aber P durch keine andere Zahlen getheilt werden könne, aus §. 204, L. 5.

3. Die Anzahl sämmtlicher Zahlen, durch welche eine gegebene

Zahl $P = a^m \cdot b^n \cdot c^p$ theilbar ist, wird ausgedrückt durch $(m+1)$ $(n+1)$ $(p+1)$.

Denn da P (nach L. 1.) ausschließlich durch Zahlen der Form $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$ theilbar ist, worin die Exponenten alle Werthe von 1 bis m, n, p annehmen können, so hängt die Anzahl aller Theiler von der Anzahl aller möglichen, jener Form entsprechenden Zusammenstellungen ab. Diese würde man aber durch Entwickelung des Products

$$(1+a+a^2+a^3\ldots\ldots+a^m)\ (1+b+b^2+b^3\ldots+b^n)$$
$$(1+c+c^2+c^3\ldots+c^p)$$

erhalten, indem darin jedes zulässige Product $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$, und kein Glied dem andern gleich erscheint. Die Anzahl aller Glieder dieses Products und folglich die Anzahl aller möglichen Theiler von P ist aber $=(m+1)\ (n+1)\ (p+1)$.

Zusatz. Die Anzahl sämmtlicher kleinerer Zahlen, welche nicht Theiler von P sind, ist $=(P-1)-(m+1)\ (n+1)\ (p+1)$.

4. Zwei auf einander folgende ganze Zahlen a und $a+1$ sind stets relative Primzahlen.

Denn hätten sie einen gemeinschaftlichen Theiler k, so müßte (nach § 202, L. 1.) auch $(a+1)-a$, d. h. 1 durch k theilbar sein, welches unmöglich ist, wenn $k>1$ ist.

5. Die Anzahl der absoluten Primzahlen ist unbegränzt.

Denn angenommen, es gebe irgend eine letzte Primzahl z und das Product aller, d. h. $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots z)$ sei $= P$, so muß die nächste Zahl $(P+1)$ als relative Primzahl zu P (nach L. 4.) entweder andere und zwar größere Primfactoren, als P, enthalten, oder gar selbst eine Primzahl sein. Demnach ist es unmöglich, daß es in der Reihe der absoluten Primzahlen eine letzte gebe.

6. Sind a und k zwei relative Primzahlen, so sind die Reste $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, welche entstehen, wenn die Glieder der Reihe 1a, 2a, 3a ... $(k-1)a$ durch k dividirt werden, sämmtlich unter einander verschieden.

Denn angenommen, es könne in jener Reihe zwei Glieder ma und na mit gleichen Resten α_m und α_n geben, so wäre $(m-n)a$ $= k \cdot v + (\alpha_m - \alpha_n)$ durch k theilbar, da nun aber a relative Primzahl zu k ist, so müßte $(m-n)$ durch k theilbar sein, welches unmöglich ist, da m und n beide kleiner, als k, angenommen worden. Also sind keine zwei gleiche Reste möglich, d. h. alle verschieden.

Zusatz. Die Reste $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_{k-1}$ müssen die Zahlenreihe 1, 2, 3 ... $k-1$, wenn auch in anderer Ordnung bilden.

7. Ist k eine Primzahl und a relative Primzahl zu k, so ist $a^{k-1}-1$ stets durch k theilbar. (Fermat's Lehrsatz.)

Denn es sei $1a = k . v_1 + \alpha_1$
$2a = k . v_2 + \alpha_2$
$3a = k . v_3 + \alpha_3$
:
:
$(k-1)a = k . v^{k-1} + \alpha_{k-1}$,

so ist (1) $1.2.3\ldots(k-1)\, a^{k-1} = k . v + (\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_{k-1})$ und da (nach L. 6, Zusatz) das letzte Glied $= 1.2.3\ldots k-1$ sein muß,

$$(2)\ 1.2.3\ldots(k-1)\,(a^{k-1}-1) = k . v.$$

Nun ist aber das Product $1.2.3\ldots k-1$ durch k (nach §. 204, L. 4.) nicht theilbar. Folglich muß $a^{k-1}-1$ es sein.

8. Ist k relative Primzahl zu m, die Reihe aller gegen k kleineren relativen Primzahlen $= a, b, c \ldots l$, deren Anzahl $= n$, und:

1) $ma = k . v_1 + \alpha$ 2) $mb = k . v_2 + \beta$ 3) $mc = k . v_3 + \gamma$ .... n) $ml = k . v_n + \lambda$, so ist

I. Jeder der Reste $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ von den übrigen verschieden.

II. Jeder der Reste $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ eine relative Primzahl zu k.

III. Jede Zahl der Form $m^n - 1$ durch k theilbar.

I. Denn angenommen, irgend zwei Vielfache, z. B. ma und mc gäben gleiche Reste $\alpha = \gamma$, so wäre $(a-c) . m = k . v + (\alpha - \gamma)$ durch k theilbar. Nun ist aber m relative Primzahl zu k, und da a und $c < k$ sind, auch $(a-c)$ nicht theilbar durch k. Folglich kann nicht $\alpha = \gamma$ sein.

II. Denn angenommen, α habe mit k einen gemeinschaftlichen Theiler, so müßte auch $m . a$ diesen Theiler haben, welches unmöglich ist, da nach Vg. m und a relative Primzahlen gegen k sind. Dasselbe gilt von $\beta, \gamma \ldots \lambda$.

Zusatz. Da alle n Reste $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ nach I. verschieden, und ferner nach II. relative Primzahlen gegen k sind, so müssen sie die Reihe der Zahlen $a, b, c \ldots l$, wenn auch in anderer Ordnung bilden.

III. Denn durch Multiplication der Gleichungen folgt $m^n . a . b . c \ldots l = k . v + \alpha . \beta . \gamma \ldots \lambda$, und da nach vorstehendem Zusatz $\alpha . \beta . \gamma \ldots \lambda = a . b . c \ldots l$ sein muß, $(m^n - 1)\, a . b . c \ldots l = k . v$. Nun ist aber $a . b . c \ldots l$ (nach §. 204, L. 5.) durch k nicht theilbar; also muß $m^n - 1$ es sein.

(Aufg. 12—20, §. 216.)

II. Die Kettenbrüche.

§. 207. Entstehung der Kettenbrüche. Jeder ächte oder unächte Bruch, angedeutet durch $\frac{A}{B}$, kann in der Form

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+1 \text{ u. s. f.}}}}$$

welche den Namen eines continuirlichen oder Kettenbruchs führt, dargestellt werden, indem man eine fortgesetzte Division, wie bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zweier Zahlen (nach §. 15.) anwendet. Sei nämlich bei der Division von A durch B der Quotient $=$ a und der Rest $=$ C, also

$$A = aB + C \text{ oder } \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$$

$$\text{und eben so } B = bC + D \ldots \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$$

$$C = cD + E \ldots \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}$$

$$D = dE + F \ldots \frac{D}{E} = d + \frac{F}{E} \text{ u. s. w.}$$

so ergiebt sich durch allmählige Substitution, weil $\left(\frac{C}{B}\right) = \frac{1}{\left(\frac{B}{C}\right)}$

ist, die obige Form des Werthes von $\frac{A}{B}$, worin die Zähler aller, sie bildenden, einfachen Brüche $=1$, und die Nenner ganze Zahlen $+1$ sind. Sind A und B ganze Zahlen, so muß man bei fortgesetzter Division der Divisoren durch die Reste (nach §. 15.) endlich 0 als Rest, und folglich einen geschlossenen Kettenbruch erhalten; sind sie irrational, so läßt sich derselbe nur für einen Näherungswerth des Bruches $\frac{A}{B}$ und deshalb nie vollständig nennen.

Hat man sich auch allgemeiner einen Kettenbruch unter der Form

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\gamma \text{ u. s. w.}}}$$

zu denken, so ist doch die obige specielle Form schon wegen ihrer Entstehung, als die wichtigste zu betrachten. Beispiele derselben sind:

$$1)\ \frac{3307}{764} = 4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}$$

$$2)\ \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{16}} = \frac{5{,}19615\ldots}{2{,}51984\ldots} = 2 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$$

(Aufg. 21, 22, §. 216.)

§. 208. **Näherungswerthe eines Kettenbruchs.** Setzt man, um die allmähligen Näherungswerthe eines Kettenbruchs zu finden, sofern man mit irgend einem einfachen Bruche desselben abbrechen will, der Vereinfachung wegen:

den Zähler des 1sten $= A$,	den Nenner des 1sten $= A'$	
des 2ten $= B$,	des 2ten $= B'$	
des 3ten $= C$,	des 3ten $= C'$	
des 4ten $= D$,	des 4ten $= D'$	
des 5ten $= E$, u. s. f.	des 5ten $= E'$ u. s. f.	

so sind die gesuchten Näherungswerthe des Kettenbruchs mit Einschluß des anfänglichen, der eine ganze Zahl oder Null ist:

$$(a)\ \frac{A}{A'} = \frac{a}{1}, \qquad (b)\ \frac{B}{B'} = \frac{ba+1}{b},$$

$$(c)\ \frac{C}{C'} = \frac{cB+A}{cB'+A'}, \qquad (d)\ \frac{D}{D'} = \frac{dC+B}{dC'+B'},$$

d. h. man multiplicire, von den beiden ersten Näherungswerthen ausgehend, die man unmittelbar erhält, Zähler und Nenner jedes einzelnen mit dem hinzukommenden Bruchnenner, und füge jenem Producte den Zähler, diesem den Nenner des vorhergehenden Näherungswerthes hinzu. Die Richtigkeit des Bildungsgesetzes erkennt man ohne Mühe für die ersten N. W.; allgemein wird sie dadurch erwiesen, daß man unter der Voraussetzung, der (m)te Näherungswerth des Kettenbruchs sei nach demselben gebildet, d. h. $\frac{M}{M'} = \frac{Lm+K}{L'm+K'}$, den folgenden (n)ten $\frac{N}{N'} = \frac{Mn+L}{M'n+L'}$ findet. Dieses geschieht nun, indem für den unvollständigen Bruchnenner m der vollständigere Werth $m + \frac{1}{n}$ an die Stelle gesetzt wird. Denn alsdann ist:

$$\frac{N}{N'} = \frac{L\left(m+\frac{1}{n}\right)+K}{L'\left(m+\frac{1}{n}\right)+K'} = \frac{mnL+L+nK}{mnL'+L'+nK'}$$

$$= \frac{n(mL+K)+L}{n(mL'+K')+L'}$$

und da $(mL+K) = M$, $(mL'+K') = M'$ vorausgesetzt wurde, so findet sich das obige Gesetz allgemein bestätigt.

Die successiven N. W. des aus $\frac{3307}{764}$ entstandenen Kettenbruchs für welchen $a=4$, $b=3$, $c=22$, $d=1$, $e=4$ und $f=2$ ist, sind demnach:

$$(a)\ \frac{4}{1},\ (b)\ \frac{13}{3},\ (c)\ \frac{13.22+4}{3.22+1}=\frac{290}{67},\ (d)\ \frac{290.1+13}{67.1+3}=\frac{303}{70},$$

$$(e)\ \frac{303.4+290}{70.4+67}=\frac{1502}{347},\ (f)\ \frac{1502.2+303}{347.2+70}=\frac{3307}{764}.$$

Aufg. 23, 24, §. 216.

§. 209. Differenzen der Näherungswerthe. Wenn zwei benachbarte Näherungswerthe eines Kettenbruchs von einander abgezogen werden, so ist ihr Unterschied jedesmal ein Stammbruch, d. h. der Zähler desselben $=1$; die Bezeichnung dieser Differenzen aber wechselt regelmäßig ab und ist für die Differenzen von gerader Anzahl positiv, für die von ungerader negativ, wie schon der Anfang ihrer Reihe dieses bemerklich macht,

$$(1)\ \frac{A}{A'}-\frac{B}{B'}=\frac{AB'-BA'}{A'B'}=\frac{A\,(bA'+0)-A'(bA+1)}{A'B'}$$

$$=-\frac{1}{A'B'}.$$

$$(2)\ \frac{B}{B'}-\frac{C}{C'}=\frac{BC'-CB'}{B'C'}=\frac{B\,(cB'+A')-B'(cB+A)}{B'C'}$$

$$=+\frac{1}{B'C'},$$

weil nämlich $BA'-AB'=-(AB'-BA')=+1$ zu setzen ist.

$$(m)\ \frac{M}{M'}-\frac{N}{N'}=\frac{MN'-NM'}{M'N'}=\frac{M\,(nM'+L')-M'(nM+L)}{M'N'}$$

$$=\frac{-(LM'-ML')}{M'N'},$$

d. h. der Zähler irgend einer Differenz je zwei benachbarter N. W. ist gleich dem vorhergehenden, aber entgegengesetzt bezeichnet; und da der Zähler der ersten Differenz $=-1$ gefunden wird, so müssen die Zähler aller folgenden Differenzen wechselnd $+1$ und -1 werden.

Die Differenzen der N. W. für den oben berechneten Kettenbruch bilden demnach folgende Reihe:

$$(1)-\frac{1}{3},\ (2)+\frac{1}{201},\ (3)-\frac{1}{4690},\ (4)+\frac{1}{24290},$$

$$(5)-\frac{1}{265108}.$$

Aus den obigen Gleichungen (1) (2) . . . (m) folgt ferner, daß A und A', B und B', C und C' . . . L und L', M und M', u. s. f. relative Primzahlen, also die Näherungswerthe des Kettenbruchs

in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind. Denn die Annahme, daß A und A' einen gemeinschaftlichen Theiler haben könnten, streitet gegen den Ausdruck:

$$\frac{AB' - BA'}{A'B'} = -\frac{1}{A'B'}.$$

Aufg. 25, 26, §. 216.

§. 210. Gränzen der Annäherung. Bezeichnet man den wahren Werth des Kettenbruchs mit $\frac{W}{W'}$, so ist zunächst a oder $\frac{A}{A'} < \frac{W}{W'}$, hingegen $a + \frac{1}{b}$ oder $\frac{B}{B'} > \frac{W}{W'}$, weil der Nenner b durch Vernachlässigung des angehängten Bruches zu klein ist. Sei allgemein $\frac{M}{M'} < \frac{W}{W'}$, so muß der folgende N. W. $\frac{N}{N'} > \frac{W}{W'}$ sein, weil beim Fortschritt von einem zum andern für den zu kleinen Kettenbruch-Nenner m der zu große $\left(m + \frac{1}{n}\right)$ substituirt wird, der den neuen N. W. nothwendig im entgegengesetzten Sinne unrichtig oder vom Werthe abweichend macht. Nun ist die Reihe der N. W. nach §. 209.:

$$\text{(I.)}\ \frac{A}{A'} = \frac{a}{1};\ \frac{B}{B'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'};\ \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'}\ \text{u. s. w.,}$$

worin, weil $\frac{A}{A'} < \frac{W}{W'}$ oder $\frac{B}{B'} > \frac{W}{W'}$, die Glieder von ungerader Zahl $\frac{A}{A'}\ \frac{C}{C'}\ \frac{E}{E'}$ .... sämmtlich zu klein, die von gerader Anzahl $\frac{B}{B'}\ \frac{D}{D'}\ \frac{F}{F'}$ .... hingegen sämmtlich zu groß sind. Der Fehler, welchen man durch Annahme eines dieser N. W. für den wirklichen des Kettenbruchs begeht, ist also, weil $\frac{W}{W'}$ zwischen je zwei benachbarten N. W. liegt, respective geringer, als die Differenzen

$$\text{(II.)}\quad \frac{1}{A'B'},\ \frac{1}{B'C'},\ \frac{1}{C'D'},\ \frac{1}{D'E'}\ \text{u. s. w.}$$

und wird um so unbedeutender, je weiter man fortschreitet, wie er z. B. für den 5ten N. W. des oben gegebenen Kettenbruches weniger, als $\frac{1}{265108}$ betragen muß.

In dem Vorhergehenden liegen folgende Sätze über die Kettenbrüche enthalten:

1) Die Näherungswerthe $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ ...... eines Kettenbruchs nehmen im Vergleich mit seinem wahren Werthe abwechselnd

ab und zu, und zwar sind die von ungerader Zahl immer kleiner, die von gerader Zahl aber größer, als jener Werth.

2) Jeder Näherungswerth weicht von dem vollständigen Werthe eines Kettenbruchs um weniger ab, als ein Bruch, der 1 zum Zähler und das Product seines Nenners mit dem des folgenden N. W. zum Nenner hat.

3) Die Differenzen der successiven Näherungswerthe eines Kettenbruchs bilden eine Reihe fortwährend abnehmender ächter Brüche. Denn da (nach §. 208.) $C' > A'$, $E' > B'$, $E' > C'$ u. s. f., so folgt, daß in (II.) $A'B' < B'C'$; $B'C' < C'D'$ u. s. w.

4) Jeder Näherungswerth $\frac{N}{N'}$ kommt dem vollständigen Werthe des Kettenbruches näher, als irgend ein anderer Bruch $\frac{Q}{Q'}$ von kleinerem Nenner, der zwischen ihm und dem vorhergehenden N. W. $\frac{M}{M'}$ liegen könnte.

Denn angenommen, es gäbe irgend einen Bruch $\frac{Q}{Q'}$ der bezeichneten Art, so wäre

$$\frac{M}{M'} - \frac{Q}{Q'} < \frac{M}{M'} - \frac{N}{N'}$$

folglich auch $\frac{MQ' - M'Q}{M'Q'} < \frac{MN' - M'N}{M'N'}$ d. i. $< \frac{1}{M'N'}$

und daher $(MQ' - M'Q)\,N' < Q'$.

Dieses ist aber unmöglich, da $N' > Q'$ vorausgesetzt wurde, der Factor von N' aber auch nicht $= 0$ sein kann, weil in diesem Falle gegen die Voraussetzung $\frac{Q}{Q'} = \frac{M}{M'}$ sein würde.

5) Folglich ist jeder Näherungswerth eines Kettenbruchs von dessen wahren Werthe um weniger verschieden, als irgend ein durch kleinere Zahlen ausgedrückter Bruch.

§. 211. Näherungswerthe großer Brüche. Vermöge der im Vorstehenden entwickelten Sätze kann man jeden Bruch, der durch sehr große Zahlen ausgedrückt ist, in einer Reihe einfacherer Brüche genähert darstellen, indem man (§. 207.) die Nenner eines Kettenbruchs durch fortgesetzte Division sucht, und (nach §. 208.) die successiven N. Werthe desselben bestimmt, deren Genauigkeit endlich aus dem Producte ihrer Nenner (nach §. 210.) leicht ermessen werden kann. Sei z. B. das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser $\frac{W}{W'} = \frac{31415926535\ldots}{10000000000\ldots}$ zur Vereinfachung des Ausdrucks gegeben, so ist der Kettenbruch

$$\frac{W}{W'} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + 1 \text{ ꝛc.}}}}}$$

also die Reihe seiner Näherungswerthe

$$(a)\ \frac{3}{1},\ (b)\ \frac{22}{7},\ (c)\ \frac{333}{106},\ (d)\ \frac{355}{113},\ (e)\ \frac{103993}{33102}\ \text{u. s. w.}$$

und endlich die Reihe der Differenzen dieser N. W. oder der Fehlergränzen, die ihre größtmöglichste Abweichung vom wahren Werthe des Kettenbruchs bezeichnen:

$$\frac{1}{A'\,B'} = \frac{1}{7},\ \frac{1}{B'\,C'} = \frac{1}{742},\ \frac{1}{C'\,D'} = \frac{1}{11978},\ \frac{1}{D'\,E'}$$
$$= \frac{1}{3740526}.$$

Aufg. 27—30, §. 216.

III. Die unbestimmten Gleichungen.

§. 212. Einfache unbestimmte Gleichungen. Die einfachen unbestimmten Gleichungen, worin die Unbekannten sämmtlich in der ersten Potenz vorkommen, fallen unter die allgemeine Form

$$Ax \pm By \pm Cz \pm \text{ꝛc.} = K,$$

und wenn sie nur zwei Unbekannte enthalten, unter die Form $Ax \pm By = K$. Hier werden unter A, B, K ganze Zahlen verstanden, von denen die beiden ersten keinen gemeinschaftlichen Factor f haben dürfen, wenn nicht K durch den nämlichen Factor divisibel ist, weil der gebrochene Werth $\left(\frac{K}{f}\right)$ die Forderung, für x und y nur correspondirende ganze Zahlen aufzufinden, ungereimt machen würde. Ist die Gleichung auf ihre einfachste Gestalt gebracht, z. B. $234x + 90y = 1950$ auf $39x + 15y = 325$, so müssen folglich A und B relative Primzahlen sein, wenn eine Auflösung in ganzen Zahlen möglich werden soll.

Ist $Ax - By = 0$, also $x = \frac{B}{A}y$, so erlaubt diese Gleichung eine unbegränzte Menge von Werthen für x und y, indem man für y jedes beliebige Vielfache von A substituiren darf, um ganze Zahlenwerthe für x zu erhalten. Ist ferner $A = 1$, so erhält die Gleichung die Form $x - By = K$ oder $x + By = K$, welche im ersten Falle eine unendliche Menge von Auflösungen gestattet, im zweiten Falle aber fordert, daß $K > B$ sei, und dann nur so viele Auflösungen

zuläßt, daß B mehrere Male in K enthalten ist. Sei z. B. $x + 7y = 29$, so sind die vier correspondirenden Werthe von x und y:

$$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$
$$x = 22,\ 15,\ 8,\ 1.$$

Obgleich auch der Werth 0 für die Unbekannten gestattet werden kann, so ist es doch zweckmäßiger, ihn bei der allgemeinen Untersuchung ganz auszuschließen, wie dieses im Folgenden durchgängig geschehen soll.

§. 213. Auflösung von Gleichungen mit zwei Unbekannten. Das einfachste und allgemeinste Verfahren, eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades mit zwei Unbekannten, also von der Form $Nx \pm N'y = K$ aufzulösen, besteht darin, daß man aus den Coefficienten von x und y einen Kettenbruch bildet und den letzten Näherungswerth $\frac{M}{M'}$ von seinem vollständigen Werthe $\frac{N}{N'}$ abzieht. Denn es ist (nach §. 209.) die Differenz

$$\frac{N}{N'} - \frac{M}{M'} = \frac{NM' - N'M}{N'M} = \frac{\pm 1}{N'M'}$$

und ihre Form nach Weglassung des Divisors mit der Gleichung $Nx - N'y = K$ vollkommen übereinstimmend, wenn man auf beiden Seiten durch $\pm K$ multiplicirt, und $\pm M'K = x$, $\pm MK = y$ setzt. Da aber die Unbekannten in der Regel mehrere Werthe zulassen und die Werthe $x = -M'K$ und $y = -MK$ als negative der Forderung nicht genügen, so muß man, um die vollständige Form ihrer Werthe zu erhalten, ein Vielfaches der gegenseitigen Coefficienten darin aufnehmen, und deshalb $x = N'f \pm M'K$ und $y = Nf \pm MK$ setzen. Dadurch wird die gegebene Gleichung $Nx - N'y = K$ verwandelt in die auflösende:

$$N(N'f \pm M'K) - N'(Nf \pm MK) = K,$$

welche eine begränzte oder auch unbegränzte Menge von Zahlen, die eine arithmetische Progression bilden, für x und y zu setzen gestattet.

Wäre hingegen die Form der gegebenen Gleichung $Nx + N'y = K$, so müßte das zweite Glied der obigen Differenz durch doppelte Minusbezeichnung positiv gemacht, und zugleich Nf oder N'f negativ gesetzt werden. Folgende Beispiele für beide verschiedene Fälle werden das Vorstehende näher erläutern.

1) $34x - 41y = 3.$

Hier ist $\frac{N}{N'} = \frac{34}{41} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6,}}}}$

also $\frac{M}{M'} = \frac{5}{6}$ und $NM' - N'M = 34 \times 6 - 41 \times 5 = -1$.

Daraus folgt, indem man mit $-K = -3$ multiplicirt:

$$34\,(-18) - 41\,(-15) = 3$$

oder vollständig durch Einführung von Nf und N'f:

$$34\,(41f - 18) - 41\,(34f - 15) = 3.$$

Setzt man hier f = 1, 2, 3, 4 . . . , so geht folgende unbegränzte Reihe correspondirender Zahlenwerthe hervor:

für f =	1	2	3	4	5	6	7	8	. . . .
x =	23	64	105	146	187	228	269	310	. . . .
y =	19	53	87	121	155	189	223	257	. . . .

$$2)\ 7x + 5y = 73.$$

Hier ist $\frac{N}{N'} = \frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$,

also $\frac{M}{M'} = \frac{3}{2}$ und $NM' - N'M = 7 \times 2 - 5 \times 3 = -1$.

Daraus folgt, indem man durch $-K = -73$ multiplicirt:

$$7\,(-146) - 5\,(-219) = +73$$

oder $7\,(-146) + 5\,(219) = 73$,

und wenn Nf und N'f hinzugefügt werden:

$$7\,(5f - 146) + 5\,(219 - 7f) = 73.$$

Die Form dieser auflösenden Gleichung gestattet nur zwei Werthe für f, nämlich 30 und 31, woraus $x = 4$, $y = 9$, und $x = 9$, $y = 2$ sich ergeben. Aufg. 31—36, §. 216.

§. 214. **Auflösung von Gleichungen mit drei Unbekannten.** Auch auf dreitheilige unbestimmte Gleichungen ist das vorstehende Verfahren anwendbar, wenn man die Gränzen der zulässigen Werthe für eine der Unbekannten zuvor bestimmt und nach Transposition derselben die Gleichung wie eine zweitheilige behandelt, indem man nach und nach die Reihe der zulässigen Werthe für jenes transponirte Glied substituirt. Sei allgemein die Gleichung: $Nx \pm N'y \pm N''z = K$, so wird sie unter der Gestalt $Nx \pm N'y = K \mp N''z = L$ dadurch auflösbar, daß man für z nach und nach bestimmte Zahlenwerthe an die Stelle setzt und die correspondirenden für x und y (nach §. 213.) zu bestimmen sucht. Sei z. B. die gegebene Gleichung:

$$5x + 8y + 7z = 50,$$

so erhält man den höchsten Werth von $z = 5$, indem man x und y möglichst gering, = 1 annimmt, da $z = \frac{1}{7}(50 - 5 - 8) = \frac{37}{7}$, weniger als 6 beträgt, folglich jeder höhere Werth als 5 für z gesetzt, einen negativen Werth von x oder y zur Folge haben und deshalb unzulässig sein würde.

Man entwickle nun $\frac{N}{N'} = \frac{5}{8}$ als Kettenbruch, so ist der letzte Näherungswerth $\frac{M}{M'} = \frac{2}{3}$, und $5.3 - 8.2 = -1$ oder $5(-3) + 8(+2) = +1$. Daraus ergiebt sich durch Multiplication mit L und Einführung von Nf, N'f, die auflösende Gleichung:

$$5(8f - 3L) + 8(2L - 5f) = L.$$

Die Werthe von L sind nun, indem man $z = 1 \ldots 5$ setzt, $L = 50 - 7z = 43, 36, 29, 22, 15$; doch erscheinen bei näherer Betrachtung die beiden letzten Werthe, $z = 4$ und 5, zur Auflösung nicht tauglich, so daß nur $z = 1, 2, 3$ oder $L = 43, 36, 29$ übrig bleiben, und hieraus ergeben sich die correspondirenden Zahlenwerthe:

$$z = 1 \,.\, 2 \,.\, 3.$$
$$y = 1 \,.\, 2 \,.\, 3.$$
$$x = 7 \,.\, 4 \,.\, 1.$$

Aufg. 37—40, §. 216.

§. 215. *Unbestimmte quadratische Gleichungen. Die allgemeinste Form einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten ist:

$$(1)\ Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ex^2 + K = 0$$

und der daraus gezogene Werth von y, in Function von x:

$$y = -\frac{Dx + B}{2E} \pm \frac{\sqrt{(Dx + B)^2 - 4E(K + Ax + Cx^2)}}{2E}$$

Es folgt daraus die Gleichung

$$(2)\ 2Ey + Dx + B = \sqrt{(Dx + B)^2 - 4E(K + Ax + Cx^2)}$$
$$= \sqrt{(D^2 - 4EC)x^2 + (2BD - 4AE)x + (B^2 - 4EK)}$$

oder kürzer $= \sqrt{Mx^2 + Nx + P}$.

Setzt man nun

$$(3)\ Mx^2 + Nx + P = z^2, \text{ so ist}$$
$$(4)\ 2Ey + Dx + B = \pm z.$$

Ferner giebt die Auflösung der Gleichung (3)

$$x = -\frac{N}{2M} \pm \frac{\sqrt{N^2 - 4MP + 4Mz^2}}{2M}$$

oder

$$(5)\ 2Mx + N = \pm\sqrt{4Mz^2 + (N^2 - 4MP)}$$

und kürzer angedeutet $= \sqrt{Fz^2 + G}$.

Kann man nun z so bestimmen, daß $Fz^2 + G$ Quadrat einer ganzen Zahl ($= u^2$ wird, so hat man die auflösenden Gleichungen:

$$(6)\ 2Mx + N = u, \text{ oder } x = \frac{u - N}{2M};$$

$$(7)\ 2Ey + Dx + B = z, \text{ oder } y = \frac{z - (Dx + B)}{2E}.$$

Abgesehen von der Schwierigkeit der geforderten Bestimmung von z würde der im Vorstehenden bezeichnete Weg einer allgemeinen Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen für eine Menge einfacher Formen derselben viel zu weitläufig sein, weshalb für jeden besondern Fall der gegebenen Form angemessene Mittel zur Lösung aufzusuchen sind, wofür sich nicht füglich allgemeine Regeln geben lassen. Ein Beispiel solcher Behandlungsweise gewährt folgende Aufgabe:

Zwei Quadrate zu finden, deren Unterschied oder Summe einem doppelten Quadrate gleich sei.

I. Es sei $x^2 - y^2 = 2z^2$ oder $x^2 = y^2 + 2z^2$, so setze man $y^2 + 2z^2 = (y - az)^2 = y^2 - 2ayz + a^2z^2$, also $2z = -2ay + a^2z$ oder $z(a^2 - 2) = 2ay$, woraus sich $z = \frac{2ay}{a^2 - 2}$ ergiebt.

Um ganze Zahlen für x und y zu erhalten, setze man $y = a^2 - 2$, folglich $z = 2a$, und für a beliebige Werthe > 1. Man findet auf diese Weise

für $a =$	2,	3,	4,	5,	6	....
$y =$	2	7	14	23	34	....
$z =$	4	6	8	10	12	....
$x =$	6	11	18	27	38	....

II. Es sei $x^2 + y^2 = 2z^2$ oder $x^2 = 2z^2 - y^2 = z^2 + (z + y)(z - y)$, so setze man $z^2 + (z + y)(z - y) = (z + a(z - y))^2$ oder $= z^2 + 2az(z - y) + a^2(z - y)^2$, also

$z + y = 2az + a^2(z - y)$ oder $z(1 - 2a - a^2) = -(1 + a^2)y$

woraus $z = \frac{(1 + a^2)y}{a^2 + 2a - 1}$ folgt. Um ganze Zahlen für z und y zu bekommen, setze man $y = a^2 + 2a - 1$, folglich $z = 1 + a^2$ und für a beliebige Werthe. Dadurch findet man:

für $a =$	1,	2,	3,	4,	5	....
$y =$	2	7	14	23	34	....
$z =$	2	5	10	17	26	....
$x =$	2	1	2	7	14	....

§. 216. Aufgaben.

I. Ueber die Theilbarkeit der Zahlen.

1. Durch welche Zahlen von 1 bis 9 ist 443420 theilbar?
2. Eben so 4536, 1275402, 22549284, 25067?
3. Ohne unmittelbare Division die Theilbarkeit von 2289576 durch 19 zu prüfen.
4. Eben so die Theilbarkeit von 10152031 durch 13.
5. Man untersuche die Theilbarkeit des Products der Zahlen $86422 \times 339084 \times 793666$ durch 48.
6. Eben so von $4701 \times 3355 \times 707$ durch 231.
7. Eben so von $175406 \times 43278 \times 7998$ durch 7.

8. Durch welche Zahlen ist 26^8 theilbar?
9. Eben so 7^6, 9^3, 33^4, 35^2.
10. Ist $(13940)^3$ durch 125 theilbar?
11. Welche Potenzen von 1798 sind durch 64 theilbar?
12. Die Zahl 365404 in ihre Primfactoren zu zerlegen.
13. Durch welche Zahlen ist 360 theilbar?
14. Eben so 231, 900, 1110, 1027, 1170, 151?
15. Wie viel Theiler hat die Zahl $2^8 . 3^4 . 5^2 . 7^5$?
16. Eben so die Zahl 17280000?
17. Man suche die Reste der Producte $1 . 17$, $2 . 17$, $3 . 17 \ldots 8 . 17$ bei der Division durch 9.
18. Eben so die Reste von $1 . 25$, $2 . 25$, $3 . 25 \ldots 7 . 25$ bei der Division durch 8.
19. Durch welche Zahl ist $(10003)^4 - 1$ theilbar?
20. Man multiplicire die gegen 14 relativen Primzahlen 3, 5, 9, 11, 13 durch die ebenfalls relative Primzahl 15, und suche die Reste bei der Division jener Producte durch 14.

II. Ueber die Kettenbrüche.

21. Den Bruch $\frac{5171}{30444}$ in einen Kettenbruch umzuformen.
22. Eben so $\frac{314}{419}$, $\frac{49}{22}$, $\frac{634}{215}$, $\frac{573063}{11203}$.
23. Die Näherungswerthe des K. B. aus (21) aufzusuchen.
24. Eben so der Kettenbrüche aus (22).
25. Eben so die Differenz der Näherungswerthe aus (21).
26. Eben so die Differenz der N. W. aus (22).
27. Den Bruch $\frac{22346581}{51034788}$ in einfacheren Zahlen näherungsweise auszudrücken.
28. An einem durchsichtigen Körper ist der Sinus des Einfallswinkels $= 0{,}8476531$, der Sinus des Brechungswinkels $= 0{,}7016324$ gefunden. In welchen genäherten Werthen läßt sich das Brechungsverhältniß ausdrücken?
29. Ein Maßstab A übertrifft einen andern B um 7 Zoll 5 Linien; also ist $A = B + \frac{89}{144}$, oder $144\,A = 144\,B + 89$, oder es müßten nach 144maligem Abtragen beider Maße jedesmal 89 Fuß eingeschaltet werden, um ein Vielfaches von A zu geben. Wie ist diese Einschaltung in kleineren Zahlen auszuführen, wenn sie näherungsweise geschehen soll?
30. Die Dauer des wahren (tropischen) Jahres, d. h. des vollständigen Umlaufs der Erde um die Sonne, beträgt 365 T. 5 St. 48′ 49″, mithin 5 St. 48′ 49″ mehr, als die Dauer des bürgerlichen Jahren. Wie viele Tage und nach wie vielen Jahren

müssen nun eingeschaltet werden, um diese Verschiedenheit wieder auszugleichen?

III. Zur Auflösung unbestimmter Gleichungen.

31. Welche Zahlen sind von der zwiefachen Form 17x und 14y?
32. Welche von der Form 24x + 7 und 11y — 4?
33. Welche Zahlen lassen, durch 16 und 19 dividirt, der Reihe nach die Reste 4 und 7?
34. Welche Zahlen entsprechen der Gleichung 23w + 100 = 14z — 29?
35. Die Zahl 1763 in zwei andere zu zerlegen, so daß die eine durch 27, die andere durch 31 theilbar sei.
36. Eben so 5430 in zwei Zahlen, theilbar durch 15 und 42.
37. Welche Zahlen lassen, durch 5, 9 und 11 dividirt, der Reihe nach die Reste 3, 5 und 9?
38. Welche, durch 3, 4, 5, 6 dividirt, der Reihe nach die Reste 2, 3, 4, 5?
39. Die Zahl 52 in drei andere zu zerlegen, so daß, wenn die erste mit 5, die zweite mit 17, die dritte mit 24 multiplicirt wird, die Summe der drei Producte = 418 sei.
40. Eben so 100 in vier Theile v, x, y, z zu zerlegen, so daß 11v + 7x + 15y + 25z = 1110 sei.
41. Es werden zweierlei Kanonen zu 16 und zu 25 Centner gegossen, und man bedarf zu der ersten Art einen Centner mehr, als zu der andern. Wie viel gießt man demnach von beiden?
42. Durch welche Ziffer muß man die Stelle von x in der Zahl 439x543 ausfüllen, um sie durch 7 theilbar zu machen?
43. Jemand hat 76 Bäume: Eichen, Buchen, Tannen und Birken, zu den Preisen von 20, $10\frac{1}{2}$, 7 und 4 Thalern gekauft und für alle 707 Thaler bezahlt. Wie viele Bäume jeder Art mögen darunter sein?
44. Eine gewisse Strecke wird von 4′ langen Wellen, eine 15′ kürzere Strecke von 7′ langen Wellen, (in stehender Schwingung) erfüllt. Jene Strecke und die Anzahl der Wellen beider Art zu bestimmen.
45. Die Atommengen drei chemischer Stoffe A, B, C mögen sich verhalten, wie die Zahlen 8, 23, 31. Wie viele von jedem können in einer Mischung enthalten sein, worin die Summe der Atomzahlen = 727 ist?
46. Die Seiten eines Rechtecks in ganzen Zahlen anzugeben, wenn durch die nämliche Zahl sein Flächeninhalt und das Dreifache seines Umfangs ausgedrückt wird.
47. Die Seite eines Quadrats sei = 7; sein Umfang verhalte sich zu dem eines Rechtecks, wie die Flächenräume beider Figuren. Das Rechteck zu bestimmen.

48. Die Kante eines Cubus sei $= 11$; seine Oberfläche verhalte sich zu der eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit quadrat. Basis, wie die Körperräume beider. Man bestimme die Seiten des Parallelepipedons.

49. Ein Cylinder sei an Inhalt einer Kugel gleich, deren Radius $= 9$ ist. Durchmesser und Höhe des Cylinders in ganzen Zahlen aufzufinden.

50. Eines Cylinders Oberfläche sei der einer Kugel vom Durchmesser $2a$ gleich. Durchmesser und Höhe desselben in ganzen Zahlen anzugeben.

Zweite Abtheilung.

Geometrie.

Erstes Buch.

Die Geometrie der Ebene.

§. 217. **Raum.** Die Vorstellung eines nach allen Seiten unendlich ausgedehnten Raumes macht sich mit derselben Nothwendigkeit geltend, wohin wir uns auch im Gedanken versetzen mögen. Ueberall ist von dem gewählten Standpunkte eine Bewegung nach oben oder unten, zur Rechten oder Linken, vor- oder rückwärts und zwischen diesen sogenannten Hauptrichtungen nach unzähligen Zwischenrichtungen möglich. Alle Vorstellungen von Gegenständen, die im Bereiche der sinnlichen Wahrnehmung wirklich vorhanden oder auch nur möglich sind, beruhen auf jener ursprünglichen des Raumes, die so wenig, als die der Größe überhaupt, sich auf einfachere Begriffe zurückführen läßt, aber die Merkmale von Gleichartigkeit, Stetigkeit und unbegränzter Ausdehnung in sich schließt.

§. 218. **Raumformen.** Da die Gegenstände der sinnlichen Anschauung, aus welchem Stoffe sie übrigens auch gebildet sein mögen, mit dem gemeinschaftlichen Namen Körper bezeichnet werden, so darf man diese allgemeine Benennung vorzugsweise auf die Gestalt alles Raumerfüllenden beziehen und darunter irgend einen abgeschlossenen, d. h. ringsum begränzten, Theil des Raumes verstehen. In einem solchen wiederholen sich die obengenannten Hauptrichtungen (Dimensionen) unter dem Namen der Länge, Breite und Höhe des Körpers. Als Begränzung desselben gegen den ihn umgebenden Raum und daher nur mit den beiden Ausdehnungen der Länge und Breite erscheint seine Oberfläche, die man sich im Allgemeinen (wie z. B. bei dem Würfel) aus einzelnen Flächen als Bestandtheilen zusammengesetzt denken kann. Jede ringsum begränzte Fläche wird ihrerseits wieder von Linien eingeschlossen, denen

nur eine der beiden Flächendimensionen, die Länge, geblieben ist. Die Linie endlich findet ihre Gränze in dem Punkte, der keine Ausdehnung mehr haben kann und sich folglich als etwas Einfaches und Untheilbares, aller weiteren räumlichen Betrachtung entzieht. Es ergeben sich demnach Körper, Flächen und Linien, als die drei einzig möglichen Raumformen, unter denen irgend ein begränztes Ausgedehntes im Raum gedacht werden kann.

§. 219. Bildung der Raumformen. Soll die Vorstellung bestimmter Raumformen (z. B. der Kugel oder des Würfels) nicht blos als etwas Gegebenes aufgenommen, sondern vielmehr selbstthätig von der Einbildungskraft erzeugt werden, so muß sie von derjenigen des Punktes ausgehen und durch dessen Fortschreiten im Raume anfangs Linien, dann ebenso aus diesen Linien Flächen und endlich aus diesen körperliche Gestalten entstehen lassen oder construiren. Dergleichen Constructionen, wie verwickelt sie auch erscheinen mögen, lassen sich stets auf die einfachen, unmittelbaren Vorstellungen einer fortschreitenden und einer drehenden Bewegung zurückführen, die man daher als Grundconstructionen der Geometrie bezeichnen darf. Da nun als Größe des Fortschritts eines Punktes die Linie, als Größe der Drehung einer Linie der Winkel hervorgeht, so wird man zunächst zur Betrachtung dieser beiden Grundgebilde veranlaßt, durch deren Verbindung überhaupt geschlossene Gebilde oder Figuren entstehen. Die Geometrie, als Wissenschaft der räumlichen Construction, wird demnach von den einfachsten Liniengebilden ausgehen und durch deren Verknüpfung und Erweiterung zu immer ausgedehnteren und beziehungsreicheren, den Raumfiguren, fortschreiten müssen. Die einfachste aller Linien aber ist die Gerade, so wie die einfachste aller denkbaren Flächen die Ebene, so daß mit den, in einer Ebene liegenden geraden Linien die Untersuchung nothwendig beginnen muß, woraus sich dann die Trennung der Wissenschaft in die Geometrie der Ebene und diejenige des Raumes überhaupt als eine, dem Gegenstande ihrer Betrachtungen durchaus angemessene, ergiebt.

§. 220. Vergleichung der Raumformen. Die Grundbedingung jeder Vergleichung von Größen, daß das Verglichene gleichartig sei, erlaubt in Absicht der Raumformen nur eine Vergleichung von Körpern mit Körpern, von Flächen mit Flächen und endlich von Linien mit Linien, nie aber eine solche, wobei die Raumformen eine verschiedene Anzahl von Dimensionen besitzen. Bezeichnet man nun allgemein bestimmte gleichartige und mit einander zu vergleichende Gebilde durch **A**, **B**, **C**, **D** . . . ., so sind unter denselben folgende Arten von Uebereinstimmung denkbar:

1) **A** und **B** können gleich groß oder von gleichem räumlichen Inhalte, wenn auch an Gestalt verschieden, sein (wie sich z. B.

eine Kugel denken läßt, die einem Würfel von gegebener Größe an Inhalt gleich sei). Die Andeutung für diesen Fall ist die allgemeine der Gleichheit: A = B.

2) A und C können von der nämlichen Gestalt, wenn gleich dem räumlichen Inhalte nach verschieden sein (wie etwa zwei Kreise von verschiedener Größe). In diesem Falle werden beide Gebilde einander ähnlich genannt und man wendet dafür die Bezeichnung A ∾ B an. Offenbar ist aber der Begriff der Aehnlichkeit, als einer Uebereinstimmung der Gestalt, nicht ein unmittelbar gegebener, sondern erst durch die Betrachtung seiner Merkmale genauer zu bestimmen.

3) A und D können zugleich an Größe und Gestalt übereinstimmen, also einander durchaus gleich sein (wie etwa zwei Kugeln von gleichem Inhalte). Nach dieser Vorstellung lassen beide sich zu einem einzigen Gebilde in einander gelegt denken und werden congruent genannt. Die Andeutung einer solchen völligen Gleichheit in Absicht auf Gestalt und Größe oder Congruenz ist A ≌ D.

Es ergeben sich hieraus für die geometrischen Untersuchungen drei verschiedene Richtungen, nämlich: die Betrachtung der absoluten Gleichheit zweier Gebilde, die der Gleichheit der Gestalt und endlich die der Gleichheit der Größe, oder mit anderen Worten: die Betrachtungen über Congruenz, Aehnlichkeit und Inhaltsbestimmung.

Die räumlichen Gestalten bieten uns endlich aber noch eine vierte Beziehung dar, wenn wir auf die Lage ihrer einzelnen Theile Rücksicht nehmen. Sind diese Theile nämlich in zwei Gebilden paarweise einander gleich und in derselben Reihenfolge, aber in entgegengesetzter Lage geordnet (wie dies z. B. bei der rechten und linken Hand, oder bei den beiden Hälften einer völlig regelmäßigen Hausfronte der Fall ist), so werden die Gebilde symmetrisch genannt.

§. 221. Geometrische Beweisführung. Da jedes räumliche Gebilde in einer sichtbaren Darstellung (durch Zeichnung oder Modell) nur als ein einzelnes erscheint, statt dessen eben sowohl unzählige andere (an Gestalt oder an Größe verschiedene) möglich wären, so ist jene Darstellung so zu behandeln, wie es mit jeder, den vorgestellten Bedingungen entsprechenden, andern auf gleiche Weise geschehen könnte. Dadurch aber erhält die gewählte besondere Darstellung die Bedeutung einer beliebigen von der vorausgesetzten Beschaffenheit, und erscheint in sofern als völlig allgemeine Darstellung des betrachteten Falles. Soll nun an ihr der Beweis für bestimmte geometrische Lehren geführt werden, so geschieht dieses:

1) direct, indem man durch logisch richtige Folgerungen aus

der (nie zu bestreitenden) Voraussetzung und aus Wahrheiten, welche an sich einleuchtend oder bereits anderweitig erwiesen sind, die Nothwendigkeit des Behaupteten darthut;

2) indirect, indem man das Gegentheil des Behaupteten vorläufig als möglich annimmt, dann aber nachweist, daß die daraus mit Nothwendigkeit sich ergebenden Folgerungen entweder der Voraussetzung oder andern unbestreitbaren Wahrheiten widersprechen, denn in beiden Fällen erscheint die Behauptung des Gegentheils unzulässig, und deshalb die des aufgestellten Satzes als die allein gültige.

Zu beiden Arten von Beweisen gebraucht die Geomotrie außer den, für Größen jeder Art geltenden, Axiomen (§. 6.) einerseits das ihr eigenthümliche Mittel geeigneter Hülfsconstructionen zu geschickter Verbindung oder Zerlegung der gegebenen Gebilde andererseits aber auch die Resultate, welche die Operationen der Arithmetik gewähren, sofern man diese als allgemeine Größenlehre betrachtet, welche hier auf die besondere Vorstellung räumlicher Größen bezogen wird.

Erstes Capitel.

Die Linien und Winkel.

§. 222. Erzeugung der Linien. (Fig 1.) Unter allen denkbaren Bewegungen eines Punktes A ist die einfachste die in gerader Linie AA'. Es ist unmöglich, von einer solchen eine Erklärung zu geben, wodurch ihr Begriff auf einfachere Vorstellungen zurückgeführt würde, da sie (nach §. 219.) zu den unmittelbar gegebenen Grundvorstellungen der Geometrie gehört. Jede andere Linie, die weder selbst gerade, noch aus geraden zusammengesetzt ist, heißt krumm. Offenbar können Linien solcher Art in unzähliger Menge entstehen, indem ein Punkt a des Raumes nach einem andern stetig fortschreitet (Fig 2.). Findet dieser Fortschritt des Punktes in einer Fläche statt, so kann dieselbe entweder eben oder gekrümmt sein. Eine ebene ist sie, wenn jede gerade Verbindungslinie zwei beliebig in ihr gewählter Punkte vollständig mit ihr zusammenfällt; eine gekrümmte Fläche dagegen, wenn dieses nicht durchgängig der Fall ist. Die Geometrie der Ebene setzt — wie ihr Name sagt — alle Linien, nebst ihren Verbindungen in ebener Fläche voraus.

§. 223. Sätze über die gerade Linie. In der ursprüng-

lichen Vorstellung der geraden Linie liegen zugleich folgende Eigenschaften derselben:

1. Durch jeden Punkt C einer Ebene sind in derselben unzählig viele Gerade möglich; oder um jeden Punkt C giebt es unzählige verschiedene Richtungen.

2. Ist außer C noch ein zweiter Punkt A gegeben, so ist durch beide nur eine Gerade zu legen möglich; oder: zwei Punkte C, A bestimmen die Richtung einer geraden Linie.

3. Jede von zwei Punkten begränzte Gerade kann über diese Gränzpunkte hinaus ins Unendliche verlängert werden.

4. Die Gerade ist unter allen Linien zwischen zwei Punkten die kürzeste und daher das Maaß ihres Abstandes von einander; oder: zwei feste Punkte A, C bestimmen die Größe der geraden Verbindungslinie.

5. Zwei Gerade können einander nur in einem Punkte durchschneiden.

Anmerkung. Zur Construction der Richtung einer Geraden dient das Lineal, zur Construction ihrer Größe der Zirkel. [Aufg. 1—2, §. 234.]

§. 224. Bildung gerader Linien aus einander. Eine von zwei gegebenen Punkten begränzte Gerade, welche in Absicht ihrer Größe durch G angedeutet werden mag, kann nach den Grundvorstellungen der allgemeinen Größenlehre (§. 9—14.) aus anderen Geraden auf vierfache Weise gebildet werden. Es ist nämlich:

1. G eine Summe zweier Geraden A, B (also $G = A + B$), wenn man, einen der beiden Gränzpunkte von A zu ihrem Anfangspunkte wählend und die Gerade über den Endpunkt hinaus unbestimmt verlängernd, die andere B von diesem Punkte aus auf der Verlängerung abträgt. Sind der zu verbindenden Geraden mehre, z. B. A, B, C, D . . . gegeben, so ist die Folge, in welcher man sie zusammenfügt, in Ansehung der Summe gleichgültig. (§. 9.)

2. G eine Differenz zweier Geraden A, B (also $G = A - B$), wenn man von dem Endpunkte der größeren Linie A nach ihrem Anfangspunkte hin die kleinere B abträgt und dadurch von jener abzieht. In sofern G hiebei übrig bleibt, kann man sie Rest der Geraden A, B nennen.

3. G ein Product der Geraden A und einer ganzen Zahl m, (also $G = A . m$), wenn sie durch mmal wiederholtes Abtragen von A auf einer Geraden von unbestimmter Länge entstanden ist. Die Linie A ist hiebei (nach §. 11.) als Multiplicand, die Zahl m als Multiplicator, die Vervielfältigung von A als eine (geometrische) Multiplication zu betrachten. Wären der Multiplicatoren mehre gegeben, z. B. m, n, p, q, so würde die Vervielfachung allmählig, jedoch (nach §. 12.) in beliebiger Folge jener Zahlen oder auch auf einmal, nämlich durch $(m \times n \times p \times q)$faches Abtragen von A vorzunehmen sein.

4. G ein Quotient der Geraden A und einer ganzen Zahl m (also $G = A : m$), wenn man A in m gleiche Theile zerlegt und einen derselben nimmt. Die Linie A ist alsdann Dividend, m aber Divisor zu nennen und die Division als Theilung (§. 14.) zu betrachten. Wären der Divisoren mehre, z. B. m, n, p, q gegeben, so würde die Theilung von A entweder allmählig, oder auch auf einmal, nämlich durch Theilung in $(m \times n \times p \times q)$ gleiche Theile, vorgenommen werden können.

Anmerkung. Die Theilung einer Geraden in eine vorgeschriebene Menge gleicher Theile muß vorläufig versuchsweise geschehen, bis spätere Betrachtungen über die Congruenz und die Aehnlichkeit der Figuren directe Theilungsmethoden an die Hand geben. [Aufg. 3—6, §. 234.]

§. 225. Messung gerader Linien. Um die Länge einer begränzten Geraden A zu bestimmen, muß man eine andere B zu ihrem Maaße oder zur Längen-Einheit wählen, und diese wiederholt auf ihr abtragen. Die Angabe m, wie oft das Maaß in der gegebenen Graden enthalten sei, ist dann der Zahlenwerth derselben. Der Werth einer geraden Linie wird durch eine ganze Zahl ausgedrückt, wenn das gewählte Maaß, ohne einen Rest zu lassen, wiederholt in derselben abgetragen werden kann; bleibt hingegen ein Stück A' der Geraden A übrig, so ist eine Theilung des Maßes B in kleinere Theile nöthig, um mit diesen die Messung des Restes vorzunehmen, und man erhält als Werth desselben eine gebrochene Zahl. Wird eine gerade Linie durch verschiedene Maße B, C, D . . . gemessen, so ändern sich nothwendig die Angaben ihrer Länge, wonach der Zahlenwerth einer Linie nur dann Bedeutung hat, wenn daß Maß, worauf er sich bezieht, als gegeben anzusehen ist.

Um das größte gemeinschaftliche Maß zweier Geraden A und B (Fig. 1.) zu finden, messe man die größere B durch die kleinere A, diese durch den Rest B' der ersten, dann B' durch den entstehenden Rest A' der zweiten u. s. f. immer das frühere Maß mit dem Reste des Gemessenen, bis kein Stück mehr übrig bleibt.

Sei die Gerade A in der größeren B z. B. 2mal abgetragen, und nach 3maligem Abtragen von B' auf A noch der Rest A' geblieben, dieser aber in B' genau 4mal enthalten, so hat man folgende Gleichungen:

(1) $B' = 4 . A'$.

(2) $A = 3 . B' + A' = 3 . 4A' + A' = 13 . A'$.

(3) $B = 2 . A + B' = 2 . 13A' + 4A' = 30 . A'$.

Demnach enthalten die Linien A und B das nämliche Maß, jene 13, diese 30mal. Zugleich muß A' für beide das größte gemeinschaftliche Maß sein: denn angenommen, es gebe eine solche Linie $C > A'$, so müßte C in A und B, also nach (3) auch in B', und nach (2) oder (1) auch in A', d. h. es müßte eine größere Linie in

einer kleineren enthalten sein, welches unmöglich ist. Zwei Linien, die ein gemeinschaftliches Maaß haben, oder durch eine dritte sich ohne Rest messen lassen, heißen commensurabel. (Aufg. 7—9, §. 234.)

§. 226. Incommensurable Linien. Wenn bei solchem wiederholten Messen kein Rest gefunden werden kann, der für beide Linien **A** und **B** gemeinschaftliches Maaß wäre, so nennt man dieselben incommensurabel. In diesem Falle muß man sich begnügen, die Länge der Linie **B** durch hinlänglich kleine Theile von **A** zu bestimmen, und diese Theilung von **A** kann (wenigstens in der Vorstellung) so weit getrieben werden, daß der vernachlässigte Rest von **B** kleiner, als irgend eine gegebene Länge sei. Nennen wir einen dieser Bedingung genügenden kleinen Theil **k**, und finden, daß derselbe mehr als **m** und weniger als $(m + 1)$mal in **B** enthalten sei, so reicht es hin, die Länge der incommensurabeln Linie **B** näherungsweise $= m . k$ zu setzen, obgleich sie $> m . k$ und $< (m + 1) k$ ist.

§. 227. Messung krummer Linien. Soll die Länge einer krummen Linie in Beziehung auf eine gerade angegeben werden, so kann dieses im Allgemeinen nur näherungsweise dadurch geschehen, daß man eine aus mehreren geraden Stücken bestehende oder gebrochene Linie, die in vielen Punkten mit der krummen zusammenfällt, statt dieser mißt. Denkt man sich z. B. in einer krummen Linie **K** (Fig. 2.), deren zwischen den Punkten **a** und **d** enthaltenes Stück gemessen werden soll, einen Punkt **c** desselben gewählt und durch gerade Linien mit **a** und **d** verbunden, so entsteht die gebrochene Linie **acd**, welche man der krummen eingeschrieben nennt. Da nun die gerade Linie zwischen **a** und **c** oder **c** und **d**, als die kürzeste Verbindungslinie nothwendig kleiner ist, als das zwischenliegende Stück der krummen, so kann die eingeschriebene, gebrochene Linie nie so groß sein, als diese, wie viele Zwischenpunkte **b**, **c** . . . man auch auf derselben annehmen möge. Aber mit der wachsenden Anzahl solcher Punkte nähert sich die eingeschriebene augenscheinlich immer mehr der krummen Linie, so daß diese vermöge jener wenigstens näherungsweise zu bestimmen sein wird. Denkt man sich die krumme Linie **abcd** oder **K** zwischen zwei gebrochene Linien **G** und **L** enthalten, welche nur um eine (wegen ihrer Kleinheit zu vernachlässigende) Länge **p** verschieden sein mögen, und dabei $< L$, so ist, wenn $G = m . p$, $L = (m + 1)p$, der Werth von $K = m . p$ zu setzen, d. h. die Länge der inneren gebrochenen Linie annähernd als die der krummen anzunehmen. (Aufg. 10.)

§. 228. Kreislinie. Die einfachste aller krummen Linien entsteht dadurch, daß eine Gerade von bestimmter Länge **CB** (Fig. 3.) um ihren einen unbeweglichen Endpunkt **C** in einer Ebene so lange

sich dreht, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage zurückgelangt, wodurch der andere Endpunkt **B** in stets gleichem Abstande von dem ruhenden die Kreislinie beschreibt. Sie ist also unter den krummen Linien diejenige, die in allen ihren Punkten von einem innerhalb liegenden Mittelpunkte oder Centrum **C** gleichweit, nämlich um die Länge einer Geraden **CB**, oder des Radius, entfernt ist. Jeder von zwei Punkten begränzte Theil der Kreislinie wird ein Bogen, und eine diese Punkte verbindende Gerade **AB** Sehne genannt. Die Sehne **AB** wird dadurch im Kreise abgetragen, daß man aus irgend einem Punkte **F** des Umfangs mit **AB**, als Radius, einen Bogen beschreibt, der den Umfang in einem andern Punkte **G** durchschneidet, und **G** mit **F** durch eine Gerade verbindet.
(Aufg. 11—14, §. 234.)

§. 229. Winkel. (Fig. 3.) Eine um ihren unbeweglichen Anfangspunkt **C** in einer Ebene gedrehete Gerade **CB** wird während ihrer Umdrehung allmählig sämmtliche Richtungen durchlaufen, welche in der Ebene um den Punkt **C** überhaupt möglich sind. Als Größe der Drehung, durch welche sie aus einer anfänglichen Richtung **CB** in eine andere **CA** stetig übergeht, entsteht hiebei der Winkel. Die beiden Gränzlinien des Winkels, **CA** und **CB**, heißen die Schenkel und der Punkt **C**, von welchem sie ausgehen, der Scheitel desselben. Man benennt ihn vermöge der an seinen Schenkeln stehenden Buchstaben so, das derjenige, welcher den Scheitel bezeichnet, in die Mitte zu stehen kommt, also **ACB** und **BCA**. In Absicht der Verschiedenheit der Winkel sind folgende Erklärungen zu merken.

1. Durch Verlängerung eines Schenkels **CB** des gegebenen Winkels über seinen Scheitel hinaus entsteht ein zweiter Winkel **ACG**, welcher Nebenwinkel von **ACB** genannt wird. Da aber **CB** ebenfalls als Verlängerung von **CG** erscheint, so ist zugleich **ACB** Nebenwinkel von **ACG**.

2. Zwei einander gleiche Nebenwinkel, wie **DCB** und **DCG**, heißen rechte Winkel und ihr gemeinschaftlicher Schenkel **DC** in Beziehung auf die Gerade **BG** senkrecht oder perpendiculär.

3. Ein Winkel **ACB**, welcher kleiner ist, als ein rechter, wird ein spitzer, ein solcher hingegen, welcher größer ist, z. B. **ACG** wird ein stumpfer genannt.

4. Ein Winkel **ACD**, der einen spitzen zu einem rechten ergänzt, heißt Complementwinkel von **ACB**; ein Winkel **ACG**, der einen andern **ACB** zu zwei rechten ergänzt, Supplementwinkel desselben.

5. Durch den Uebergang des drehenden Schenkels **CA** in die

Verlängerung des unbeweglichen CB entsteht der flache oder gestreckte Winkel BCG.

6. Durch fortgesetzte Drehung des beweglichen Schenkels bildet derselbe mit dem andern überstumpfe Winkel, wie z. B. BCF, welche auch erhabene genannt werden, um sie von dem in (3) bezeichneten sogenannten hohlen Winkeln zu unterscheiden.

7. Der Winkel FCG, welcher durch Verlängerung beider Schenkel eines gegebenen Winkels ACB über dessen Scheitel hinaus gebildet wird, heißt Vertical- oder Scheitelwinkel von ACB, sowie dieser umgekehrt Scheitelwinkel von FCG.

8. Zwei Gerade, AC und BC, welche in irgend einem Punkte C zusammentreffen und an demselben einen Winkel ACB bilden, werden Convergenten genannt.

9. Zwei Gerade, AC und MN, welche, unendlich verlängert, in keinem Punkte zusammentreffen und folglich keinen Winkel bilden können, heißen Parallelen.

10. Die von zwei Parallelen, AF und MN, und einer sie schneidenden Geraden CD gebildeten Winkel ACD und CDN werden Wechselwinkel genannt.

§. 230. Winkelmessung. Der Winkel, als Größe der stetigen Drehung einer Geraden, bleibt nothwendig ungeändert, von welcher Länge man auch seine Schenkel annehmen möge, die im Allgemeinen hinsichtlich ihrer Größe als völlig unbestimmt zu denken sind. Werde nun mit einer Geraden von der bestimmten Länge CB der Winkel BCD (Fig 4.) beschrieben, so kann man sich eine Vervielfachung desselben durch fortgesetzte Drehung von CD vorstellen, wodurch ein größerer Winkel BCA entsteht, der ein Vielfaches des anfänglichen ist. Während dieser Drehung des beweglichen Schenkels hat aber der Endpunkt desselben (nach §. 228.) eine Kreislinie beschrieben, deren sämmtliche Punkte in gleichem Abstande CB von C liegen müssen. Denkt man nun den Winkel BCD auf einen der andern ihm völlig gleichen Winkel, z. B. DCE, so gelegt, daß Scheitel und Schenkel zusammenfallen, so muß das Nämliche auch mit den Bogen BD und DE, und folglich auch mit den ihre Entpunkte verbindenden Geraden, d. h. den Sehnen BD und DE der Fall sein. Hieraus ergeben sich nun folgende Sätze:

1. Werden zwischen den Schenkeln zwei gleicher Winkel, BCD, DCE, mit gleichem Radius CD aus ihrem Scheitel als Centrum Kreisbogen beschrieben, so sind diese, sowie die Sehnen, einander gleich.

2. Ein gegebener Winkel **BCD** läßt sich vervielfachen, indem man mit beliebigem Radius **CB** aus seinem Scheitel eine Kreislinie construirt, und die Sehne **BD** wiederholt auf derselben abträgt.

3. Ein Winkel **ACB** läßt sich an eine gegebene Gerade mit gegebenem Scheitel übertragen, indem man einen Kreisbogen zwischen seinen Schenkeln construirt und die Sehne **AB** mißt.

4. Eine in gleiche Theile eingetheilte Kreislinie kann zur Messung der Winkel angewendet werden. Man pflegt aus diesem Grunde den ganzen Kreisumfang in 360 (oder 400), also jeden Viertelkreis oder Quadranten in 90 (oder 100) Grade, jeden Grad in 60 (oder 100) Minuten und jede Minute in 60 (oder 100) Secunden zu theilen, um durch solche Theile der Kreislinie die Winkel in bestimmten Zahlen angeben zu können. (Aufg. 15—21, §. 234.)

§. 231. Gegensatz der Lage. Wie die Fortbewegung eines Punktes **C** (Fig. 3.) in bestimmter Richtung **CH** eine gerade Linie erzeugt, so wird sie nicht minder in der entgegengesetzten Richtung **CB** eine solche hervorbringen. Denken wir uns den Punkt anfänglich in einer dieser beiden Richtungen, z. B. von **C** nach **H** fortschreitend und dann in der Richtung nach **C** zurückkehrend, so drückt, wenn man die Länge des Fortschritts mit **m**, die des Rückschritts mit **k** bezeichnet, die Differenz $m - k$ das Resultat beider einander entgegengesetzter Bewegungen aus. Dasselbe ist augenscheinlich $= o$, wenn $k = m$, dagegen einer bestimmten Länge gleich, wenn entweder $m > k$ oder $k > m$ ist. Angenommen, es sei:

(1) $m = CH$ und $k = HG$, so ist

I. $m - k = CH - HG = CG + GH - HG = + CG.$

(2) $m = CH$, und $k = HB$, so ist

II. $m - k = CH - HB = CH - HC - CB = - CB.$

Hieraus folgt, daß die Andeutungen zweier von irgend einem Punkte **C** einer geraden Linie nach entgegengesetzten Seiten hin liegenden Stücke derselben, **CB** und **CG**, mit den Zeichen des Gegensatzes des Positiven und Negativen (nach §. 32.) zu versehen sind, sofern außer ihrer Größe auch ihre Lage angegeben werden soll. Die Bezeichnung der Geraden **CB** und **CG** würde offenbar zu vertauschen sein, wenn man die ursprüngliche Richtung auf der anderen Seite von **C** annähme.

Alles hier in Beziehung auf die Gerade **HB** Ausgesprochene gilt augenscheinlich eben sowohl von jeder andern, z. B. **AQ**, hinsichtlich eines auf derselben beliebig gewählten Anfangspunktes.

Ein eben solcher Gegensatz der Lage findet in Absicht der Winkel statt, in sofern man einen Winkel **ACD** durch vor- oder zurückgehende Drehung des beweglichen Schenkels **CD** (Fig. 4.) um einen anderen Winkel **DCB** oder **DCE** vermehrt oder vermindert

denkt. Also ergiebt sich auch hier die doppelte Bezeichnung des Positiven und Negativen für die verschiedene Lage eines Winkels in Beziehung auf die Gränzlinie CD der anfänglichen Drehung. Offenbar würde ein Tausch der Zeichen stattfinden müssen, wenn man die ursprüngliche Drehung des beweglichen Schenkels nach der andern Seite von CD annähme.

§. 232. Lehrsätze über Linien und Winkel.

1. (Fig. 3.) Aus einem Punkte C einer geraden Linie GB kann nur eine Senkrechte CD gezogen werden.

Denn angenommen, es gäbe eine zweite Senkrechte CA, so wäre W. ACB = ACG, welches unmöglich ist, da jener < BCD, dieser aber > GCD ist, welche W. nach Vg. einander gleich sind.

2. (Fig. 5.) Alle rechte Winkel sind einander gleich.

Denn denkt man sich die beiden rechten W. ACB, DFE mit ihren Schenkeln CA, FD auf einander gelegt und nimmt an, daß CB in die Richtung FG oder FH fallen könne, so ständen in F zwei Gerade senkrecht auf DF, welches (nach L. 1.) unmöglich ist.

3. (Fig. 3.) Zwei Nebenwinkel ACB, ACG sind zusammen zwei rechten gleich.

Denn nimmt man von dem stumpfen W. das durch die Senkrechte CD entstehende Stück ACD hinweg und legt es dem spitzen Winkel ACB zu, so entstehen die rechten Winkel DCG + DCB.

Zusatz. Die Summe aller Winkel über einer geraden Linie mit gemeinsamem Schenkel ist = 2R.

4. (Fig. 3.) Die Summe aller Winkel um einen Punkt C ist vier rechten Winkeln gleich.

Denn wenn man durch diesen Punkt eine beliebige Linie AF zieht, so liegen zu beiden Seiten derselben Winkel, deren Summe = 2R; also müssen alle 4R betragen.

Zusatz. Mehre Winkel, welche zusammen 4R betragen, lassen sich in einer Ebene so an einander legen, daß sie dieselbe vollständig erfüllen.

5. (Fig. 3.) Wenn zwei Winkel, die einen Schenkel CA und den Scheitel C gemein haben, zusammen zwei rechten gleich sind, so fallen ihre anderen Schenkel in eine gerade Linie.

Denn fiele der Schenkel des einen W. nicht in die Verlängerung CB von GC, sondern etwa in CK, so wären ACK + ACG = 2R, und (nach L. 3) zugleich ACB + ACG = 2R, also W. ACK = ACB, welches unmöglich ist.

6. (Fig. 3.) Wenn zwei gleiche Winkel ACL, DCB mit gemeinschaftlichem Scheitel zum Theil auf einander liegen, so sind ihre äußeren Theile ACD, BCL einander gleich.

Beweis aus Nr. 3.

7. (Fig. 3.) Scheitelwinkel sind einander gleich.

Denn W. ACB + ACG = 2R und FCG = ACG = 2R, also ACB = FCG.

8. (Fig. 17. Zwei Gerade DF, EG, welche mit einer dritten AB gleiche und gleichliegende Winkel (o = q oder p = r) bilden, sind einander parallel.

Denn da o = q und q = x, also o = x und p = r, r = y, also p = y ist, so läßt sich der Theil DABE der Ebene so auf GBAF legen, daß AB mit BA, o mit x und p mit y zusammenfallen. Angenommen nun, AD und BE schnitten einander über AB in irgend einem Punkte P, so müßten BG und AF, mit denen sie nach Vorstehendem zusammenfallen, einander in irgend einem Punkte Q unter AB durchschneiden. Folglich wären DF und EG zwei gerade Verbindungslinien der Punkte P, Q, welches (nach §. 223, 2.) unmöglich ist. Da sie demnach einander nicht schneiden können, so sind sie parallel.

Zusatz I. Zwei gerade DF, EG, welche mit einer dritten AB zwei innere Winkel (o und p) bilden, deren Summe zwei rechte beträgt, sind parallel.

Zusatz II. Zwei Gerade CD, EF (Fig. 16.), welche senkrecht auf einer dritten AB stehen, sind einander parallel.

Anmerkung. Auf L. 8. gründet sich das Verfahren (Fig. 19.) Parallelen zu ziehen, indem man ein bewegliches Winkel-Lineal BGF an einem unbeweglichen Lineal BD verschiebt, weil hierbei die Geraden GF und DE mit der Linie BD stets gleiche Winkel (p = q) bilden. (Aufg. 22, 23, §. 234.)

9. (Fig. 18.) Werden zwei Convergenten AC, BD von einer dritten Geraden AF geschnitten, so beträgt die Summe der inneren Winkel, BAC und ABD, mehr oder weniger als zwei rechte.

Denn angenommen, sie betrüge 2R, so wären die Geraden AC, BD (nach L. 8, Zusatz I.) einander parallel, welches der Vg. widerspricht.

10. (Fig. 5.) Auf eine Gerade AC kann aus einem außer ihr liegenden Punkte B nur eine Senkrechte BC gezogen werden.

Denn angenommen, es gebe eine zweite Senkrechte BA, so würden die Convergenten BC, BA von AC unter Winkeln geschnitten, deren Summe = 2R wäre, welches (nach L. 9.) unmöglich ist.

11. (Fig. 17.) Durch einen Punkt B außer einer Geraden DF kann nur eine derselben parallele Gerade BE gezogen werden.

Dieser Satz ist eben so wenig, als der, daß man zwischen zwei Punkten nur eine Gerade ziehen könne, eines Beweises (d. h. der Zurückführung auf einfachere, einleuchtendere Wahrheiten) fähig.

12. (Fig. 17.) Werden zwei Parallelen DF, EG von einer

dritten Geraden AB geschnitten, so bilden sie mit dieser zwei gleiche gleichliegende Winkel ($o = q$ und $p = r$).

Denn angenommen, W. o und q wären ungleich, so würde (nach L. 8.) außer GE noch eine andere, durch B gelegte, Gerade mit DE parallel sein, welches (nach L. 11.) unmöglich ist.

Zusatz. Werden zwei Parallelen DF, EG von einer dritten Geraden AB geschnitten, so betragen ihre inneren Winkel (p und o oder x und y) zusammen zwei rechte.

13. (Fig. 18.) Ist die Summe der inneren Winkel, welche zwei Gerade AC, DB, mit einer Geraden AB bilden, kleiner als zwei rechte, so sind jene Geraden Convergenten.

Denn angenommen, AC und BD wären parallel, so müßten (nach L. 12, Zus.) die inneren W. 2R betragen, welches der Vg. widerspricht.

14. (Fig. 17.) Wechselwinkel (o und x, p und y) sind einander gleich.

Denn da, wenn DF parallel EG ist, (nach L. 12.) $o = q$ und (nach L. 7.) $q = x$ sein muß, so folgt, daß $o = x$.

15. (Fig. 20.) Wenn zwei Gerade AB, KL einer dritten CD parallel sind, so sind sie einander parallel.

Denn angenommen, sie wären es nicht, sondern träfen einander in irgend einem Punkte P, so könnten aus diesem zwei Parallelen mit CD gezogen werden, welches (nach L. 11.) unmöglich ist.

16. (Fig. 19.) Wenn zwei Gerade DB, DE zwei andern CA CF paarweise parallel sind, so bilden sie denselben Winkel wie diese.

Denn der von den Schenkeln DB, CF gebildete W. p ist (nach L. 12.) $= o$ und $= q$, also auch $o = q$.

§. 233. Verbindung gerader Linien. Für die Anzahl der Verbindungslinien einer gegebenen Menge von Punkten oder der Durchschnittspunkte einer gegebenen Menge gerader Linien gelten folgende Sätze:

1. Werden n in einer Ebene zerstreut liegende Punkte durch gerade Linien verbunden, so ist deren Anzahl $= \frac{1}{2} n (n - 1.)$

Denn von jedem der n Punkte kann man nach $n - 1$ Punkten eine Gerade ziehen; da hierbei aber jede Gerade doppelt gezogen wird, so ist die Hälfte von $n (n - 1)$ zu nehmen.

Zusatz. Liegen von n Punkten p mal drei in gerader Linie, so ist die Anzahl der Verbindungslinien $= \frac{1}{2} n (n - 1) - 2p$, da sie für jede der p Abtheilungen von je drei Punkten um 2 Linien vermindert wird.

2. Die Anzahl der Durchschnittspunkte von n convergirenden Geraden ist $= \frac{1}{2} n (n - 1)$.

Beweis ähnlich, wie zu L. 1.

3. Die Anzahl der Durchschnittspunkte von n Geraden, unter denen p Parallelen sind, ist $= \frac{1}{2} n (n-1) - \frac{1}{2} p (p-1)$.

Denn da p Gerade nach Vg. keinen Durchschnittspunkt unter einander haben, so ist die Zahl $\frac{1}{2} p (p-1)$ für dieselben abzuziehen.

Zusatz. Sind unter n Geraden Abtheilungen zu p, q, r Parallelen, so ist die gesuchte Anzahl:

$$\frac{1}{2} \left\{ n(n-1) - p(p-1) - q(q-1) - r(r-1) \right\}.$$

4. Schneiden einander unter n Convergenten p in dem nämlichen Punkte, so ist die Anzahl ihrer Durchschnittspunkte

$$= \frac{1}{2} n (n-1) - \frac{1}{2} p (p-1) + 1.$$

Beweis folgt aus L. 3.

S. Aufg. 31—36, §. 234.

§. 234. Aufgaben.

1. Die in einer Ebene zerstreuten Punkte A, B, C, D, E, F durch gerade Linien zu verbinden.
2. Den gegebenen begränzten Geraden a, b, c, d, e, f gleiche Linien zu construiren.
3. Die Summe der Geraden a, b, c, d zu bilden.
4. Eben so die Differenz von a und b, c und d.
5. Die Gerade a (2×3) mal und b (2×5) mal zu nehmen.
6. Die Gerade d in 5, e in (2×3), f in $(3 \cdot 4)$ gleiche Theile zu theilen.
7. Drei Maaßstäbe, 6 Zoll lang und in Linien eingetheilt, für Cölnisches, Rheinländisches und Pariser Maaß zu bilden. (Es ist 1 Zoll Cöln = GC, Fig. 13; 1 Zoll Rheinl. = BC, Fig. 18; 1 Z. Par. = BD, Fig. 10).
8. Mit Hülfe der vorigen Maaßstäbe sämmtliche Verbindungslinien mehrer Punkte A, B, C, D, E (Fig. 11.) zu messen.
9. Das größte gemeinschaftliche Maaß zweier Geraden a und b aufzusuchen.
10. Die Länge einer gegebenen krummen Linie näherungsweise zu bestimmen.
11. Um die Punkte A, B, C, D als Mittelpunkte mit den Geraden a, b, c, d als Radien Kreislinien zu construiren.
12. Einen Punkt C zu finden, dessen Abstand von A wie von B = AB sei. (Fig. 6.)
13. Den Radius a eines Kreises wiederholt als Sehne in seinem Umfange abzutragen.
14. Eben so eine Gerade $b < a$.
15. Einen gegebenen Winkel α zu verdoppeln.
16. Eben so einen Winkel β zu verdreifachen.

17. Einen Winkel α an eine gegebene Gerade, und zwar mit dem Scheitel an einen gegebenen Punkt zu tragen.
18. Einen gegebenen Winkel α vermittelst eines eingetheilten Kreises zu messen.
19. Eben so die Winkel ABC, ABD, ABG, ABE. (Fig. 18.)
20. Eben so die Summe der Winkel p, r, x. (Fig. 21.)
21. Eben so die Summe von ACB, CBG, BGA, GAC. (Fig. 22.)
22. Einer Geraden a durch einen gegebenen Punkt A eine andere parallel zu ziehen.
23. Eben so mehre Parallelen durch A, B, C, D, E, F.
24. Durch einen Punkt C einer Geraden AB eine andere so zu ziehen, daß sie jene unter dem gegebenen Winkel α schneide.
25. An die Endpunkte einer Geraden AB den Winkel α zu legen. (Fig. 6.)
26. Einen Winkel $= \alpha$ zu construiren und seine Schenkel $=$ m und n zu machen.
27. Durch einen Punkt zwei Gerade zu legen, die mit einer gegebenen Geraden die gegebenen W. α und β bilden.
28. Durch einen Punkt P Parallelen mit den Geraden a, b, c, d, e, f zu ziehen.
29. Eben so Parallelen von gleicher Länge $=$ m aus den Punkten A, B, C, D, E, einer Geraden.
30. Eben so aus den Punkten A, B, C, D einer Kreislinie.
31. Wie groß ist die Anzahl der Verbindungslinien von 12 Punkten?
32. Eben so die für 16 Punkte, unter denen 4mal 3 in gerader Linie liegen?
33. In wie vielen Punkten schneiden einander 20 Gerade, unter denen keine Parallelen sind?
34. In wie vielen Punkten dagegen, wenn sich 12 Parallelen nach einer Richtung unter ihnen befinden?
35. Wie viele Durchschnittspunkte haben 17 Gerade, unter denen nach drei verschiedenen Richtungen, 4, 5 und 6 Gerade einander parallel sind? (105)
36. In wie vielen Punkten schneiden einander 36 Linien, von denen 24 von dem nämlichen Punkte ausgehen? (355)

Zweites Capitel.

Die geradlinigen Figuren.

§. 235. Erklärungen. Wenn gerade oder krumme Linien in einer Ebene einen bestimmten Theil derselben völlig begränzen oder einschließen, so bildet ihre Verbindung eine Figur. Die Linien, welche eine geradlinige Figur bilden und ihre Seiten genannt werden, treffen einander unter eben so vielen Winkeln, weil jede folgende Seite unter einem gewissen Winkel an die vorhergehende treten muß, bis die letzte (nte) sich mit der ersten Seite unter dem letzten (nten) Winkel verbindet und dadurch die Figur schließt. Man kann folglich die verschieden gestalteten Figuren nach der Anzahl ihrer Seiten oder Winkel Drei-, Vier-, Fünf-Ecke u. s. w. nennen. Sollten unter diesen Bestandtheilen einer Figur, den Seiten und Winkeln, einige ihrer Größe und Lage nach durch andere mit Nothwendigkeit bestimmt werden, so wird man bestimmende und abhängige Stücke in derselben unterscheiden müssen. Unter dem Umfange einer Figur versteht man die Summe ihrer Seiten. Durchschnitts-Linien, welche die Winkelpunkte oder Ecken einer Figur mit einander verbinden, heißen Diagonalen, wenn sie hingegen aus einer Ecke durch die gegenüberstehende Seite gezogen sind, Transversalen. Figuren mit durchaus gleichen Seiten und Winkeln mögen reguläre Figuren genannt werden.

In Ansehung zwei auf oder neben einander liegender Figuren gelten folgende Erklärungen:

1. Zwei Figuren **A**, **B** decken einander (sind congruent), wenn sie zu einer Figur zusammenfallen.

2. Zwei Figuren **A**, **B** schneiden einander, wenn ein Theil von **A** innerhalb, ein Theil außerhalb **B** liegt.

3. Zwei Figuren **A**, **B** berühren einander, wenn einzelne Punkte ihrer Umgränzungen zusammenfallen, ohne daß sie einander schneiden. Liegt hiebei **A** innerhalb **B**, so findet eine Berührung der Figuren von innen, liegt hingegen **A** außerhalb **B**, eine Berührung derselben von außen statt.

4. Wenn von zwei Figuren **A**, **B** die innere **A** mit ihren Ecken die Seiten der sie umschließenden Figur **B** berührt, so nennt man **A** der **B** eingeschrieben und **B** der **A** umschrieben.

§. 236. Dreieck. Die einfachste Verbindung gerader Linien zu einer Figur ist die, wo ihrer zwei, die einen Winkel bilden, außer dem Scheitelpunkte desselben von einer dritten geschnitten werden, das Dreieck. Von seinen drei Seiten nennt man willkürlich eine

die Grundlinie, die gegenüberliegende Ecke die Spitze oder den Scheitel des Dreiecks; die beiden von dem Scheitel ausgehenden Seiten heißen dann Scheitelseiten, und eine, aus demselben auf die (nöthigenfalls verlängerte) Grundlinie gefällte Senkrechte die Höhe des Dreiecks. Die einem bestimmten Winkel gegenüber liegende Seite bezeichnet man als dessen Gegenseite, so wie den Winkel, der einer bestimmten Seite gegenüber liegt, als ihren Gegenwinkel. Ein Dreieck mit zwei Seiten von gleicher Länge heißt ein gleichschenkliges, mit drei gleichen Seiten ein gleichseitiges.

§. 237. Lehrsätze über die Congruenz der Dreiecke, und die gegenseitige Abhängigkeit ihrer Seiten und Winkel.

1. (Fig. 5.) Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Denn ist AB = DE, AC = DF und W. A = D, so werden, wenn man die Dreiecke so auf einander legt, daß W. A und D einander decken, ihre gleichlangen Schenkel AB, DE und AC, DF in einander fallen, und da alsdann zwischen den Punkten B (E) und C (F) nur eine gerade Linie möglich ist, auch die W. B, E und C, F einander decken. (Aufg. 1, §. 243.)

2. (Fig. 6.) Dreiecke sind congruent, wenn in denselben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich sind.

Denn ist AB = DE, W. A = D und W. B = E, so fällt, wenn man das Dreieck ABC so auf DEF legt, daß jene gleichen Stücke auf einander fallen, auch AC auf DF und BC auf EF, folglich C auf F. (Aufg. 2, 3, §. 243.)

3. (Fig. 6.) In einem gleichschenkligen Dreiecke haben die gleichen Seiten gleiche Gegenwinkel.

Denn sei CA = CB, und die Linie CL Halbirungslinie des Winkels ACB, so ist (nach L. 1.) Dr. CAL ≅ CBL, folglich auch W. A = W. B.

Zusatz I. In einem gleichseitigen Dreiecke ist, weil AC = BC W. B = A, und weil BC = AB, auch W. A = C, also W. A = B = C.

Zusatz II. Die Halbirungslinie des Gegenwinkels der Grundlinie im gleichschenkligen Dreieck ist auf dieser senkrecht und halbirt sie.

Zusatz III. Die Senkrechte aus der Mitte der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks trifft seinen Scheitel. (Aufg. 4—8, §. 243.)

4. (Fig. 6.) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich, so ist es ein gleichschenkliges.

Sei W. D = W. E, so würde die Annahme, daß DF nicht = EF, sondern etwa = EG oder EK sei, nach L. 1. zu der

ungereimten Folgerung führen, daß Dr. DEF ≌ Dr. DEG sein müsse. [Aufg. 9. §. 243.]

5. (Fig. 7.) Dreiecke sind congruent, wenn alle drei Seiten des einen denen des andern gleich sind.

Denn denkt man sich die Dr. ABC, DEF mit AB = DE an einander gelegt, also AG = DF und BG = EF, so hat man, CG ziehend, die gleichschenkligen Dreiecke ACG und BCG, mithin W. x = y, und W. o = p, also x + o = y + p, woraus (nach L. 1.) die Congruenz der Dr. folgt.

6. (Fig. 8.) Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist den innern Gegenwinkeln zusammengenommen gleich.

Denn zieht man aus den Scheitel B des Außenwinkels CBF eine Parallele zur Gegenseite AC, so folgt der Satz aus §. 232, L. 12. und 14.

Zusatz I. Der Außenwinkel eines Dreiecks ist größer, als jeder der beiden innern Gegenwinkel.

Dieser Satz läßt sich auch unmittelbar (aus L. 1.) erweisen, wenn man durch die Mitte von BC eine Gerade AD zieht und ED = EA macht.

Zusatz II. Je zwei Winkel eines Dreiecks zusammen sind kleiner, als zwei rechte.

Zusatz III. Ein Dreieck kann nicht mehr als einen rechten oder stumpfen Winkel enthalten.

Erklärung. Ist einer der Winkel im Dreieck ein rechter, so heißt es rechtwinklig, jede dem rechten W. anliegende Seite Cathete und die ihm gegenüberstehende Hypotenuse. Ist einer der Winkel im Dreiecke stumpf, so wird es ein stumpfwinkliges; sind sie aber alle spitz, ein spitzwinkliges Dreieck genannt.

7. (Fig. 8.) Die drei Winkel eines Dreiecks zusammen betragen zwei rechte.

Denn da die Summe der Winkel BAC und ACB (nach L. 6.) = CBF, und CBF + CBA = 2R ist, so müssen auch W. A + B + C = 2R sein.

Zusatz. Demnach ist jeder W. im gleichseitigen Dr. = $\frac{2}{3}$R, und jeder W. an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks, wenn dessen gleiche Seiten den W. A einschließen, = R — $\frac{1}{2}$A. Auch folgt, daß, wenn zwei Winkel in zwei Dreiecken übereinstimmen, der dritte dem dritten gleich sein müsse. Sind die W. B und C gegeben, so findet man A = 2R — (B + C), und ist einer der Winkel, z. B. A, ein rechter, so muß die Summe der andern B + C = R sein. [Aufg. 10, 12—14. §. 243.]

8. (Fig. 9.) Die größere von zwei Seiten im Dreieck hat immer den größeren Gegenwinkel.

Denn ist AC > CB, und macht man die verlängerte CD = CA,

CE = CB so ist Dr. CAB ≌ CDE, also W. A = D und deshalb (nach L. 6. Zus. I.) < B.

9. (Fig. 10.) Der größere von zwei Winkeln im Dreieck hat immer die größere Gegenseite.

Denn sei im Dreieck ABE W. q > W. y, so ist es (nach L. 8.) unmöglich, daß AB < BE, und eben so (nach L. 3.), daß AB = BE sei, da beide Annahmen zu einem Widerspruch gegen die Vg. führen würden.

Zusatz I. Von allen Geraden, die von einem Punkte außer einer Geraden AD auf dieselbe gezogen werden können, ist die Senkrechte BC die kürzeste.

Zusatz II. Von zwei andern beliebigen Geraden AB, BE ist die der Senkrechten zunächst liegende die kürzere.

Zusatz III. Die Senkrechte BC ist als die kürzeste aller aus B auf AD zuziehenden Geraden, welche mit Ausnahme ihrer von unbestimmter Länge sind, als Maß des Abstandes zwischen B und AD anzusehen.

10. (Fig. 10.) Die Summe zweier Dreiecksseiten ist immer größer, ihr Unterschied hingegen immer kleiner, als die dritte Seite: Denn I. verlängert man AC um CD = CB, und zieht BD, so ist W. CDB = CBD, also ABD > D, und deshalb (nach L. 9.) AD oder (AC + CB) > AB.

II. Schneidet man auf CA eine Länge CE = CB ab, so ist der Unterschied der Seiten AE nothwendig < AB, weil W. o = p, also q ein stumpfer W. ist. [Aufg. 11. §. 243.]

11. (Fig. 11.) Die Summe zweier Seiten im Dreieck ist immer größer, als die zweier aus einem innern Punkte D nach den Endpunkten der dritten gezogenen Linien DA, DB.

Denn da nach der Verlängerung AE + EB > AD + DB, und wiederum AC + CB > AE + EB, so ist um so mehr AC + CB > AD + DB.

12. (Fig. 11.) Der von zwei Dreiecksseiten eingeschlossene Winkel C ist kleiner, als der, welchen zwei, von den Endpunkten der dritten nach einem innern Punkte D gezogene Linien einschließen.

Denn da (nach L. 6.) W. D > E und wiederum W. E > C, so ist um so viel mehr W. D > C.

13. (Fig. 12.) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, aber die eingeschlossenen Winkel ungleich, so hat der größere derselben auch die größere Gegenseite.

Denn wenn AC = DF, BC = FE, aber W. C > F, und das Dr. AGC ≌ DEF, an AC gelegt und GB gezogen wird, so bilden die Seiten AB, BG, AG das Dr. ABG. In diesem ist aber W. ABG < AGB, weil (nach L. 3.) W. BGC = GBC,

also > GBA, und als Theil < AGB ist. Daraus folgt endlich (nach L. 9.), daß auch AB > AG oder DE sein muß.

14. (Fig. 12.) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so hat die größere derselben auch den größern Gegenwinkel.

Denn die Annahme, daß W. ACB = F oder < F sei, widerstreitet (nach L. 1. oder 13.) der Voraussetzung AB > DE.

15. (Fig. 6.) Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite nebst dem anliegenden und dem gegenüberstehenden Winkel in beiden gleich sind.

Denn ist AB = DE, W. B = E und W. C = F, so muß (nach L. 7.) auch W. A = W. D und folglich (nach L. 2.) Dr. ABC ≌ DEF sein. [Aufg. 15. §. 243.]

16. (Fig. 13.) Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken nur die Hypothenusen gleich sind, so hat der größere Winkel auch die größere Gegenseite.

Denn es sei GC = GH, aber W. CGD > W. HGI, so verlängere man CD und HI um gleiche Stücke DK und IL und ziehe GK, GL. Dann ist (nach L. 13.) CK > HL, folglich auch CD > HI.

17. (Fig. 14.) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Hypothenuse und eine Cathete in beiden gleich sind.

Denn angenommen, es sei AC = DF, CB = DE, und die dritte Seite AB vielleicht < FE, z. B. = FG, so würde (nach L. 9, Zus. II.) DG < DE oder CB sein gegen die Vg.

18. (Fig. 15.) Zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten nebst einem der nicht eingeschlossenen Winkel gleich sind, sind congruent, wenn der andere nicht eingeschlossene Winkel in beiden von gleicher Art (d. h. spitz-, recht- oder stumpfwinklich) ist.

Denn wenn AB = DE, BC = EF (oder BG = EL), dabei AB > BC und der (spitze) W. A = D, so entstehen durch die Senkrechten die (nach L. 2.) congruenten Dr. DEH und ABK, mithin ist EH = BK und AK = DH. Ferner ist (nach L. 17.) Dr. BKC ≌ EHF, also KC = HF, und eben so Dr. BKG ≌ EHL, also KG = HL. Im ersten Falle ergiebt sich durch Addition AC = DF, im andern durch Subtraction AG = DL, und daraus (nach L. 1. oder 5.) daß Dr. ABC ≌ DEF und Dr. ABG ≌ DEL.

Zusatz. Wenn die dem Winkel A gegenüber liegende Seite BC > AB ist, so sind die Dreiecke auch ohne die im Lehrsatze hinzugefügte Bedingung congruent, weil dann der Schenkel AK des W. A nur in einem Punkte C von BC getroffen werden kann. [Aufg. 16—20, §. 243.]

Anmerkung. Aus den Lehrsätzen 1, 2, 5, 7, 15 und 18 ergiebt sich, daß unter den sechs Bestandtheilen des Dreiecks drei von einander unabhängige zur Bestimmung der Figur hinreichen und die andern drei von diesen abhängig sind, sofern nur unter jenen eine Seite vorkommt; daß aber zwei Seiten mit gegenüberliegendem Winkel auch zwei ganz verschiedene Dreiecke bestimmen können und deshalb zweideutige Data sind, so lange nicht eine besondere Bedingung (wie in L. 18.) hinzukommt.

§. 238. * Lehrsätze über Linien im Dreieck.

1. (Fig. 23.) Die Senkrechten aus der Mitte der Dreiecksseiten schneiden einander im nämlichen Punkte, der von den Ecken gleichweit entfernt ist.

Denn sind aus E, D die Senkrechten EM, DM gezogen, so ist AMD ≌ BMD und AME ≌ CME, also BM = AM = CM, und Dr. BMC gleichschenklig. Es muß folglich auch (nach §. 237. L. 3., Zus. III.) die Senkrechte FM den Punkt M treffen.

2. (Fig. 24.) Die senkrechten Transversalen eines Dreiecks schneiden einander im nämlichen Punkte.

Denn zieht man durch die Ecken eines Dreiecks ABC mit seinen Seiten die Parallelen DE, EF, FD, so zerfällt das Hülfsdreieck DEF in vier congruente Dreiecke, und es ist EC = CD, EA = AF, DB = BF. Wenn nun (nach L. 1.) die im Dr. DEF aus A, B, C errichteten Senkrechten einander im Punkte M treffen, so gilt das Nämliche von den aus A, B, C auf die Seiten des Dr. ABC gefällten, weil diese mit jenen zusammenfallen müssen.

3. (Fig. 25.) Die auf den Seiten eines Dreiecks errichteten Senkrechten schneiden einander unter den Winkeln des gegebenen Dreiecks.

Denn da die Dr. GDB und GFP nach Vg. rechtwinklich sind und den W. G gemein haben, so ist W. P = W. B. Eben so findet man W. N = A, und W. O = C.

4. (Fig. 26.) Die in einem Dreieck unter gleichen Winkeln gezogenen Transversalen schneiden einander unter den Winkeln des gegebenen Dreiecks.

Denn da x = y = z, so folgt, daß W. a = o + z = o + x = A, und eben so, daß W. b = B, W. c = C.

5. (Fig. 27.) Die Transversalen, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden einander im nämlichen, von den Seiten gleichweit entfernten Punkte.

Denn treffen die Halbirungslinien aus A und B einander in M, und werden aus M die Senkrechten MD, ME, MF gefällt, so folgt die Gleichheit dieser Linien aus der Congruenz der Dr. AME, AMD und BMD, BMF. Dann ist, wenn man MC zieht, auch

(nach §. 237, L. 17.) Dr. CMF ≌ CME, also W. C. gleichfalls halbirt.

§. 239. **Viereck.** Nächst dem Dreieck ist die einfachste Figur die von vier Linien gebildete, welche unter eben so vielen Winkeln zusammentreten — das **Viereck**. Seine gegenüberstehenden Seiten oder Winkel nennt man in Beziehung auf einander **Gegenseiten** und **Gegenwinkel**. Sind die vier Seiten einander paarweise parallel, so wird es **Parallelogramm**, sind nur zwei parallel, **Trapez** (oder auch **Paralleltrapez**) genannt. Wenn alle vier Seiten des Vierecks gleich sind, heißt es im Allgemeinen **Rhombus**, in einem besondern Falle **Quadrat**. Sind die gegenüberstehenden Seiten nicht parallel, wie in ECBF (Fig. 9.) so entsteht durch Verlängerung derselben das sogenannte **vollständige** Viereck CAFD mit sechs Durchschnittspunkten und einem **hohlen** (oder **einspringenden**) Außenwinkel AFD. Im Viereck ECBF sind durch Verbindung der Punkte E und B, so wie C und F nur zwei **Diagonalen** möglich, im vollständigen Viereck CAFD dagegen noch eine **dritte**, indem man A mit D verbindet. Die Betrachtung der Vierecke beruht auf den Lehrsätzen über die Congruenz und Eigenschaften der Dreiecke, so wie der Parallelen.

§. 240. **Lehrsätze über das Viereck.**

1 (Fig. 28.) Die Summe aller Winkel eines Vierecks beträgt vier rechte.

Denn zieht man die Diagonale AC, so zerfällt das Viereck in zwei Dreiecke, also ist W. (A + B + C + D) = 4R.

Zusatz. Mit drei Winkeln eines Vierecks ist mithin auch der vierte gegeben. Es ist also ein Viereck mit vier rechten Winkeln möglich, daß man **Rechteck** oder **Rectangel** nennt.

2. (Fig. 28.) Congruente Vierecke können aus congruenten Dreiecken gebildet werden, wenn die Dreiecke **eine** gleiche Seite haben.

Denn nach der Vg. fällt Dr. EFL auf ABD, Dr. LFG auf DBC, also Viereck EFGL auf ABCD.

3. (Fig. 28.) Vierecke sind bei übereinstimmender Folge der als gleich vorausgesetzten Bestandtheile congruent:

I. wenn alle vier Seiten nebst einem Winkel in beiden paarweise gleich sind;

II. wenn drei Seiten nebst den beiden eingeschlossenen Winkeln in beiden paarweise gleich sind;

III. wenn zwei angränzende Seiten nebst dem eingeschlossenen und zwei nicht eingeschlossenen Winkeln in beiden paarweise gleich sind.

Die Beweise ergeben sich leicht aus den Sätzen über die Congruenz der Dreiecke und L. 2. (Aufg. 21—22, §. 243.)

Anmerkung. Die vorstehenden Sätze über die Congruenz der Vierecke sind hier als die einfachsten aufgeführt, aber keineswegs erschöpfend, wie man aus einer Aufzählung der verschiedenen Zusammenstellungen von fünf unabhängigen Bestandtheilen des Vierecks leicht erkennt. Da (nach L. 1.) die vier Winkel nicht unabhängig von einander sind, so müssen unter jenen das Viereck bestimmenden Bestandtheilen wenigstens zwei Seiten enthalten sein.

4. (Fig. 29.) Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich.

Denn da x = y und o = p, so ist Dr. ABC ≌ ADC und folglich AB = DC, AD = BC, W. B = D und A = C.

Zusatz. Ein rechtwinkliges Parallelogramm oder Rechteck, dessen Seiten einander gleich sind, wird ein Quadrat genannt.

5. (Fig. 29.) Ein Viereck ist ein Parallelogramm:

I. wenn zwei Gegenseiten einander gleich und parallel sind;

II. wenn die Gegenseiten paarweise einander gleich sind;

III. wenn zwei Gegenseiten parallel und zwei Gegenwinkel einander gleich sind;

IV. wenn zwei Gegenseiten einander gleich, die beiden andern parallel und zwei Gegenwinkel gleichartig sind;

V. wenn die Gegenwinkel einander gleich sind.

Die Beweise von I—IV ergeben sich durch die Congruenz der Dreiecke und Gleichheit der Wechselwinkel, wenn man eine Diagonale zieht. Der Beweis für V dagegen folgt aus der Voraussetzung und L. 1. mit Beziehung auf 232, L. 8.

6. (Fig. 29.) Die beiden Diagonalen im Parallelogramm halbiren einander.

Denn da Dr. AMB ≌ DMC, so ist MA = MC, und MB = MD.

Zusatz I. Die Diagonalen eines Quadrats zerlegen dasselbe in vier rechtwinklige congruente Dreiecke.

Zusatz II. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen im Quadrat liegt von seinen Ecken, so wie von seinen Seiten gleich entfernt.

7. (Fig. 29.) Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel in beiden gleich sind. Beweis folgt aus der Congruenz der Dreiecke.

Zusatz. Quadrate über gleichen Seiten sind congruent.

(Aufg. 24—33, §. 243.)

§. 241. Vielecke. Jede Figur aus mehr als vier Seiten zusammengesetzt, rechnet man zu der allgemeinen und unbegränzten Klasse der Vielecke oder Polygone und darf, um auf sie die bisherigen Sätze auszudehnen, nur eine Theilung in Drei- oder Vierecke durch Diagonalen vornehmen. Die Winkel, unter denen die

Seiten eines Vielecks zusammenstoßen, heißen Polygonalwinkel und werden als innere und äußere unterschieden. Sind die inneren Winkel hohle, (d. h. $< 2R$), so nennt man sie ausspringende, dagegen solche, welche überstumpf (also $> 2R$) sind, einspringende Polygonwinkel. Bei jedem der letzten fällt eine Diagonale nothwendig (wie in Fig. 9.) außerhalb der Figur, während bei einem Vieleck mit durchaus hohlen inneren Winkeln sämmtliche Diagonalen in's Innere fallen. Hat eine solche Figur allgemein n Seiten, so werden einer beliebigen Ecke derselben (n — 2) Seiten gegenüber liegen, die durch Ziehung sämmtlicher Diagonalen aus jener Ecke zu Grundlinien von (n — 2) Dreiecken werden. Nimmt man aber im Innern des Polygons einen Punkt an, um von demselben nach allen n Ecken gerade Linien zu ziehen, so wird dadurch das Viereck in n Dreiecke zerlegt.

§. 242. Lehrsätze über Polygone.

1. (Fig. 31.) Die Summe aller Winkel in einem Vieleck beträgt so vielmal 2R, als es Seiten hat, weniger 4R.

Denn da ein n Eck, wenn man aus einem beliebigen Punkte M im Innern nach seinen Ecken ABCD . . . . Gerade zieht, nmal 2R enthält, von denen aber 4R um den Punkt M liegen, so ist die Summe aller Polygonwinkel $= n \,.\, 2R - 4R$. Auch ist der Satz (nach §. 241.) durch Ziehung von Diagonalen zu beweisen.

Zusatz. Die Winkel im Fünfeck betragen demnach 6R, im Sechseck 8R, im Siebeneck 10R u. s. w.

2. (Fig. 20.) Die Summe der durch Verlängerung der Seiten entstehenden Außenwickel eines Vielecks ist immer vier rechten gleich, sofern es keine einspringende Winkel hat.

Denn da die inneren W. $= n \,.\, 2R - 4R$ und die an den n Ecken liegenden inneren und äußeren, als Nebenwinkel, $n \,.\, 2R$ betragen, so müssen die äußeren allein 4R ausmachen.

3. (Fig. 31.) Aus n gleichschenkligen congruenten Dreiecken läßt sich ein reguläres Polygon bilden, wenn jeder Winkel an der Spitze der nte Theil von vier Rechten ist.

Denn in diesem Falle entsteht durch Aneinanderlegen der n Dreiecke eine geschlossene Figur von n gleichen Seiten mit gleichen Polygonwinkeln. (Aufg. 34, 35, §. 243.)

4. (Fig. 31.) Wenn in einem regulären Polygon die Winkel halbirt werden, so treffen die Theilungslinien im Mittelpunkt der Figur zusammen.

Denn über den n Seiten der Figur werden dadurch in derselben n gleichschenklige Dr. gebildet, die sämmtlich congruent sind, und deren Spitzen also, gleichweit von den Ecken wie von den Seiten der Figur abstehend, im Mittelpunkte derselben sich vereinigen müssen.

Anmerkung. Die am Mittelpunkte eines regul. Polygons auf diese Weise gebildeten gleichen Winkel werden Centriwinkel im Gegensatze der von seinen Seiten gebildeten Polygonwinkel genannt.

5. (Fig. 45.) Werden in einem regulären Polygon von gerader Seitenzahl die abwechselnden Ecken durch Diagonalen verbunden, so bilden diese wiederum ein reguläres Polygon, das aber nur halb so viel Seiten als das erste enthält.

Beweis folgt aus der Congruenz der Dreiecke.

6. Die Anzahl aller in einem Polygon von n Seiten zu ziehenden Diagonalen ist $= \frac{1}{2} n (n-3)$.

Denn da man von jedem Eckpunkte nach $(n-3)$ anderen Diagonalen ziehen kann, in der Anzahl $n (n-3)$ aber jede Diagonale doppelt gerechnet ist, so hat man die Hälfte dieser Zahl zu nehmen.

§. 243. Aufgaben.

1. Aus zwei Seiten b, c nebst eing. W. α ein Dreieck zu bilden. Fig. 32.
2. Aus einer Linie c und zwei anl. W. α, β ein Dreieck zu bilden. Fig. 32.
3. Vermöge gleicher Parallelen eine L. AB zu halbiren. Fig. 22.
4. Aus einer Linie a ein gleichseitiges Dreieck zu bilden.
5. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus der Grundlinie c und einer Scheitelseite a. Fig. 6.
6. Auf einer Geraden AB im P. D eine Senkrechte zu errichten. Fig. 22.
7. Aus einem Punkte C auf eine Gerade AB eine Senkrechte zu fällen. Fig. 22.
8. Einen gegebenen Winkel ACB zu halbiren. Fig. 22.
9. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus der Grundlinie c und einem anl. W. α. Fig. 6.
10. Zu zwei Winkeln α, β eines Dr. den dritten zu finden.
11. Aus den Linien a, b, c ein Dr. zu bilden. Fig. 32.
12. Ein gleichschenkl. Dr. zu construiren aus der Grundlinie c und dem Gegenwinkel γ. Fig. 6.
13. Desgleichen so, daß der Scheitel in den Punkt C und die Grundlinie c auf die gegebene Grade AB falle. Fig. 22.
14. Desgleichen so, daß die Grundlinie $=$ c und der Gegenwinkel ein rechter sei.
15. Aus einer Seite b, dem Gegenw β und einem anl. W. α ein Dr. zu construiren. Fig. 32.
16. Eben so aus zwei Seiten a, c nebst einem nicht eingeschlossenen spitzen W. A. Fig. 15.
17. Eben so aus a, c und dem stumpfen W. C. Fig. 18.
18. Eben so, wenn W. A ein rechter ist.

19. Ein Dreieck zu bilden aus der Grundlinie a, dem Gegenwinkel α und der Summe der beiden andern Seiten $b + c = m$.
20. Desgleichen aus der Grundlinie a, dem Gegenw. α und der Differenz der beiden andern Seiten $b - c = m$.
21. Ein Viereck aus seinen vier Seiten a, b, c, d und einem von a und b eingeschl. W. B zu constriren. Fig. 28.
22. Eben so aus drei Seiten d, a, b nebst den beiden eingeschlossenen W. A und B. Fig. 28.
23. Eben so aus zwei angränzenden Seiten a, b, dem eingeschl. W. B und zwei anderen Winkeln A und C oder A und D. Fig. 28.
24. Ein Parallelogramm zu bilden aus zwei Seiten a, b und dem eingeschl. W. B. Fig. 29.
25. Desgl. aus zwei Seiten a, b und der Diag. BD. Fig. 29.
26. Desgl. aus einer Seite a, einer Diag. AC und dem Winkel $DAC = x$. Fig. 29.
27. Eine Gerade g durch Parallelenziehung (ohne Zirkel) zu halbiren.
28. Ein W. ABC und ein Punkt M zwischen seinen Schenkeln sind gegeben. Durch M eine Gerade AC so zu legen, daß $MA = MC$ werde. Fig. 29.
29. Ein Parallelogramm aus Grundl., Höhe und einer Diagonale zu bilden.
30. Desgl. aus zwei angränzenden Seiten und der Höhe.
31. Desgl. aus Seite b, Diag. BD und W. $DAC = x$. Fig. 29.
32. Ein gleichschenkl. Dreieck zu construiren, dessen senkrechte Transversalen $= m$, n gegeben sind.
33. Ein Quadrat auf einer als Diagonale gegebenen Geraden m zu construiren.
34. Ein Sechseck zu bilden, congruent mit ABCDEF. Fig. 30.
35. Ein regul. Sechseck über der L. AB zu construiren. Fig. 31.

---

36. Ein Dreieck zu bilden aus den Basiswinkeln α, β und der Höhe h. Fig. 32.
37. Desgl. aus einer Seite b, der Höhe h und W. ACB. Fig. 32.
38. Desgl. aus der Grundl. c, Höhe h und W α.
39. Desgl aus den W. α und γ und der Höhe h.
40. Desgl. aus einer Seite b, dem Gegenw. β und der Höhe h.
41. Desgl. aus zwei auf den Seiten senkrechten Transversalen BO, CP und einem W. A. Fig. 24.
42. Ein Trapez zu construiren aus drei Seiten AB, AC, CD und einem W. $ACD = q$. Fig. 20.
43. Desgl. aus allen vier Seiten.
44. Desgleichen aus drei Seiten und der Summe der Basiswinkel $(C + D) = \lambda$. Fig. 20.

45. Im Dr. ABC einen Punkt zu finden, der von den Ecken gleichweit entfernt sei.
46. Ein Dreieck ABC in vier congruente Dreiecke zu theilen.
47. Im Dreieck ABC einen von seinen Seiten gleichweit entfernten Punkt zu finden.
48. Von zwei gegebenen Punkten C, H nach irgend einem Punkte (G) der Geraden AB gleiche Linien zu ziehen. Fig. 13.
49. Von zwei gegebenen Punkten C, E nach irgend einem Punkte (B) der Geraden AD Linien zu ziehen, die mit dieser gleiche Winkel bilden. Fig. 21.
50. Eben so, wenn C und E auf verschiedenen Seiten von AD liegen.
51. Ein Trapez zu bilden aus drei Seiten a, b, c und W. BAC. Fig. 76.
52. Desgl. aus zwei Gegenseiten a und c und dem W. p und y.
53. Desgl. aus einer Seite b, der Diagonale BD, dem Unterschiede der Gegenseiten a — c = m und W. DCB.
54. Desgl. aus den Gegenseiten b und d, der Höhe h und Winkel CDB.
55. Desgl. aus drei Seiten a, b, c und W. CDA.
56. Ein Viereck zu bilden aus drei Seiten b, c, d, dem W. BCD und der Summe der W. (BAD + ABC). Fig. 28.
57. Desgl. aus drei Winkeln an A, B, C und zwei Gegenseiten b und d.
58. Desgl. aus drei Seiten b, c, d und den Winkeln CDB und ACB.
59. Desgl. aus den Seiten a und b, der Diagonale AC, dem W. DCB und der Summe der W. (BAD + ABC).
60. Desgl. aus drei Seiten a, b, d und zwei Gegenw. A und C.

Drittes Capitel.

Der Kreis.

§. 244. (Fig. 34.) Erklärungen. Der Kreis ist eine ebene Figur von der Beschaffenheit, daß sämmtliche Punkte ihres Umfangs von einem bestimmten Punkte (dem Centrum) gleichweit entfernt sind. Die den Kreis bildende Linie, wie auch Bogen und Sehnen, sind bereits (im §. 228.) erwähnt worden. Geht die Sehne oder Chorde, welche irgend zwei Punkte des Kreises, wie B, D, mit

einander verbindet, wie AB, durch den Mittelpunkt, so wird sie des Kreises Durchmesser oder Diameter genannt. Der von zwei Sehnen gebildete Winkel heißt Peripheriewinkel im Gegensatz des Centriwinkels, der von zwei Radien gebildet wird. Unter Secante versteht man jede den Kreis durchschneidende, also theils außer theils in demselben liegende gerade Linie, wie EF; unter Tangente aber eine solche, die den Umfang des Kreises berührt, das heißt, irgend einen Punkt mit demselben gemein hat, ohne ihn zu durchschneiden. Zwei Kreise lassen sich in Beziehung auf einander völlig außerhalb oder innerhalb, umschließend oder eingeschlossen schneidend oder berührend denken. Die Berührung kann (nach §. 235, 3.) entweder von außen oder von innen Statt finden. Fallen die Mittelpunkte zweier Kreise zusammen, so werden sie concentrisch, im Gegentheil excentrisch genannt. Eine, die Mittelpunkte von zwei excentrischen Kreisen verbindende, gerade Linie nennt man die Achse derselben. Durch die geschlossene Verbindung von drei oder mehren Sehnen entsteht eine dem Kreise eingeschriebene Figur, durch die geschlossene Verbindung von Tangenten hingegen eine denselben umschriebene. Umgekehrt kann man im ersten Falle den Kreis als die umschriebene, im zweiten als die eingeschriebene Figur betrachten.

§. 245. Lehrsätze über die Sehnen im Kreise.

1. (Fig. 35.) Jede Sehne HK liegt völlig innerhalb des Kreises.

Denn da, wenn man aus dem Centrum die Senkrechte CI und irgend eine andere Gerade CO auf HK zieht (nach §. 273, L. 9, Zus. II.), $CO < CH$ sein muß, so kann kein Punkt des Kreisumfangs auf HK oder gar innerhalb des Dr. CHK liegen.

2. (Fig. 35.) Der Durchmesser ist die größte aller Sehnen. Denn jede andere Sehne FG ist kleiner, als $FC + CG$, d. h. als AB.

Zusatz. Durch zwei Punkte F, G läßt sich mit dem Radius FC ein Kreis beschreiben, wenn $FC > \frac{1}{2} FG$ ist. (Aufg. 1, §. 250.)

3. (Fig. 34.) Durch jeden Durchmesser AB entstehen zwei congruente Halbkreise.

Denn denkt man sich den Bogen ADB auf AEB gelegt, so müßten bei der Annahme, daß beide einander nicht deckten, Punkte des einen oder andern nicht gleichweit vom Mittelpunkte entfernt sein, was dem Begriffe des Kreises widerstreitet.

4. (Fig. 35.) Zu gleichen Bogen des nämlichen Kreises gehören gleiche Sehnen und umgekehrt.

Beweis durch Aufeinanderlegen der Linien.

5. (Fig. 35.) Zu dem größeren Bogen gehört die größere Sehne und umgekehrt.

Denn es sei: I. Bogen HK > EG und KD = EG, so folgt aus §. 273, L. 13, daß auch Sehne KH > Sehne KD oder GE sein muß.

II. Sehne KH > EG, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß Bogen GE nicht = KH, noch > KH sein kann.

6 (Fig. 35. Der auf der Sehne FG senkrechte Radius CE theilt Sehne und Bogen in zwei gleiche Theile.

Denn da Dr. CLF ≌ CLG, so ist auch FL = LG; und da ferner Dr. ELF ≌ ELG, so folgt, daß FE = EG, also auch Bogen FE = EG.

Zusatz I. Der Mittelpunkt des Kreises (C) und die Mitte des Bogens (E), so wie der zugehörigen Sehne (L), liegen also in der nämlichen geraden Linien.

Zusatz. II. Durch drei Punkte, F, G, B, welche nicht in gerader Linie liegen, läßt sich immer ein Kreis legen. (Aufg. 2—6, §. 250.)

7. (Fig. 35.) Zwei gleiche Sehnen sind vom Centrum gleichweit entfernt und von zwei ungleichen ist die kleinste die entfernteste

Denn sei: I. Sehne FG = HK, so ist in den gleichschenkligen congruenten Dr. CGF und CHK (nach §. 237, L. 17.) die Senkrechte CI = CL.

Sei II. Sehne HK > EG und demnach HD = EG, so muß eine aus C auf HD gezogene Senkrechte CP die Sehne HK nothwendig in einem Punkte O durchschneiden: folglich ist CP > CO > CI.

8. (Fig. 36.) Zwei Sehnen AF, BE, die nicht Durchmesser sind, können einander nicht halbiren.

Denn angenommen, D wäre die Mitte von AF und BE, so müßte CD eine Senkrechte auf beiden Sehnen zugleich sein, welches unmöglich ist.

§. 246. Lehrsätze über Secanten und Tangenten.

1. (Fig. 35.) Eine gerade Linie HK kann den Kreis in nicht mehr als zwei Punkten durchschneiden.

Denn angenommen, es gäbe mehre Durchschnittspunkte H, O, I, K in der Geraden HK, so wäre CH = CO = CI = CK, welches (nach §. 237, L. 9, Zus. II.) unmöglich ist.

2. (Fig. 37.) Wenn ein Kreis und eine Gerade zwei Punkte D, E gemein haben, so schneiden sie einander.

Denn die verbindende Sehne DE ist (nach §. 245, L. 1.) der innerhalb des Kreises liegende Theil der Geraden, und diese mithin eine Secante.

3. (Fig. 37.) Zwischen zwei parallelen Secanten DE, FG, liegen gleiche Bogen des Kreises.

Denn die Senkrechte CB halbirt die Bogen FBG und DBE, so daß FB — DB = GB — EB.

4. (Fig 34.) Eine gerade Linie GE kann einen Kreis nur in einem Punkte B berühren.

Denn angenommen, sie könnte mit dem Kreise außer B noch irgend einen zweiten Punkt gemein haben, so würde sie (nach L. 2.) eine Secante sein gegen die Vg.

5. (Fig. 37.) Die an dem Endpunkte des Radius CB gezogene Senkrechte BK ist Tangente des Kreises.

Denn da jede beliebige Hypotenuse CK > CB, so hat die Senkrechte BK keinen andern als den Punkt B mit der Kreislinie gemein. (Aufg. 7—9, §. 250.)

6. (Fig. 37.) Zwei aus einem Punkte K an den Kreis gezogene Tangenten KB, KE sind einander gleich.

Denn die Dr. CBK und CEK sind (nach §. 236, L. 17.) congruent.

Zusatz. (Fig. 34.) In jedem, einem Kreise umschriebenen, Viereck EGIK sind die Summen der Gegenseiten einander gleich.

Denn da IA = IF, KA = KH, GB = GF, EB = EH, so folgt durch Summirung, daß IK + GE = IG + KE ist.

Anmerkung. Die Sehne, welche die beiden Berührungspunkte B, E (Fig. 37.) verbindet, wird Berührungssehne (in Beziehung auf den Punkt K) genannt.

(Aufg. 10—15, §. 250.)

§. 247. *Lehrsätze über zwei Kreise.

1. (Fig. 38.) Zwei Kreise, die einander in irgend einem Punkte D schneiden oder berühren, können keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

Denn nimmt man einen solchen in C an, so müßten CA und CB beide = CD sein, welches unmöglich ist.

2. (Fig. 39.) Wenn zwei Kreise einander durchschneiden, so geschieht dieses in zwei Punkten.

Denn sei A ein Durchschnittspunkt der Kreise um C und D, so ist, wenn ein Dr. CDB ≌ CDA auf der anderen Seite von CD construirt wird, B nothwendig ein zweiter Durchschnittspunkt, da CB = CA und DB = DA ist. Angenommen nun, es gebe auf dem Umfange des Kreises um D noch einen dritten Durchschnitt E, so müßte CE = CA sein, welches (nach §. 237, L. 13.) unmöglich ist.

3. (Fig. 39.) Wenn zwei excentrische Kreise zwei gemeinschaftliche Punkte A, B haben, so schneiden sie einander.

Denn zieht man aus dem Mittelp. C irgend eine den Kreis (D) in E und F schneidende Gerade, so ist (nach §. 237, L. 13.) CE < CA und CF > CA, also E innerhalb und F außerhalb des Kreises (C).

4. (Fig. 39.) Wenn zwei Kreise in zwei Punkten, A und B, einander schneiden, so steht ihre Achse CD senkrecht auf der gemeinschaftlichen Sehne AB und halbirt dieselbe.

Denn die, durch die Mitte G der Sehne AB senkrecht gezogene Linie muß (nach §. 245, L. 6.) durch die Mittelpunkte der Kreise gehen, und ist folglich deren Achse.

5. (Fig. 39.) Zwei Kreise schneiden einander, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte geringer als die Summe und größer als der Unterschied ihrer Radien ist.

Denn in diesem Falle können aus CD und den Radien AD, AC zwei congruente Dr. ACD und BCD construirt werden, deren Scheitel A und B Durchschnittspunkte der mit CA und DA beschriebenen Kreise werden.

6. (Fig. 40.) Wenn zwei Kreise einander berühren, so geschieht dieses nur in einem Punkte.

Denn angenommen, sie hätten außer dem Punkte B noch einen zweiten Punkt E gemein, so schnitten sie einander nach L. 3, welches der Vg. widerspricht.

7. (Fig. 40.) Wenn zwei Kreise einander in irgend einem Punkte B berühren, so geht ihre Achse durch den Berührungspunkt.

Denn angenommen, es könne eine andere Gerade, als der verlängerte Radius DB des einen Kreises den Mittelpunkt des andern, etwa in C, treffen, also CD die Achse sein, so hätte man für die beiden Fälle der Berührung, da DG = DB und CE = CB wäre:

I. CE + EG + GD, d. i. CD > CB + BD.

II. CD + DB oder CD + DG > CB und mithin auch > CE, woraus DG > DE folgt, welches beides unmöglich ist.

8. Zwei Kreise berühren einander von außen oder von innen, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte der Summe oder der Differenz ihrer Radien gleich ist.

Denn der Vg. gemäß müssen die Endpunkte beider Radien in einem Punkte B zusammenfallen. Angenommen nun, die Kreise könnten außer B noch einen zweiten Punkt E gemein haben oder schnitten einander (nach L. 2.) so würde die Sehne BE von der Achse halbirt werden, welches unmöglich ist.

(Aufg. 16—22, §. 250.)

§. 248. Lehrsätze über Winkel im Kreise.

1. (Fig. 4.) Die Centriwinkel eines Kreises verhalten sich, wie die zwischen ihren Schenkeln enthaltenen Bogen.

Denn sei der Bogen BD im Bogen AB pmal, in AD qmal enthalten, so gilt das Nämliche von den Winkeln ACB und

ACD, indem man (nach §. 230.) BD auf AB und AD wiederholt abträgt. Hieraus folgt die Proportion:

(1) W. ACB : W. ACD = AB : AD.

Anmerkung. Dieselbe bleibt auch dann gültig, wenn die Bogen incommensurabel sein sollten.

Denn angenommen, in diesem Falle sei:

(2) W. ACB : W. ACD = AB : AE,

und zwischen D und E ein Punkt K so gewählt, daß AK mit AB commensurabel sei, also nach (1):

(3) W. ACB : W. ACK = AB : AK,

so folgt durch Verbindung von (2) und (3):

(4) W. ACD : W. ACK = AE : AK,

welches unmöglich ist. Also gilt auch hier (1) und nicht (2).

2. (Fig. 41.) Jeder Peripheriewinkel, ADB, ist halb so groß, als der Centriwinkel ACB, der mit demselben auf gleichem Bogen steht.

Denn wenn man den Diameter DF zieht, so ist (nach §. 237, L. 6. und 3.) W. ACF = CAD + CDA = 2CDA; und eben so W. BCF = CDB + DBC = 2CDB; also die Summe ACB = 2ADB. Eben so kann man es für die Winkel ADB' und ACB' durch Abziehen beweisen.

Zusatz. Alle auf gleichem Bogen AB stehende Peripheriewinkel G, D, H, K . . . sind einander gleich.

3. (Fig. 41.) Alle auf den Endpunkten eines Durchmessers stehende Peripheriewinkel sind rechte.

Denn zieht man durch den W. ABK den Durchmesser BG, so ist (L. 2.) W. ABG = $\frac{1}{2}$ACG und W. KBG = $\frac{1}{2}$KCG, also W. ABK = $\frac{1}{2}$(ACG + KCG), d. i. = R.

4. (Fig. 42.) Die gegenüberstehenden Winkel eines im Kreise beschriebenen Vierecks ABDE betragen zusammen zwei rechte.

Denn da (nach L. 2, Zus.) W. o = p und W. r = q, so ist W. A + o + r = W. A + p + q, d. i. W. A + D = 2R.

Zusatz. Ein durch drei Eckpunkte eines Vierecks, dessen gegenüberstehende Winkel 2R betragen, gelegter Kreis muß also auch den vierten berühren.

5. (Fig. 41.) Jeder, auf einer Sehne AB stehende Peripheriewinkel ist dem, von ihr und einer Tangente gebildeten, Winkel ABL gleich.

Denn es ist, wenn der Diameter BG gezogen wird, W. GAB = R und nach Vg. auch W. GBL = R, also W. AGB = ABL, weil beide mit W. ABG einen rechten ausmachen. Ist aber W. G = ABL, so gilt (nach L. 2, Zus.) dasselbe von D, H, K ꝛc.

6. (Fig. 37.) Der auf einer Sehne BE stehende Centriwinkel ist Supplement des von den Tangenten eingeschlossenen.

Denn die Summe der W. $C + B + K + E = 4R$, weniger $B + E = 2R$, läßt für W. $C + K$ zwei R übrig.
[Aufg. 23—34, §. 250.]

§. 249. Lehrsätze über die regulären Polygone.

1. In jedes reguläre Polygon kann ein Kreis beschrieben werden.

Denn die auf der Mitte der Seiten errichteten Senkrechten müssen (nach §. 242, L. 4.) einander im Mittelpunkt der Figur treffen und gleich sein: mit einer solchen als Radius läßt sich mithin ein Kreis im Innern der Figur construiren, deren Seiten dann als Tangenten zu betrachten sind.

2. Um jedes reguläre Polygon kann ein Kreis beschrieben werden.

Denn (nach §. 242, L. 4) läßt sich ein von allen Ecken der Figur gleichweit entfernter Mittelpunkt derselben finden und aus diesem durch jene Eckpunkte ein Kreis legen, worin die Seiten des Polygons als Sehnen erscheinen.

3. In jeden Kreis kann ein reguläres Polygon beschrieben werden.

Denn wenn man durch die vorgeschriebene Anzahl von allgemein n Seiten die Winkelsumme am Centrum $= 4R$ dividirt, so erhält man den Centriwinkel eines eingeschriebenen regulären n-Ecks und durch dessen Sehne die Seite desselben.

4. Um jeden Kreis kann ein reguläres Polygon beschrieben werden.

Denn wenn die Theilungslinien der n Centriwinkel als Radien bis zum Anfange des Kreises gezogen sind, so darf man nur an deren Endpunkte Tangenten ziehen, die (nach §. 246. L. 6) unter gleicher Länge einander durchschneiden und das n-Eck bilden müssen.
[Aufg. 35—37, §. 250.]

§. 250. Aufgaben.

1. Durch zwei gegebene Punkte F, H einen Kreis zu legen, dessen Radius $= a$ sei. Fig. 34.
2. Einen Kreisbogen in 2, 4, 8, 16 . . . gleiche Theile zu theilen.
3. Den Mittelpunkt des Kreises zu finden, von welchem ein Bogen HDK gegeben sei. Fig. 35.
4. Durch drei, nicht in gerader Linie liegende Punkte einen Kreis zu legen.
5. Zu untersuchen, ob durch vier gegebene Punkte A, B, C, D ein Kreis gelegt werden könne.
6. Den Radius eines Kreises zu finden, wenn eine Sehne desselben $= m$, und ihr Abstand vom Centrum $= K$ gegeben sind.

7. An einem Punkte B im Umfange eines Kreises eine Tangente zu ziehen. Fig. 34.
8. Eben so eine Tangente parallel der Geraden DE. Fig. 37.
9. Desgleichen eine Tangente von dem Punkte K. Fig. 43.
10. Einen Kreis, dessen Radius = a, durch den Punkt F zu legen, der die gegebene Grade FG berühre. Fig. 34.
11. Einen Berührungskreis, dessen Radius = a, in einem gegebenen Winkel BEK zu construiren. Fig. 34.
12. Desgleichen zwischen zwei Parallelen GE, KI, so daß der Kreis durch einen gegebenen Punkt D gehe. Fig. 34.
13. Eine Sehne DE von gegebener Länge und Richtung in einen Kreis (C) zu legen. Fig. 37.
14. Auf der Seite eines Dreiecks das Centrum C eines Kreises zu bestimmen, der seine andern Seiten berühre.
15. Die vierte Seite eines Vierecks um den Kreis (C) zu finden, wenn die andern drei Seiten p, q, r gegeben sind.
16. Mit den Radien a, b Kreise zu beschreiben, die einander in C durchschneiden und deren Mittelpunkt auf der Geraden AB liegen. Fig. 32.
17. Mit den Radien a, b zwei Kreise zu beschreiben, die einander (von außen oder von innen) berühren.
18. Desgleichen drei einander von außen berührende Kreise mit gleichen Radien = p.
19. Eben so mit ungleichen Radien = p, q, r.
20. Durch einen Punkt O und einen Punkt B im Umfang des Kreises M einen Berührungskreis zu legen. Fig. 40.
21. Desgleichen, wenn statt B der Radius DB gegeben ist. Fig. 40.
22. Desgleichen, wenn zwei Kreise (C) und (D) und der Radius a des sie gemeinschaftlich berührenden gegeben sind. Fig. 39.
23. Ueber einer Geraden FD, als Hypotenuse, ein rechtwinkl. Dr. zu construiren, dessen eine Cathete = DB sei. Fig. 34.
24. In einem gegebenen Kreise ein Rechteck zu construiren, wovon eine Seite = m sei.
25. Den Bogen GAD eines Kreises (C) vermittelst paralleler Geraden zu halbiren. Fig. 46.
26. In einem gegebenen Kreise (C) ein Dreieck zu construiren, dessen Höhe = h und dessen Winkel an der Spitze = δ sei. Fig. 41.
27. Desgleichen ein Viereck ABDE, worin eine Seite AB = m und von den beiden nicht anliegenden Winkeln einer = δ, der andere = ε sei. Fig. 42.
28. Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, von welchem ein Punkt B mit davon ausgehender Sehne BA und Tangente BL gegeben sei. Fig. 41.

29. Einen Kreis durch zwei gegebene Punkte A, B zu beschreiben, so daß der gegebene Winkel ADB Peripheriewinkel auf dem Bogen AB werde. Fig. 41.
30. Ein Dreieck zu construiren aus der Grundlinie a, dem Gegenwinkel α und der Höhe h.
31. Einen Kreis um ein Dreieck ABC zu beschreiben. Fig. 23.
32. Einen Kreis in ein Dreieck ABC zu beschreiben. Fig. 27.
33. Um einen gegebenen Kreis (C) ein Dreieck zu construiren, das mit einem gegebenen Dr. ABC gleiche Winkel habe. Fig. 44. I.
34. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, das mit einem andern ABC gleiche Winkel habe. Fig. 44, II.
35. Ein Quadrat in und um den Kreis (C) zu beschreiben. Fig. 45.
36. Ein reguläres Sechseck in und um den Kreis (C) zu beschreiben. Fig. 46.
37. Ein reguläres Dreieck in und um den Kreis (C) zu beschreiben. Fig. 46.

---

38. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.
39. Um einen Kreis sechs andere zu legen, so daß sie jenen und einander von außen berühren.
40. Von einem Punkte C außerhalb eines Kreises eine Secante CA so zu ziehen, daß deren, in den Kreis fallender Abschnitt AD einer gegebenen Linie m gleich sei. Fig. 63.
41. Von irgend einem Punkte der Geraden AK an einen gegebenen Kreis (C) eine Tangente von gegebener Länge zu legen. Fig. 43.
42. Zwischen zwei Tangenten MD, MG eines gegebenen Kreises (C) eine Gerade von gegebener Länge (TO oder LN) als dritte Tangente zu legen. Fig. 46.
43. Durch vier gegebene Punkte ein Rechteck zu legen, dessen eine Seite = m sei.
44. In ein gegebenes Quadrat ein anderes von gegebener Seite m einzuschreiben.
45. In einen Quadranten ACD einen, den Bogen AFD und beide Radien berührenden Kreis zu beschreiben. Fig. 45.
46. In ein gleichseitiges Dreieck drei einander und die Dreiecksseiten paarweise berührende Kreise zu construiren.
47. Ein Dreieck von gegebener Grundlinie c und Höhe h in einen gegebenen Kreis zu beschreiben.
48. Desgl., wenn statt der Grundl. der Gegenw. γ gegeben ist.
49. Ein Parallelogramm ABCD aus der Diagonale BD, der Höhe h und dem W. x zu construiren. Fig. 29.
50. Desgleichen, wenn die Grundlage a, die Höhe h und der Winkel der Diagonalen, AMB, gegeben ist.

Viertes Capitel.

Die Aehnlichkeit der Figuren.

§. 251. (Fig. 47.) Verhältniß der Linien. Unter dem Verhältniß zwei begränzter Linien **AB** und **CD** versteht man die Angabe, wie oft irgend ein gemeinschaftliches Maß in beiden enthalten sei. Findet sich z. B. eine, als Längenmaß gewählte Linie k in der ersten 10mal, in der zweiten 14mal, oder ein anderes Maß g in der ersten 15=, in der zweiten 21mal, so verhält sich:

$$AB : CD = 10k : 14k = 15g : 21g = 5 : 7.$$

Die Zahl, welche angiebt, wie oft das erste Glied (AB) gesetzt werden müsse, um das zweite (CD) zu erzeugen, heißt der Factor, dagegen die, welche angiebt, wie oft das zweite Glied (CD) in dem ersten (AB) enthalten sei, der Quotient des Verhältnisses. Im vorstehenden Beispiele ist der Factor $= \frac{7}{5}$, der Quotient $= \frac{5}{7}$; allgemein, wenn man $AB : CD = m.k : n.k = m : n$ setzt, ist der Factor des Verhältnisses $= \frac{n}{m}$, der Quotient $= \frac{m}{n}$.

Findet sich bei der Vergleichung zweier Paare von Linien (AB, CD und ab, cd), daß die Quotienten beider Paare einander gleich sind, so nennt man diese verhältnißgleich oder proportionirt. So ist z. B., wenn $AB = 10k$, $CD = 15k$, $ab = 4g$, $cd = 6g$ angenommen werden:

$$(1)\ ab : bc = 4g : 6g = 2 : 3,$$
$$(2)\ AB : BC = 10k : 15k = 2 : 3,$$
$$\text{folglich } (3)\ ab : bc = AB : BC.$$

So wie diese Proportion (gleichbedeutend mit $4g : 6g = 10k : 15k$ oder $4 : 6 = 10 : 15$), ist eine jede Verhältnißgleichung, deren Glieder Linien ausdrücken, als eine Proportion von Zahlen zu betrachten, welche die Werthe jener Linien darstellen. In Absicht solcher, durch Vergleichung von Linien entstehender Proportionen gelten mithin nothwendig die nämlichen Sätze, welche (§§. 67—69) für Zahlen überhaupt erwiesen sind.

§. 252. Begriff der Aehnlichkeit. (Fig. 47.) Wählt man auf mehren in einem Punkte O zusammenlaufenden Convergenten oder Strahlen beliebige Punkte a, b, c . . . und verbindet dieselben durch gerade Linien, so entsteht eine Figur abc . . ., deren Seiten dem Convergenzpunkte O, als gemeinschaftlichen Scheitel, gegenüber liegen. Durch Verbindung einer zweiten Reihe

auf den Convergenten beliebig gewählter Punkte A, B, C . . . erhält man eine zweite Figur ABC . . . . Beide Figuren, deren Ecken demnach paarweise auf den nämlichen Convergenten liegen, werden homolog genannt. Dieselbe Benennung gilt ferner:

1) von den Punkten A und a, B und b . . . ., welche auf der nämlichen Convergente liegen;

2) von den Linien AB und ab, BC und bc . . . ., welche homologe Punkte verbinden;

3) von den Abschnitten der Convergenten OA und Oa, OB und Ob . . ., welche den Convergenzpunkt O mit homologen Punkten verbinden.

Nimmt man ferner an, daß alle Convergenten, welche in einem Punkte O (Fig. 48.) zusammentreffen, von dem Umfange zweier Figuren abcd . . . . und ABCD . . . . verhältnißgleich geschnitten werden, so daß nämlich:

$$Oa : OA = Ob : OB = Oc : OC = Od : OD \ldots$$

sei, so werden die Figuren einander ähnlich genannt.

Zwei Figuren ABCDE, abcde, sind also einander ähnlich, wenn bei irgend einer Lage derselben die von irgend einem Punkte O ausgehenden Geraden von ihrem Umfange verhältnißgleich geschnitten werden, wie dieses z. B. bei zwei concentrischen Kreisen jedesmal der Fall ist. Der Convergenzpunkt O (welcher mit Beziehung auf die vorausgesetzte Eigenschaft der Figuren auch deren Aehnlichkeitspunkt genannt wird) kann sich hiebei eben so wohl außerhalb, als innerhalb der Figur (Fig. 48.), auf einer Seite oder in einer Ecke derselben (Fig. 49.) befinden.

Nach der gewöhnlichen Erklärung sind ähnliche Figuren solche, deren Winkel einander paarweise gleich und deren homologe (d. h. die gleichen Winkel einschließende) Seiten proportionirt sind. Aber abgesehen davon, daß es zweifelhaft erscheint, ob diese beiden Bedingungen bei Figuren aller Art zugleich stattfinden können, ist eine solche Erklärung der Aehnlichkeit viel zu beschränkt, da sie sich nur auf geradlinige Figuren der Ebene bezieht, und weder auf krummlinige Figuren, noch auf die Gestalten des Raumes überhaupt Rücksicht nimmt. Die obige Definition der Aehnlichkeit umfaßt dagegen alle nur denkbaren Fälle und enthält die herkömmliche Erklärung als einfache Folgerung, sofern sie auf geradlinige Figuren der Ebene angewendet wird.

Die gleiche Gestalt zweier Figuren (§. 220, 2) kann nun näher dahin bestimmt werden, daß dieselben einander ähnlich sein müssen; die Andeutung dafür ist das Zeichen ∾, z. B. ABCD ∾ abcd.

§. 253. Lehrsätze von den Convergenten.

1. (Fig. 50.) Zieht man durch die Endpunkte zweier Pa=

rallelen (AB, TK) Convergenten, so sind die homologen Abschnitte derselben verhältnißgleich.

Denn man denke sich die Linie OB in n gleiche Theile OD, DE, EF . . . . getheilt, die Parallelen DP, EQ . . . . und aus P, Q . . . . die Linien Pp. Qq . . . . mit OB parallel gezogen, so ist (nach §. 240, L. 4) $Pp = DE$, $Qq = EF$ . . . ., also $OD = Pp = Qq$ . . . . und da die Winkel an P, Q, R . . . . (nach §. 233. L. 12) denen an A und O gleich sein müssen, Dr. $ODP \cong PpQ \cong QqR$ ꝛc. Folglich ist $OP = PQ = QR$ . . . ., d. h. die Seite AO durch die Parallele in eben so viele gleiche Theile getheilt, als OB; und demnach $OB : OD = OA : OP$, oder allgemeiner, wenn man durch die Parallele KT auf OB eine Länge $= m . OD$ abgeschnitten denkt, wonach $OT = m . OP$ sein muß: $OB : OK = OA : OT$.

Anmerkung. *Die Proportion (1) $OB : OK = OA : OT$ bleibt auch dann gültig, wenn OB und OK incommensurabel sein sollten. Denn angenommen, es sei in diesem Falle (2) $OB : OK = OA : OU$, so ziehe man durch einen Punkt zwischen T und U mit AB eine Parallele LV so, daß OL und OB commensurabel werden. Dann ist

(3) $OB : OL = OA : OV$, also durch Vergleichung mit (2) endlich
(4) $OK : OL = OU : OV$, welches unmöglich ist.

Zusatz. Aus der Proportion I. $OB : OK = OA : OT$ folgt:

II. $OB : OA = OK : OT$.

Ferner $(OB - OK) : OK = (OA - OT) : OT$, oder

III. $BK : OK = AT : OT$.

Eben so ist (1) $FG : OF = RS : OR$,
also auch (2) $FG : RS = OF : OR = OK : OT$,
und folglich (3) $FG : OK = RS : OT$.

Vergleicht man diese Proportion mit III., so ergiebt sich

IV. $BK : FG = AT : RS$.

2. (Fig. 50.) Sind die homologen Abschnitte der Convergenten zweier Linien (AB, TK) verhältnißgleich, so sind diese Linien parallel.

Denn angenommen, eine andere Linie UK sei der AB parallel, so folgt aus dem vorigen Satze die Proportion $OK : OB = OU : OA$, welche der Voraussetzung $OK : OB = OT : OA$ widerspricht, also unmöglich ist.

Zusatz I. (Fig. 48.) In zwei ähnlichen Dreiecken ABC, abc sind die Winkel einander paarweise gleich.

Zusatz II. (Fig. 48.) In zwei ähnlichen Vielecken ABCD . . . . und abcd . . . . sind die Winkel einander paarweise gleich.

3. (Fig. 51.) Sind die Abschnitte auf den Convergenten der

Linien AB, ab verhältnißgleich, so stehen beide Linien selbst zu einander im Verhältniß jener Abschnitte.

Denn zieht man aus A und a mit OB die Parallelen AC, ac, sowie OC par. AB, (so ist (§. 240, L. 4) Oc = ba, OC = BA, also Oa : OA = Oc : OC, d. i. = ab : AB.

Zusatz I. (Fig. 48.) In zwei ähnlichen Dreiecken ABC, abc sind die homologen (oder gleichen Winkeln gegenüber liegenden) Seiten verhältnißgleich.

Zusatz II. (Fig. 48.) In zwei ähnlichen Vielecken ABCD.... und abcd .... sind die homologen (oder gleichen Winkeln der Convergenten gegenüber liegenden) verhältnißgleich.

4. *(Fig. 52.) Sind zwei Parallelen AB, ab mit den Abschnitten einer, durch ihre Anfangspunkte gelegten Linie AO verhältnißgleich, so ist O der Convergenzpunkt für die, durch die Endpunkte gezogene Linie Bb.

Denn angenommen, die verlängerte Bb treffe einen andern Punkt P, so hätte man (L. 1) AP : aP = BP : bP und (L. 3) AP : aP = AB : ab. Aus der Voraussetzung AO : aO = AB : ab würde also folgen, daß AP : aP = AO : aO oder (AP — aP) : aP = (AO — aO) : aO, d. i. Aa : aP = Aa : aO, welches unmöglich ist, wenn O und P nicht zusammenfallen.

Anmerkung. Die vorstehenden vier Fundamentalsätze behalten ihre volle Gültigkeit auch für den Fall, wo die Convergenten einander zwischen den Parall. AC und FD (Fig. 56.) in einem Punkte M durchschneiden. Denn in diesem Falle läßt sich jedesmal auf der Seite der größeren Linie (AC) ein dem kleineren (MFD) congruentes Dreieck bilden, wodurch man wieder zu der früheren Construction gelangt. (Aufg. 1—5. §. 260.)

§. 254. Lehrsätze über die Aehnlichkeit der Dreiecke.

1. (Fig. 53.) Zwei Dreiecke ABC, $\alpha\beta\gamma$ sind ähnlich, wenn die Winkel in beiden paarweise gleich sind.

Denn unter dieser Voraussetzung kann man $\alpha\beta\gamma$ so in ABC gelegt denken, daß W. A und a einander decken; da nun Winkel β oder b = B γ oder c = C sein soll, so ist bc par. BC und (nach §. 253, L. 1) ba : BA = ca : CA, folglich (nach §. 252) Dr. abc, d. i. Dr. $\alpha\beta\gamma \sim$ ABC.

2. (Fig. 53.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen ein Winkel gleich und die einschließenden Seiten verhältnißgleich sind.

Denn es ist, wenn man W. α in A legt, $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$ oder ab : ac = AB : AC, folglich (nach §. 252) Dr. abc $\sim$ ABC, also auch $\alpha\beta\gamma \sim$ ABC.

3. (Fig. 53.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten verhältnißgleich sind.

Denn aus der Voraussetzung $\alpha\beta$: AB = $\alpha\gamma$: AC folgt, daß, wenn man ab = $\alpha\beta$ auf AB, und ac = $\alpha\gamma$ auf AC abschneidet und die Linie bc zieht, (nach L. 2) Dr abc ∾ ABC ist. Da demnach bc : BC = ab : AB und nach Vg. $\beta\gamma$: BC = $\alpha\beta$: AB, ab aber = $\alpha\beta$, so ist nothwendig $\beta\gamma$ = bc, mithin $\alpha\beta\gamma$ ∾ ABC.

4. °Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen zwei Seiten verhältnißgleich und von den nicht eingeschlossenen Winkeln der eine gleich, der andere aber gleichartig (d. h. in beiden Dreiecken ein spitzer, rechter oder stumpfer) ist.

Sei $\alpha\beta$: AB = $\beta\gamma$: BC, W. α = A, und denke man sich die Dr. mit diesen Winkeln in einander gelegt, also ab = $\alpha\beta$ und bc = $\beta\gamma$, so muß bc der Linie BC parallel sein: denn angenommen, eine andere Linie bd sei par. BC, so würde (aus §. 253, L. 1 und 3) folgen, daß ab : AB = ad : AC und ab : AB = bd : BC, während nach Vg. ab : AB = bc : BC. Demnach wäre bd = bc, welches unmöglich ist, sofern die W. bca und bda gleichartig sind.

§. 255. Lehrsätze über Linien im Dreiecke.

1. (Fig. 54.) Die aus der Spitze C eines Dreiecks willkürlich auf die gegenüberstehende Seite AB gezogene Transversalen theilen eine, derselben parallel gezogene ab, mit ihr verhältnißgleich.

Denn es ist (nach §. 253, L. 3)

$$\frac{ad}{AD} = \left(\frac{cd}{CD}\right) = \frac{de}{DE} = \left(\frac{ce}{CE}\right) = \frac{ef}{EF}$$

u. s. w. [Aufg. 6. §. 260.]

Zusatz I. Die Höhen ähnlicher Dreiecke abc, ABC, verhalten sich, wie ihre Grundlinien, da ce : CE = ca : CA = ab : AB.

Zusatz II. Werden in zwei Dreiecken ADC, FGC von gleicher Grundlinie und Höhe im nämlichen Abstande von der Basis die Parallelen ad, fg gezogen, so sind diese einander gleich.

2. (Fig. 55.) Die Transversale eines Dreiecks ABC, welche den Winkel B halbirt, schneidet die gegenüber liegende Seite verhältnißgleich den beiden andern, so daß AE : EC = AB : BC.

Denn verlängert man AB um BD = BC und zieht CD, so ist W. ABC oder 2x = p + o = 2p, also x = p und CD par. BE; folglich AE : EC = AB : BD.

3. (Fig. 56.) Drei Transversalen eines Dreiecks, wovon die eine, BE, nach der Mitte der gegenüberstehenden Seite und die beiden andern nach den Endpunkten einer Parallele derselben, FD, gezogen sind, durchschneiden einander in dem nämlichen Punkte.

Denn aus der Aehnlichkeit der Dr. MAC, MFD folgt, daß (1)

MA : MD = AC : FD. Angenommen nun, es gehe Bc, welche AC halbiren soll, nicht durch M, sondern durch einen andern Punkt m, so ist mA : mD = eA : gD, oder (da Ae = Ce = $\frac{1}{2}$AC, folglich Fg = gD = $\frac{1}{2}$FD) auch (2) mA : mD = AC : FD, also (3) MA : MD = mA : mD, oder MA : mA = MD : mD, welches unmöglich ist. Aufg. 7.

4. (Fig. 56.) Die Transversalen eines Dreiecks, welche nach der Mitte der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, schneiden einander in dem nämlichen Punkte, und zwar in einer Entfernung von den Ecken, die zwei Drittel ihrer Länge beträgt.

Denn aus der Voraussetzung BF : BA = BD : BC = 1 : 2 folgt, daß FD par. AC und deshalb auch FD : AC = BF : BA = 1 : 2 ist. Da ferner Dr. MFD ∾ MAC, so hat man MD : MA = FD : AC = 1 : 2, also AM = 2MD, AD = 3MD oder AM = $\frac{2}{3}$AD. Daß BE durch den Punkt M gehen müsse, folgt aus L. 3.

5. (Fig. 57.) Eine auf der Hypotenuse im rechtwinklichen Dr. ABC senkrechte Transversale BD zerlegt dasselbe in zwei ihm ähnliche Dreiecke ABD und BCD.

Denn aus o + y = R und o + x = R, p + y = R, folgt x = y und o = p, also Dr. ABD ∾ BCD, und jedes einzelne ∾ ABC.

6. (Fig. 57.) Für jedes rechtwinkliche Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate beider Catheten gleich*).

Denn aus der Aehnlichkeit der Dr. ABC, ABD folgt

$$AB : AC = AD : AB \text{ oder } \overline{AB}^2 = AC \, . \, AD;$$

aus der Aehnlichkeit der Dr. ABC, BCD ferner:

$$BC : AC = DC : BC \text{ oder } \overline{BC}^2 = AC \, . \, DC,$$

und durch die Addition $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC\,(AD + DC) = \overline{AC}^2$.

Zusatz I. In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Cathete der Differenz der Quadrate der Hypotenuse und der andern Cathete gleich: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

Zusatz II. *(Fig. 59.) Wird aus der Spitze eines beliebigen Dreiecks ABC eine senkrechte Transversale CE auf die Grundlinie AB gezogen, so ist

---

*) Unter Quadrat ist (nach §. 87.) hier diejenige Zahl zu verstehen, welche erzeugt wird, wenn man den Zahlenwerth einer Linie mit sich selbst multiplicirt. Ebenso bedeutet das Product zweier Linien in den folgenden Sätzen nichts Anderes, als das Product der, diese Linien angebenden Zahlenwerthe.

(1) $\overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2$;
also auch (2) $(AC + AE)(AC - AE) = (BC + BE)(BC - BE)$,
und daher (3) $(AC + AE):(BC + BE) = (BC - BE):(AC - AE)$.

Anmerkung. Die durch die Senkrechte CE (Fig. 58. oder 59.) auf AB abgeschnittene AE und BE werden Projectionen der anliegenden Dreiecksseiten AC und BC auf AB genannt.

7. (Fig. 57.) Das Quadrat einer Cathete AB ist dem Producte der Hypotenuse AC und ihrer Projection auf derselben gleich.

Denn aus $AB:AC = AD:AB$ folgt $\overline{AB}^2 = AC \,.\, AD$.

Zusatz I. Eine Sehne AB des Kreises ist mittler Proportionale zwischen dem Durchmesser AC und ihrer Projection auf demselben; $AC:AB = AB:AD$. (Aufg. 8.)

Zusatz II. Wenn man von einem Punkte B im Umfange eines Kreises die Senkrechte BD und die Sehnen BA, BC zum Durchmesser zieht, so verhalten sich die Quadrate dieser Sehnen, wie die anliegenden Abschnitte des Durchmessers; $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = AD:DC$. (Aufg. 9 und 10.)

8. (Fig. 57.) Das Quadrat der, auf die Hypotenuse gefällten Senkrechten BD ist dem Producte beider Hypotenusenabschnitte gleich.

Denn aus $AD:DB = DB:DC$ folgt $\overline{DB}^2 = AD \,.\, DC$.

Zusatz. Wenn von einem Punkte B im Umfang eines Kreises eine Senkrechte auf den Durchmesser gefällt wird, so ist diese die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten desselben; $AD:DB = DB:DC$. (Aufg. 11.)

9. *(Fig. 58.) Das Quadrat einer Dreiecksseite AB, welche einem stumpfen Winkel C gegenüber steht, ist der Summe der Quadrate beider anderen Seiten nebst dem doppelten Producte aus der einen von ihnen in die Projection der andern auf deren Verlängerung gleich.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = (AC + CD)^2 + \overline{BD}^2$$
$$\text{d. i.} = \overline{AC}^2 + 2AC \,.\, CD + \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$$
$$\text{oder} = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC \,.\, CD.$$

Eben so kann man in Beziehung auf die Senkrechte AF den Beweis führen.

10. °(Fig. 58.) Das Quadrat einer Dreiecksseite CB, welche einem spitzen Winkel A gegenübersteht, ist der Summe der Quadrate beider anderen Seiten, weniger dem doppelte Producte aus der einen von ihnen in die Projection der andern auf derselben gleich.

Denn es ist (nach L. 6):

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = (AD - AC)^2 + \overline{BD}^2$$

d. i. $= \overline{AD}^2 - 2AD \,.\, AC + \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$

oder $= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AC \,.\, AD.$

Eben so kann man in Beziehung auf die Senkr. CE den Beweis führen.

11. *(Fig. 59.) Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten AC, BC ist dem doppelten Quadrat einer Transversale CD, welche die dritte Seite halbirt, und den Quadraten der beiden Hälften dieser letzten gleich.

Denn $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2AD \,.\, DE$

und $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \,.\, DE$

Also $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, weil $AD = BD$; oder auch $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2)$.

Zusatz. *(Fig. 29.) In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadratzahlen der Diagonalen derjenigen der Seiten (s) gleich.

Denn es ist $DM = MB$, also $\overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 = 2(\overline{MD}^2 + \overline{CM}^2)$; ferner $AM = MC$ also $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2)$, mithin durch Summirung $s = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MD}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{MB}^2) = 4\overline{AM}^2 + 4\overline{MB}^2 = (2AM)^2 + (2BM)^2 = AC + BD^2$.

§. 256. Lehrsätze über die Aehnlichkeit der Vielecke.

1. (Fig. 60.) Aehnliche Polygone können in ähnliche Dreiecke zerlegt werden.

Denn da nach §. 253, L. 2, Zus. II. und L. 3, Zus. II.) in ähnlichen Vielecken abcd .... ABCD .... die Winkel paarweise gleich und die Seiten proportionirt sind, so zerfallen beide Figuren, wenn sie mit einem W. $bag = BAG$ in einander gelegt werden, durch Diagonale in ähnliche Dreiecke.

2. (Fig. 60.) Aehnliche Polygone können aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt werden, wenn alle homologen Seiten beider Dreiecksreihen in dem nämlichen Verhältniß zu einander stehen.

Ist das Verhältniß aller homologen Seiten in beiden Dreiecksreihen $= m : n$ und denkt man sie auf die nämliche Weise an einander gelegt, so ist das Vieleck abcdefg dem andern ABCDEFG ähnlich, weil

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{ad}{AD} \cdots = \frac{ag}{AG} = \frac{m}{n}$$

3. (Fig. 60.) Die Umfangslinien oder Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander wie ihre homologen Seiten.

Denn es ist, wenn

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} \cdots\cdots = \frac{m}{n}$$

(nach §. 68, L. 16) auch

$$\frac{ab + bc + cd + \text{rc.}}{AB + BC + CD + \text{rc.}} = \frac{m}{n}.$$

Zusatz. I. (Fig. 60.) Die Umfangslinien u, U ähnlicher Figuren verhalten sich, wie die homologen Abschnitte der Convergenten; d. i. u : U = af : AF = ae : AE u. s. f.

Zusatz II. (Fig. 61.) Die Umfangslinien oder Peripherien p, P zweier Kreise verhalten sich zu einander, wie deren Radien. Denn denkt man beide Kreise concentrisch in einander gelegt und ähnliche reguläre Polygone von stets zunehmender Anzahl, also stets abnehmender Größe der Seiten in beiden construirt, so nähern sich die Umfangslinien derselben unaufhörlich den Kreislinien, als ihren Gränzen, also die Proportion u : U = Ob : OB der andern p : P = Ob : OB.

4. (Fig. 61.) Alle regulären Polygone von gleicher Anzahl Seiten sind einander ähnlich.

Denn da jedes reguläre n=Eck (nach §. 242, L. 3) in n gleichschenkliche Dreiecke zerfällt werden kann, worin die Centriwinkel $= \frac{4R}{n}$ sind, so läßt sich eines dergestalt in ein anderes legen, daß diese W. einander decken und die Grundlinien parallel laufen. Hiernach ist die innere Figur der äußern ähnlich, und das Verhältniß der homologen Seiten beider dasjenige der Radien ihrer umschriebenen Kreise.

§. 257. Lehrsätze über die Linien in und am Kreise.

1. (Fig. 62.) Die Abschnitte zweier, durch einen Punkt C im Kreise gezogenen Sehnen sind verhältnißgleich.

Denn es sind (nach §. 248, L. 2, Zus.) die Dreiecke ABC und DCE winkelgleich und also ähnlich; folglich

AC : CB = CD : CE

2. (Fig. 63.) Die Abschnitte aus einem Punkte C außerhalb eines Kreises gezogener Secanten sind verhältnißgleich.

Denn die Dr. CEA und CDB sind (nach §. 248, L. 2, Z.) ähnlich, also CA : CB = CE : CD.

3. (Fig. 64.) Die Tangente aus einem Punkte C ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten jeder Secante aus C.

Denn da (nach §. 248, L. 5) W. CAB = ADB, so ist Dr. CAB $\sim$ CAD, mithin CB : AC = AC : CD.

4. (Fig. 65.) Wenn man durch den Berührungspunkt zweier Kreise Secanten legt, so sind ihre Abschnitte in beiden Kreisen verhältnißgleich.

Denn die an C liegenden Scheitelwinkel z, x und o kommen (nach §. 248, L. 5) in beiden Dr. vor; also sind auch die Sehnen AD und DB parallel, Dr. CAD ∾ CEB, und AC : CB = CD : CE.

---

5. * (Fig. 67.) Zieht man an einem Kreise eine Tangente BA von der Länge des Durchmessers, und von ihrem Endpunkte eine Secante AE durch den Mittelpunkt, so ist der äußere Abschnitt AD mittlere Proportionale zwischen der Tangente AB und dem Unterschiede AB — AD = FB.

Denn da $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$, so ist $\frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AD}{AD}$

und weil AB = DE, AD = AF ist:

$$AB : (AE - DE) = AD : (AB - AF),$$

d. i. AB : AD = AD : BF oder AB : AF = AF : BF.

Zusatz. (Fig. 68.) Da der Centriwinkel eines regulären Zehnecks $= \frac{4R}{10} = \frac{2}{5}R$, also ein jeder der beiden Winkel an der Seite BG im gleichschenkligen Dreieck BAG in diesem Falle $= R - \frac{1}{5}R = \frac{4}{5}R$ ist, so folgt, daß

(1) W. AGB = 2BAG, also wenn W. AGB durch GF halbirt wird;

(2) Dr. BFG ∾ BAG, mithin AB : BG = BG : BF.

(3) BG = FG = AF, wonach die Construction des regulären Zehnecks auf obige Theilung eines Radius AB zurückkommt. (Aufgabe 12.)

6a. * (Fig. 42.) In einem jeden, dem Kreise eingeschriebenen Vierecke ABDE ist das Product aus beiden Diagonalen der Summe derjenigen aus den gegenüberliegenden Seiten gleich. (Ptolemäischer L.)

Denn macht man den Bogen EK = BD, und zieht die Sehnen AK und EK, so sind die Dr. ABD und AFE, weil W. o = p und x = y, einander ähnlich, folglich I. AD : BD = AE : FE oder AD . FE = BD . AE. Ferner ist, weil W. x + z = y + z und q = r, das Dr. AFB ∾ AED, folglich II. AD : DE = AB : BF oder AD . BF = DE . AB, und durch Addition von I. und II.: AE (FE + BF) oder AD . BE = BD . AE + DE . AB.

6b. * (Fig. 65.) In einem jeden, dem Kreise eingeschriebenen Dreiecke ADC ist das Product aus der Höhe DH desselben in den Durchmesser DG des Kreises, dem Producte der beiden Scheitelseiten DA, DC gleich.

Denn da W. DAC = DGC und W. DHA = DCG, so hat man DA : DH = DG : DC, also DH . DG = DA . DC.

6c. * (Fig. 63.) Zieht man durch ein Dreieck ACE die be-

liebige Durchschnittslinie DB, welche die Seiten des Dreiecks in den Punkten D, G, B schneidet, so sind die Producte aus den drei abwechselnden Abständen der Durchschnittspunkte von den Ecken der Figur einander gleich; d. h. AD . CB . EG = AG . EB . CD (Lehrsatz des Menelaus.)

Denn zieht man die Linie EF parallel DB, so hat man

(1) AD : DF = AG : EG
(2) DF : CD = EB : CB,
also AD : CD = AG . EB : CB . EG
oder AD . CB . EG = AG . EB . CD.

Zusatz. Findet diese Gleichung Statt, so läßt sich indirect leicht beweisen, daß D, G, B in gerader Linie liegen müssen.

7. * (Fig. 66. I. II.) Die gemeinschaftlichen Tangenten und die Achse zweier Kreise convergiren im nämlichen Punkte.

Denn angenommen, daß die Achse von der einen Tangente in O, von der zweiten aber in einem Punkte Q geschnitten werde, so hätte man:

(1) CO : cO = CA : ca; (2) CQ : cQ = CB : cb;
und da CA = CB, ca = cb ist, (3) CO : cO = CQ : cQ,
welches unmöglich ist, sofern O und Q nicht zusammenfallen.

8. * (Fig. 66. III.) Die von irgend einem Punkte K ihrer gemeinschaftlichen Secante GK an zwei schneidende Kreise gezogenen Tangenten KH und Kh, sind einander gleich.

Denn da KF . KI = $\overline{KH}^2 = \overline{Kh}^2$, so ist KH = Kh.

9. * (Fig. 66. I. II.) Wenn man durch die Mitte L des Abstandes Pp der Berührungssehnen AB, ab zweier Kreise mit jenen eine Parallele GK zieht, so sind die von irgend einem Punkte K derselben an die Kreise gezogenen Tangenten KH und Kh einander gleich.

Denn es ist (nach §. 255, L. 6, Zus. II.)
$CL^2 - cL^2 = CG^2 - cG^2 = CK^2 - cK^2$, und da wegen AG = aG, was aus PL = pL folgt, auch $CG^2 - cG^2 = CA^2 - ca^2$ sein muß, ebenfalls:
$CK^2 - cK^2 = CA^2 - ca^2$ oder $CK^2 - CA^2 = cK^2 - ca^2$, d. i. weil CA = CH und ca = ch ist, $KH^2 = Kh^2$, folglich KH = Kh.

Anmerkung. Die Producte der Secantenabschnitte KN . KS = Kn . Ks werden mit dem Namen Potenz der Kreise, und daher die Linien KG in Fig. 66. I., II., III., als Linien der gemeinschaftlichen Potenz, oder kürzer als Potenzlinien bezeichnet.

10. * (Fig. 66, 1.) Wenn man an je zwei von drei Kreisen gemeinschaftliche Tangenten legt, so liegen deren Convergenzpunkte O, Q, R in gerader Linie.

Denn bezeichnet man die Radien beziehungsweise durch R, r, ϱ, so hat man

$$(1)\ R:r = CO:cO;\ (2)\ r:\varrho = cQ:\gamma Q;\ (3)\ \varrho:R = \gamma R:CR$$

$$\text{also } CO.cQ.\gamma R = cO.\gamma Q.CR,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung nach L. 6. c, Zusatz folgt.

§. 258. ° (Fig. 59.) Harmonische Theilung. Wenn in einer begränzten Geraden DB ein Punkt F und in ihrer Verlängerung ein zweiter Punkt A so angenommen werden, daß ihre Abstände von den Endpunkten der Geraden verhältnißgleich sind; also die Proportion

$$(1)\ DF:BF = DA:BA$$

Statt findet, so nennt man DB durch den Punkt F in Beziehung auf A (oder kürzer: nach A) harmonisch getheilt, und A, D, F, B harmonische Punkte. Die aus jener Proportion sich unmittelbar ergebende andere Verhältnißgleichung

$$(2)\ FD:AD = FB:AB$$

zeigt, daß, indem DB in F harmonisch nach A, zugleich AF in D harmonisch nach B getheilt wird. Wegen dieser gegenseitigen Beziehung der Punkte A und F, so wie D und B kann man dieselben harmonische Gegenpunkte nennen. Wird ferner ein beliebiger Punkt C außerhalb der Linie AB durch Gerade mit den vier harmonischen Punkten A, D, F, B verbunden, so werden diese harmonische Strahlen und zwar die erste und dritte, CA und CF, so wie die zweite und vierte, CD und CB, harmonische Gegenstrahlen genannt. Von den zahlreichen Sätzen über die harmonische Theilung mögen hier nur einige der einfachsten folgen.

1. (Fig. 59.) Eine Gerade DB wird harmonisch nach A getheilt, indem man aus den Punkten A, C, B Strahlen nach einem beliebigen Punkte C, und ferner durch D eine Parallele GK zu CB zieht, DK = DG macht, und K mit C verbindet.

Denn dieser Construction gemäß hat man:

$$(1)\ DF:BF = DK:BC;\ (2)\ DA:BA = DG:CB;$$

$$\text{also } (3)\ DF:BF = DA:BA.$$

Zusatz. Zu drei, in einem Punkte C convergirenden Geraden findet man den vierten harmonischen Strahl, indem man eine beliebige Durchschnittslinie AB zieht und F als harmonischen Gegenpunkt von A bestimmt.

2. (Fig. 59.) Harmonische Strahlen werden von einer beliebigen Geraden in harmonischen Punkten geschnitten.

Denn legt man durch die harmonischen Strahlen CA, CD, CF, CB die beliebige Gerade ab und durch d die Gerade gk parallel GK, so ist dk = dg, also (nach L. 1.) db in f harmonisch nach a getheilt.

3. (Fig. 56.) Werden in einem Dreiecke ABC drei Transver-

salen so gezogen, daß die eine die Grundlinie halbirt und die beiden andern deren Endpunkte mit den Endpunkten einer ihr parallelen Geraden FD verbinden, so wird die erste Transversale in den Punkten B, G, M, E harmonisch getheilt.

Denn betrachtet man die Geraden CE, CG und CB, als harmonische Strahlen, so ist M (nach L. 1.) harmon. Gegenpunkt von B, da DF par. AC, und FG = GD ist.

Zusatz. Werden die Seiten eines Dreiecks ABC in den Punkten E, D, F halbirt und diese durch Gerade verbunden, so liegen die Durchschnittspunkte auf allen drei Transversalen harmonisch.

4. (Fig. 64.) Der harmonische Gegenstrahl AD einer Geraden welche einen Winkel CAF halbirt, steht auf derselben senkrecht.

Denn zieht man die beliebige Durchschnittslinie CD und durch den Punkt B eine Gerade KL, senkrecht auf AB, so ist (nach L. 1.) der harmonische Gegenstrahl von AB parallel LK, folglich Winkel BAD = R.

Zusatz. Bilden zwei harmonische Strahlen AB, AD einen rechten Winkel, so halbirt der eine von ihnen den Winkel der beiden andern.

5. (Fig. 64.) Ein Punkt C außerhalb eines Kreises hat im Innern desselben einen harmonischen Gegenpunkt F, der in der Mitte der Berührungssehne AH liegt.

Denn zieht man die Secante CD durch des Kreises Centrum, die Tangenten CA, CH und die Berührungssehne AH, so ist Winkel BAD = R und W. x = z = y, also (nach L. 4.) F der harmonische Gegenpunkt von C.

6. (Fig. 64.) Beschreibt man über dem Abstande zwei harmonischer Gegenpunkte B, D, als Durchmesser, einen Kreis, so sind die Abstände sämmtlicher Punkte seines Umfanges von den beiden andern harmonischen Punkten C und F verhältnißgleich.

Denn zieht man von einem beliebigen Punkte P des Kreisumfangs die harmonischen Strahlen nach den Punkten C, B, F, D, von denen PD und PB einen rechten Winkel bilden, so ist (nach L. 4, Zus.) W. BPF = BPC, folglich (nach §. 255, L. 2.) PF : PC = BF : BC.

§. 259. *Bestimmung des Umfangs regulärer Polygone und des Kreises.

1. (Fig. 45.) Aus der Seite s eines regulären Vielecks im Kreise die Seite t eines regulären Vielecks um den Kreis zu bestimmen, wenn man dessen Radius mit r bezeichnet.

Man ziehe vom Mittelpunkte nach den Ecken der concentrisch und parallel gelegten ähnlichen Figuren die Convergenten Ca, Cb, Cd, Ce, und halbire den Centriwinkel ACD durch CF; dann ist

$\overline{CK}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{KD}^2 = r^2 - \frac{1}{4}s^2$, also $CK = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$ und $CK : CF = AD : ad$, oder

$$ad = \frac{CF \, . \, AD}{CK} = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}},$$

und wenn $r = 1$ gesetzt wird, $t = \frac{s}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}s^2}}$.

2. (Fig. 45.) Aus der Seite s eines regulären Vielecks im Kreise die Seite y eines eingeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu bestimmen.

Man theile die Centriwinkel und verbinde die Endpunkte der Radien CF, CG, CH, CI mit den Ecken des gegebenen Vielecks, so entsteht das neue AFDG . . . . I von doppelter Seitenzahl; in diesem ist nun $\overline{FD}^2 = \overline{KD}^2 + \overline{FK}^2$ oder wenn man $FK = CF - CK$ setzt:

$$FD^2 = \tfrac{1}{4}s^2 + r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2)} + r^2 - \tfrac{1}{4}s^2$$
$$= 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2)},$$

also die gesuchte Seite:

$$y = \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2)})},$$

und wenn $r = 1$ angenommen wird:

$$y = \sqrt{(2 - 2\sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}s^2)})}.$$

Zusatz. Hieraus ergiebt sich umgekehrt für die Bestimmung der Seite s eines regulären Polygons im Kreise aus der Seite y eines ihm eingeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl:

$$s = \frac{y}{r}\sqrt{4r^2 - y^2}.$$

3. (Fig. 45.) Aus den Seiten s und t eines regulären Vielecks im Kreise und eines ihm ähnlichen um den Kreis die Seite y eines eingeschriebenen von doppelter Seitenzahl zu bestimmen. Nach (1) ist $t = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}}$, also $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{rs}{t}$, und nach Einführung dieses Werthes wird $y = r\sqrt{\left(2 - \frac{2s}{t}\right)}$, oder wenn $r = 1$ angenommen wird, $y = \sqrt{\left(2 - \frac{2s}{t}\right)}$.

4. Denkt man sich die Kreislinie von einer Reihe innerer und äußerer regulärer Polygone eingeschlossen, deren Seitenzahl sich fortwährend verdoppelt, so werden die Werthe von s und t einander stets näher kommen und endlich so unbedeutend von einander abweichen, daß der zwischen ihnen enthaltene kleine Bogen als mit ihnen von gleicher Länge betrachtet werden darf. Bedeute T den halben Umfang des umschriebenen, S den halben Umfang des eingeschriebenen Polygons und π denjenigen des Kreises, dessen Radius als die

messende Einheit betrachtet werden soll, so wird T freilich um eine, wenn auch noch so geringe, Länge p größer als π, und um eine Länge q größer, als S sein; d. h.

$$T = \pi + p = S + q.$$

Wenn indessen die Vermehrung und damit nothwendig verbundene Verkleinerung der Polygonseiten (Fig. 46.) so weit getrieben wird, daß q äußerst geringfügig erscheint, so darf man, um einen Näherungswerth zu erhalten, $p = q$ und folglich auch $\pi = S$ annehmen oder den Umfang des Kreises durch den des eingeschlossenen Polygons ersetzen.

Gehe man z. B. von dem regulären Sechsecke aus, dessen Seiten, weil es sich in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegen läßt, dem Radius 1 des Kreises gleich sind, so erhält man nach den obigen Formeln für die Seiten der inneren und äußeren regulären n=Ecke, die den Kreis einschließen, und den halben Umfang der Figuren nebst den Unterschieden beider die nachstehenden Zahlenwerthe:

$\frac{1}{2}$n	s	t	S	T	q
3	1,000000	1,154712	3,000000	3,464136	0,464136
6	0,517638	0,535890	3,105828	3,215340	0,109512
12	0,261052	0,263304	3,132628	3,159648	0,027020
24	0,130806	0,131026	3,139348	3,144624	0,005276
48	0,065438	0,065472	3,141033	3,142656	0,001623
96	0,032722	0,032726	3,141446	3,141696	0,000250

Das halbe, dem Kreise umschriebene 2.96 = 192=Eck ist also nur um 0,00025 des Radius größer, als das eingeschriebene und muß um eine noch geringere Länge p von dem halben Umfange des eingeschlossenen Kreises abweichen. Setzt man indessen das unbekannte $p = q = 0{,}00025$, so wird $\pi = S = 3{,}141446\ldots$, welche Zahl allerdings noch in den letzten Decimalstellen zu klein, aber doch ein Näherungswerth für den Umfang des Kreises ist, den man ungleich genauer gefunden hätte, wenn die Rechnung fortgeführt wäre. So erhält man, nur wenige Schritte weiter gehend,

als halben Umfang des eing. 768=Ecks, $S = 3{,}141584$;
1536=Ecks, $S = 3{,}141590$;
3072=Ecks, $S = 3{,}141592$;

und diese Zahl, wenn auch unvollständig, stimmt mit dem vollständiger berechneten Werthe von π bis auf die sechste Decimalstelle überein.

(Fig. 61.) Sei nun abc ... f der mit dem Radius $Ob = 1$, und ABC ... F ein anderer, mit dem beliebigen Radius $OB = r$, beschriebener Kreis, dessen Umfang mit P bezeichnet werden mag,

so ist, wegen Aehnlichkeit und Proportionalität der Kreise (nach §. 256, L. 3, Zus. II.):

$$P : 2\pi = r : 1, \text{ oder } P = 2r\pi,$$

wonach man den Kreisumfang durch Multiplication des Durchmessers mit der Zahl π bestimmt.

§. 260. Aufgaben.

1. Eine gegebene Gerade in n (z. B. 7, 11, 13) gleiche Theile zu theilen.
2. Zu drei gegebenen Geraden p, q, r die vierte Proportionale zu finden, so daß $p : q = r : s$ sei.
3. An einer Geraden ab eine der gegebenen Figuren ABCDE ähnliche zu construiren. Fig. 48.
4. Einen zehntheiligen Maaßstab zu bilden, wenn eine gegebene Gerade $m = 13$ Ruthen sei.
5. Ein dem gegebenen Vieleck ABCDE ähnliches zu construiren, dessen Seiten sich zu denen des gegebenen verhalten mögen, wie aO : AO. Fig. 49.
6. Eine gerade Linie AB im Verhältniß der Zahlen $m : n : p : q$ (z. B. $3 : 4 : 5 : 7$) zu theilen. Fig. 54.
7. In einem Dreiecke ABC die Grundlinie vermöge einer ihr parallelen Geraden FD zu halbiren. Fig. 56.
8. Auf dem Durchmesser eines Kreises $AC = 20$ verhalten sich $AD : DC = 2 : 3$. Wie groß sind die Sehnen AB und CB? Fig. 57.
9. Eine Gerade AC in B zu theilen, daß sich AB : BC verhalte, wie die Quadratenzahl zweier Linien m und n; also $AB : BC = m^2 : n^2$ (z. B. $= 5^2 : 7^2$). Fig. 79.
10. Eine Gerade DE zu construiren, welche sich zu einer gegebenen DH verhalte, wie $\sqrt{p} : \sqrt{q}$, z. B. wie $\sqrt{8} : \sqrt{10}$. Fig. 79.
11. Zu zwei Geraden m und n die mittlere Proportionale zu finden.
12. In einen gegebenen Kreis ein reguläres Zehneck zu beschreiben.
13. Eben so ein reguläres Fünfeck.
14. Desgleichen ein reguläres Fünfzehneck.
15. Die Quadrate der Linien BA, BG, BC auszudrücken in Beziehung auf die Dreiecke ABC und ABG. Fig. 15.
16. Ein Dreieck zu construiren aus der Grundlinie c, dem Gegenwinkel γ und dem Verhältniß der beiden andern Seiten $a : b = m : n$.
17. Desgleichen aus dem Verhältniß der Seiten ab, einem Winkel β und der Höhe h.
18. Desgleichen aus der Höhe h, dem Verhältniß beider Abschnitte der Grundlinie c und deren Gegenwinkel γ.
19. Desgleichen aus der Grundlinie c, dem Gegenwinkel γ und der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten $b^2 + a^2 = 2m^2$.

20. Desgleichen aus der Grundlinie c, der Höhe h und der Summe der anderen Quadraten der Seiten $a^2 + b^2 = 2m^2$.
21. Desgleichen aus der Grundlinie c, der Höhe h und dem Unterschiede der Quadrate der beiden andern Seiten $a^2 - b^2 = m^2$.
22. In einem gegebenen Dreiecke ABC ein anderes, seine Seiten berührendes, DEF, von gegebenen Winkeln δ, ε, φ so zu construiren, daß eine Seite der Grundlinie AC parallel sei. Fig. 56.
23. Eben so, daß Dr. DEF dem gegebenen ABC ähnlich und eine seiner Ecken im gegebenen Punkt D der Seite BC liege. Fig. 56.
24. Eben so, daß Dr. DEF einem andern Dr. ähnlich sei und eine seiner Ecken in D falle. Fig. 56.
25. In einen gegebenen Winkel BEK und durch den gegebenen Punkt D einen berührenden Kreis zu construiren. Fig. 34.
26. Durch zwei gegebene Punkte A, F einen Kreis zu legen, der eine gegebene Gerade GE berühre. Fig. 34.
27. Einen Kreis so zu construiren, daß er einen Punkt P, eine gerade Linie KL und einen Kreis M berühre. Fig. 65.
28. Ein Quadrat zu construiren, wenn der Unterschied zwischen Diagonale und Seite desselben gegeben ist.
29. Aus der Spitze C eines beliebigen Dreiecks ABC eine Transversale CF so zu ziehen, daß sie mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Grundlinie AF und BF sei. Fig. 54.
30. An zwei Kreise (C) und (c) eine gemeinschaftliche Berührungslinie zu ziehen. Fig. 66. I. u. II.
31. Auf einer beliebigen Geraden SK einen Punkt K zu bestimmen, von welchem an zwei gegebene Kreise gleiche Tangenten zu ziehen sind. Fig. 66. I. und II.
32. Ein Trapez zu construiren aus zwei Gegenseiten a, c, dem Verhältniß der beiden andern $b:d = p:q$, und der Summe der Basiswinkel (A + B). Fig. 76.
33. Desgleichen aus zwei Gegenseiten a, c, dem Verhältniß der andern $b:d = p:q$ und einen W. B.
34. Desgleichen aus den Verhältnissen von zwei und zwei anliegenden Seiten also $a:b = m:n$ und $c:d = p:q$, einer Diagonale AC und deren Gegenwinkel B.
35. Desgleichen aus einer Seite b und den Winkeln DAC, DBC und ADC.
36. Ein Viereck zu construiren aus einer Seite d, dem Verhältniß zwei anderer $a:b = p:q$ und den drei Winkeln A, B, C. Fig. 28.
37. Desgleichen aus den 4 Winkeln B, C, DAC, ACB und einer Diagonale BD.
38. Desgleichen aus den vier Winkeln C, D, DAC, DBC und einer Seite a.

39. Desgleichen aus einer Seite c, dem Verhältniß zwei anderer a : b = p : q, einer Diagonale AC und den beiden Winkeln A und B.
40. Desgleichen aus den gegebenen Verhältnissen a : b; b : AC; AC : BD, der Seite d und dem Winkel D.
41. Zu einer, den Winkel ACB theilenden, Geraden CD den harmonischen Gegenstrahl zu finden. Fig. 54.
42. Eben so zu einer den Winkel ACB halbirenden Geraden CF. Fig. 54.
43. Zu einem Punkt F auf dem Durchmesser BD eines Kreises den harmonischen Gegenpunkt zu finden. Fig. 64.
44. Einen Punkt G auf der Geraden AB zu bestimmen, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten C, H sich wie die Geraden p und q zu einander verhalten. Fig. 13.
45. Einen Punkt zu finden, dessen Abstände von den Ecken des gegebenen Dreiecks sich wie die Geraden p, q, r zu einander verhalten.
46. Die Seite eines regulären Achtecks im Kreise zu bestimmen, wenn r = 1.
47. Die Seite eines regulären Achtecks um den Kreis zu bestimmen, wenn r = 1.
48. Aus den Seiten eines regulären Achtecks im Kreise und um den Kreis die Seite eines regulären Sechszehnecks im Kreise zu bestimmen.
49. Die Seite eines regulären Zehnecks im Kreise zu bestimmen. wenn r = 10.
50. Die Seite eines regulären Fünfecks im Kreise zu bestimmen, wenn r = 10.

Fünftes Capitel.

Die Flächenräume.

§. 261. Flächenmaaß. Den Flächeninhalt einer Figur durch ein gleichartiges Maaß anzugeben, wählt man am zweckmäßigsten wegen seiner einfachen und regelmäßigen Gestalt den Flächenraum eines Quadrats, welches die Einheit des Längenmaaßes für die Linien der auszumessenden Figur zur Seite hat. Zwar kann durch ein solches Quadrat wegen der mannigfachen Gestaltung der Figuren

nicht eine jede unmittelbar, wie eine gerade Linie durch wiederholtes Abtragen des Maaßes gemessen werden; vielmehr scheinen nur Rechtecke einer solchen Ausmessung fähig zu sein, weil diese allein aus Quadraten sich zusammensetzen lassen. Indessen wird auch dieses schon hinreichen, wenn nur Figuren von anderer Gestalt in Rechtecke gleichen Inhalts verwandelt werden können. Ja es bedarf nicht einmal der vorläufigen Verwandlung behufs einer wirklichen Ausmessung gegebener Figuren, wenn wir durch Vergleichung ihrer bestimmenden Stücke sie auf einander zu beziehen, und so mittelbarer Weise ihr Verhältniß zum Flächenmaaße anzugeben vermögen. Die Untersuchung über die Flächenräume der Figuren hat also zunächst eine Vergleichung zwischen denselben anzustellen, um ihre Gleichheit oder das Verhältniß des einen zum andern zu erkennen und dann daraus die Grundsätze ihrer Inhaltsbestimmung durch Zahlen abzuleiten.

§. 262. Lehrsätze über die Gleichheit der Flächenräume.

1. (Fig. 69.) Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen (von gleicher Höhe) sind inhaltsgleich.

Denn wenn beide mit der gleichen Grundlinie AB auf einander gelegt werden, so ist wegen der Parallelen AD, CB; AF, BE und der gleichen Seiten DC + CF = EF + CF das Dreieck DAF ≅ CBE, und folglich nach Abzug dieser gleichen Dreiecke von der ganzen Figur ABCD = ABEF.

2. (Fig. 69.) Dreiecke auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen von gleicher Höhe sind inhaltsgleich.

Man betrachte die Dr. ABC und ABF als Hälften der Parallelogramme ABCD und ABEF, so folgt der Beweis aus L. 1.

Zusatz. Jedes Dreieck ABC, welches mit einem Parallelogramm ABEF gleiche Grundlinie und Höhe hat, ist halb so groß als dasselbe.

3. (Fig. 70.) Wenn durch einen beliebigen Punkt in der Diagonale eines Parallelogramms mit dessen Seiten Parallelen gezogen werden, so sind die beiden nicht durchschnittenen Stücke einander gleich.

Denn da die Dr. ABC, ADC, so wie MGC, MFC und AEM, AHM congruent sind, so entsteht durch Abziehen der kleineren Dr. von den beiden größeren EBFM = MGDH.

4. (Fig. 72.) Das über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks construirte Quadrat ist den beiden Quadraten der Catheten an Flächeninhalt gleich. (Lehrsatz des Pythagoras.)

Es ist nämlich AELI = ACGF, weil die Hälften beider (nach L. 2, Zus.) die Dr. ABF und ACE, wegen Uebereinstimmung zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels einander gleich

sind. Dasselbe gilt von BDLI = BCHK wegen der congruenten Dr. BCD, BAK; folglich ist AD = BH + AG.

5. * (Fig. 73.) Wenn man über zwei Seiten eines Dreiecks ABC beliebige Parallelogramme construirt, die Parallelen jener Seiten bis zum Durchschnittspunkte H verlängert, durch diesen und die Spitze C der Dreiecksseiten eine gerade Linie und mit ihr aus den Endpunkten der Grundlinie AB Parallelen zieht, so entsteht (indem man M und L verbindet) ein, den beiden gegebenen, inhaltsgleiches Parallelogramm ABML. (Lehrsatz des Pappus.)

Denn wegen der Par. FH, AC; BC, DH; und AL, KH, BM ist AL = CH = BM, also das Viereck ABML ein Parallelogramm. Ferner ist (1) ACGF = ACHL, und ALHC = ALPK, folglich auch ACGF = AKPL, (2) BCED = BCHM und BMHC = BMPK, mithin auch BCED = BKPM. Also ist Par. ACGF + Par. BCED = Par. ABML.

Anmerkung. Der Pythagoräische Lehrsatz kann als bloße Folgerung aus diesem viel allgemeineren betrachtet werden.

§. 263. Lehrsätze über die Verhältnisse der Flächenräume.

1. (Fig. 74.) Die Flächenräume zweier Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundlinien.

Denn denkt man sich eine Seite AD in m gleiche Theile zerlegt, und der Basis parallele Linien durch alle Theilungspunkte gezogen, so theilen dieselben das Parallelogramm AC in m congruente kleinere. Besteht nun AK aus n Theilen von AD, so enthält das Parallelogramm AL auch n von den m Theilen des Parallelogramms AC, oder es verhält sich AL : AC = n : m = AK : AD.

Wäre aber auch das Verhältniß AK : AD nicht in ganzen Zahlen auszudrücken oder irrational, so ist dennoch diese Proportion gültig. Denn angenommen, es wäre:

(1) AL : AC = AM : AD, und ein Punkt P zwischen K und M so gewählt, daß AP mit AD commensurabel sei, so hätte man

(2) AO : AC = AP : AD, und ferner aus beiden:

(3) AL : AO = AM : AP, welches unmöglich ist. Da nun aus denselben Gründen nicht AL : AC = AN : AD sein kann, so folgt ganz allgemein, daß AL : AC = AK : AD.

2. (Fig. 69.) Die Flächenräume zweier Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Denn wenn Dr. ACD = $\frac{1}{2}$BD und Dr. BEF = $\frac{1}{2}$AE betrachtet wird, so folgt aus L. 1, daß ACD : BEF = BD AE = CD : EF.

3. (Fig. 70.) Die Flächenräume zweier Parallelogramme HG, MB, die gleiche Winkel haben, verhalten sich, wie die Producte zwei anliegender Seiten.

Denn wenn man HG und MB mit dem dritten Parallelogramm GF vergleicht, worin MG = HD und MF = EB, so ist:

$$\text{I. } \frac{GF}{MB} = \frac{GM}{ME}, \qquad \text{II. } \frac{HG}{FG} = \frac{HM}{MF},$$

$$\text{folglich } \frac{HM \,.\, GM}{MF \,.\, ME} = \frac{HG \,.\, GF}{FG \,.\, MB} = \frac{HG}{MB}.$$

4. (Fig. 75.) Die Flächenräume zweier Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich zu einander, wie die Producte der ihn einschließenden Seiten.

Denn legt man ABC auf CDE mit den gleichen Winkeln in C zusammen, so daß BCD und ACE gerade Linien bilden und zieht AD, so ist:

$$\text{I. } \frac{ABC}{ACD} = \frac{BC}{CD} \qquad \text{II. } \frac{ACD}{DCE} = \frac{AC}{CE},$$

$$\text{folglich } \frac{ABC}{DCE} = \frac{BC \,.\, AC}{CD \,.\, CE}.$$

Zusatz. Sind beide Dreiecke inhaltsgleich, so müssen auch die Producte der den gleichen Winkel einschließenden Seiten einander gleich sein und umgekehrt.

5. (Fig. 53.) Die Flächenräume ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Denn denkt man sich das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ in ABC gelegt, so ist ab : AB = ac : AC, also (L. 4.)

$$\frac{abc}{ABC} = \frac{ab \,.\, ac}{AB \,.\, AC} = \frac{ab^2}{AB^2} = \frac{ac^2}{AC^2}.$$

6. (Fig. 48. u. 49.) Die Flächenräume ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Denn da ähnliche Vielecke sich in ähnliche Dreiecke zerfällen lassen, so ist (L. 5.)

$$\frac{Oab}{OAB} = \frac{ab^2}{AB^2}, \quad \frac{Obc}{OBC} = \frac{bc^2}{BC^2}, \quad \frac{Ocd}{OCD} = \frac{cd^2}{CD^2} \text{ u. s. f.}$$

und durch Summirung aller Dreiecke (nach §. 68, L. 16.):

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{Oab}{OAB} = \frac{ab^2}{AB^2}.$$

Zusatz. Die Flächenräume ähnlicher Vielecke verhalten sich, wie die Quadrate der homologen Convergenten-Abschnitte, d. i. abcde : ABCDE = $Ob^2 : OB^2 = Oc^2 : OC^2$ u. s. w.

7. (Fig. 61.) Die Flächenräume zweier Kreise f und F, verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.

Denn betrachtet man beide Kreise als Gränzen aller einzuschreibenden regulären Polygone von gleicher Seitenzahl, so nähert die

(nach vorigen Zusatz) gültige Proportion $abcdgf : ABCDGF = Ob^2 : OB^2$ unaufhörlich der andern $f : F = Ob^2 : OB^2$ als ihrer **Gränze**, je größer man die Anzahl der Polygonseiten annimmt.

8. (Fig. 61.) Der Flächenraum eines Kreissectors k verhält sich zu dem des ganzen Kreises K, wie sein Bogen p zu dem Umfange desselben P.

Denkt man sich eine beliebig kleine Sectorfläche f als gemeinsames Maß von k und K, so wird, wenn $k = m . f$ und $K = n . f$, auch p in m, und P in n gleiche kleine Bogen zerfallen, so daß $k : K = m : n = p : P$. Wird das Verhältniß von k zu K als **incommensurabel** angenommen, so ist der Beweis der nämliche, wie in §. 248, L. 1.

§. 264. **Lehrsätze über die Inhaltsbestimmung der Figuren.**

1. (Fig. 69.) Den Flächeninhalt eines Rechtecks findet man durch Multiplication seiner Seiten.

Denn wenn man die Seite des messenden Quadrats Q mit m bezeichnet, so ist (nach §. 263, L. 3.) $ABCD : Q = AB . BC : m^2$, und da Q die Flächen-, m die Längeneinheit sein soll, $ABCD = AB . BC$.

Anmerkung. Aus diesem Grunde läßt sich jedes **Product** aus **zwei Factoren** durch die Figur eines **Rechtecks**, und wenn dieselben **gleich** sind, durch die eines **Quadrats** geometrisch versinnlichen.

2. (Fig. 69.) Den Flächeninhalt eines Parall. ABEF findet man durch Multiplication seiner Grundlinie und Höhe.

Denn es ist (nach §. 262, L. 1.) $ABEF = ABCD = AB.BC$.

3. (Fig. 69.) Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird durch das halbe Product der Grundlinie und Höhe bestimmt.

Denn da das Dr. $ABF = ABC$ als Hälfte eines Par. ABCD angesehen werden kann, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{2} AB . BC$.

4. (Fig. 76.) Der Flächeninhalt eines Trapezes wird durch das Product der Höhe in die halbe Summe der parallelen Seiten bestimmt.

Denn zieht man die Diagonale AC, so ist Dr. $ABC = \frac{1}{2} AB . GC$ und Dr. $ACD = \frac{1}{2} DC . GC$, also der ganze Inhalt

$$= \frac{1}{2} (AB + DC)\ GC.$$

5. (Fig. 45.) Den Flächeninhalt eines regulären Polygons findet man durch Multiplication seines Umfangs mit dem halben Radius des eingeschriebenen Kreises.

Denn da jedes reguläre Vieleck F sich in so viele gleichschenklige Dreiecke zerlegen läßt, als es Seiten hat, und auf diesen — als Tangenten betrachtet — die Radien als Höhen der Dreiecke senkrecht stehen, so ist (L. 3.) $F = n . \frac{1}{2} s . r = ns . \frac{1}{2} . r$, unter n die Anzahl, unter s die Länge der Seiten verstanden.

6. Den Flächeninhalt eines Kreises K findet man durch Multiplication seines Umfangs mit der Hälfte seines Radius.

Denn denkt man um den gegebenen Kreis reguläre Polygone von so vielen und so kleinen Seiten beschrieben, daß der Umfang beider Linien bis auf einen beliebig unbedeutenden Unterschied zusammenstimmt (s. §. 259, 4.), so darf man den vorigen Satz auch auf den eingeschlossenen Kreis als die Gränze aller zu umschreibenden Polygone übertragen.

Zusatz. Da der Umfang P eines Kreises, dessen Radius mit r bezeichnet wird, (nach §. 259, 4.) $= 2r\pi$ ist, so findet man K $= 2r\pi . \frac{1}{2}r = r^2 . \pi$, d. h. gleich dem Producte aus dem Quadrate des Radius und der Verhältnißzahl π.

7. Den Flächeninhalt eines Kreissectors (Kreisausschnitts) k findet man durch Multiplication seines Bogens p mit der Hälfte des Radius.

Denn da (nach §. 263, L. 8.) $k : K = p : P$ und (L. 6.) K $= P . \frac{1}{2}r$, so muß auch $k = p . \frac{1}{2}r$ sein.

Zusatz. Um ein Segment des Kreises (einen Kreisabschnitt) zu bestimmen, hat man nur das gleichschenklige Dreieck, dessen Basis die Sehne ist, von der Sectorfläche abzuziehen.

§. 265. Aufgaben.

1. Ein gegebenes Perallelogramm in ein anderes von doppelter Höhe zu verwandeln, welches einen geg. Winkel φ enthalte.
2. Ein Dreieck in ein anderes von gleicher Grundlinie und dem geg. Gegenwinkel φ zu verwandeln.
3. Ein beliebiges Polygon ABCDEF in ein inhaltsgleiches Dreieck zu verwandeln. Fig. 77.
4. Ein Dreieck ABC in ein Rechteck zu verwandeln. Fig. 78.
5. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. Fig 72. oder 57.
6. Auf einer gegebenen Geraden LN ein Parallelogramm zu construiren, das einem andern EBFM gleich sei und die nämlichen Winkel enthalte. Fig. 70.
7. Ein Quadrat zu construiren, das der Summe zwei gegebener Quadrate gleich sei.
8. Desgl. ein solches, welches ihrem Unterschiede gleich sei.
9. Zu zwei gegebenen ähnlichen Vielecken ABCDE und abcde ein drittes ähnliches Vieleck zu finden, daß der Summe jener gleich sei. Fig. 48.
10. Eben so, daß es dem Unterschiede derselben gleich sei.
11. Ein Quadrat zu construiren, daß zu einem gegebenen sich verhalte, wie eine Linie AB : BC. Fig. 79.
12. Ein Dreieck zu construiren aus der Grundlinie c, dem Gegenwinkel γ und dem Flächeninhalt $= m^2$.

13. Desgl. aus W. γ, der Höhe h und dem Inhalt $= m^2$.
14. In einem gegebenen Kreise ein Rechteck zu construiren, dessen Inhalt $= m^2$ sei.
15. Eben so ein Trapez aus dessen parallelen Gegenseiten a, c und dem Inhalt $= m^2$.
16. Ein Dreieck zu construiren, welches einem andern ähnlich und einem gegebenen Quadrate gleich sei.
17. Ein Dreieck mit den gegebenen Basiswinkeln α, β zu construiren, welches einem gegebenen Rechteck gleich sei.
18. Desgleichen, wenn Grundlinie c und Gegenwinkel γ gegeben und das Product (oder Rechteck) der andern Seiten $a . b = m^2$ sei.
19. Desgleichen aus der Grundlinie c, der Höhe h und dem Producte $a . b = m^2$.
20. Desgleichen aus der Höhe h, dem Verhältniß der Grundlinie $c : b = p : q$, und dem Flächeninhalt $= m^2$.
21. Desgl. aus dem Verhältniß von Grundlinie und Höhe $c : h = p : q$, dem Gegenwinkel γ und dem Inhalt $= m^2$.
22. Ein reguläres Sechseck (Fig. 61.) so umzuformen, daß es einem gegebenen Polygon abcdef (Fig. 60.) ähnlich werde.
23. Eine Figur abcd zu construiren, die einer gegebenen ABCD ähnlich, und dem Inhalt nach zu ihr im Verhältniß der Linien m : n sei.
24. Ein Viereck ABDE, worin zwei W. A, B nebst dem W. der Diagonalen AGB und dem Inhalt $= m^2$ gegeben sind, so zu construiren, daß sich um dasselbe ein Kreis beschreiben lasse. Fig. 42.
25. Ein Viereck aus drei Winkeln und dem Inhalt so zu bilden, daß sich in dasselbe ein Kreis beschreiben lasse.
26. Einen Kreis (M) zu construiren, der mehren andern (A), (B), (C), (D) zusammengenommen an Inhalt gleich sei.
27. Desgleichen, so daß er dem Unterschiede zweier Kreise (C) und (D) gleich sei.
28. Einen Kreis (M) zu construiren, der so groß sei, als die ringförmige Fläche zwischen zwei gegebenen concentrischen Kreisen (A) und (B).
29. Einen Quadranten zu construiren, der einem gegebenen Halbkreise gleich sei.
30. Desgleichen einen Sextanten, der einem gegebenen Quadranten an Flächeninhalt gleich sei.
31. Den Inhalt eines gegebenen Siebenecks ABCDEFG durch Zerlegung in Dreiecke nach einem gegebenen Maßstabe zu bestimmen. Fig. 60.
32. Desgleichen durch Zerlegung in Trapeze.

33. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen, dessen Inhalt = 73,45 sei.
34. Eben so eines regul. Sechsecks, dessen Inhalt = 168.
35. Die Seite eines regul. Fünfecks ist = 21,7; wie groß ist die eines andern halb so großen?
36. Der Inhalt eines Rechtecks werde, wenn man seine Grundlinie um seine Höhe vermehrt, = 1723,5; wenn man sie hingegen um die Höhe vermindert, = 323,7. Grundlinie und Höhe hieraus zu bestimmen.
37. Den Radius eines Halbkreises zu finden, der einem Dreieck gleich sei, worin die Grundlinie = 14, die Höhe = 9 sei.
38. Ein Kreis enthält 234 Quadratfuß, ein anderer 86,5. Wie verhalten sich ihre Durchmesser?
39. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, der einem Trapeze gleich sein soll, worin die Grundlinie = 17,4, die Gegenseite = 12,7 und die Höhe = 10,08 sei?
40. Den Inhalt eines regulären Achtecks zu bestimmen, wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises = 12 ist.
41. Desgleichen eines regulären Zehnecks um den Kreis, wenn dessen Radius = 17,2 ist.
42. Wie groß ist der Centriwinkel eines Kreissectors, dessen Inhalt dem eines gleichseitigen Dreiecks gleich sei, wenn dessen Seite = 14 und der Radius gleich 8 ist?
43. Die Seite eines Quadrats zu bestimmen, welches einem Kreissector gleich sei, dessen Centriwinkel 18° beträgt, wenn der Radius = 7,5 ist.
44. Den Durchmesser eines Kreises zu bestimmen, der einem Kreissegmente gleich sei, wenn der Radius = 120, und der Centriwinkel = 135° ist.
45. Das Verhältniß der Radien **R** und **r** zweier Kreise zu bestimmen, von denen der eine einem gegebenen Dreiecke, dessen Seiten = a, b, c sind, umschrieben, der andere demselben eingeschrieben sei, wenn durch h die auf der Grundlinie c senkrechte Höhe angedeutet wird.
46. Welchen Ausdruck findet man für das Product der Zahlenwerthe beider Radien?

Sechstes Capitel.

Die ebene Trigonometrie.

§. 266. Gegenstand der Trigonometrie. Da geradlinige Figuren aller Art durch Ziehung von Diagonalen sich in Dreiecke zerlegen oder auch als aus solchen zusammengesetzt betrachten lassen, ihre Untersuchung also endlich auf die jener einfachsten Figur zurückgeführt werden kann, so hat man geeignete Mittel aufzusuchen, den Zusammenhang zwischen deren Bestandtheilen auf dem Wege der Rechnung, die von der zufälligen Ausführung und dem Maaßstabe der Construction unabhängig, also im Allgemeinen zuverlässiger ist, mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen. Wenn man nun auch die Seiten des Dreiecks in beliebigem Längenmaaß und die Winkel vermöge der Kreiseintheilung in Graden, Minuten und Secunden anzugeben vermag, so stellt sich doch der Vergleichung und Verbindung solcher Zahlenwerthe ihre Ungleichartigkeit entgegen. Dieses Hinderniß wird aber aus dem Wege geräumt, wenn man im Stande ist, die Winkel durch gerade Linien zu bestimmen, weil dann die sämmtlichen Zahlenwerthe, wodurch die einzelnen Bestandtheile des Dreiecks dargestellt werden können, sich auf ein und dieselbe Längeneinheit beziehen. Die Untersuchung über diese eigenthümliche Art der Winkelbestimmung vermöge gerader Linien oder vielmehr ihrer Verhältnisse ist es nun, welche der eigentlichen Trigonometrie als Vorbereitung unter dem Namen der Goniometrie vorangeht.

I. Goniometrie.

§. 267. (Fig. 80.) Grundvorstellung. Denkt man eine Linie von bestimmter Länge **CA** aus ihrer anfänglichen Lage durch Drehung in die neue **CE** versetzt und von ihrem Endpunkte eine Senkrechte **ED** auf die ursprüngliche Richtung gefällt, so wird zugleich mit dem Winkel an **C** auch diese Senkrechte wachsen, die von ihr abgeschnittene Länge **CD** aber immer mehr abnehmen. Diese Abhängigkeit beider Linien von der Größe des Winkels bietet also ein einfaches Mittel für seine Bestimmung dar, indem einer jeden auch nur ein einziger bestimmter Winkel in dem von beiden und dem Schenkel **CE** gebildeten rechtwinkligen Dreiecke am Punkte **C** entsprechen kann. Denn für jede andere Lage des Schenkels **CE** gegen **CA** entsteht ein anderes Dreieck, und alle diese Dreiecke haben nichts, als den rechten Winkel und die constante Hypotenuse gemein, während

ihre spitzen Winkel und Catheten einer fortwährenden Veränderung unterworfen sind.

Auch wenn bei weiter fortgesetzter Drehung des Schenkels der mit der anfänglichen Richtung gebildete Winkel das Maaß eines rechten überschreitet, wird durch Fällung einer Senkrechten NM auf die Verlängerung von CA ein rechtwinkliges Dreieck gebildet, worin ein eben solcher Zusammenhang zwischen den Catheten und Winkeln herrscht. Da dieselbe Bemerkung sich für die Lage CO oder CU des drehenden Schenkels wiederholt, so sieht man leicht, daß die Fällung einer Senkrechten von dem einen auf die Richtung des andern Schenkels ein sehr einfaches Mittel ist, aus der Größe und Lage dieser Linie auf die Größe des entsprechenden Winkels zu schließen. Man kann in Beziehung auf die beiden Hauptrichtungen einer Ebene, welche durch zwei einander senkrecht schneidende gerade Linien AB und FR versinnlicht werden, eine solche vom Endpunkt einer beliebigen geneigten Linie CE gefällte Senkrechte ED ihre verticale, und das von ihr abgeschnittene Stück CD ihre horizontale Projectionen nennen; durch Länge und Richtung dieser beiden Projectionen wird dann die Lage der Linie (d. h. der Winkel, welchen sie mit CA bildet) vollständig bestimmt, z. B.

1) die Lage CE oder W. ACE durch CD und CE.
2) CN oder W. ACN CM und MN.
3) CO oder W. ACO CM und MO.
4) CU oder W. ACU CD und DU.

Denkt man sich den drehenden Schenkel von unveränderlicher Länge $= a$, mithin als Radius eines durch seinen Endpunkt beschriebenen Kreises, so folgt aus dem Vorstehenden, daß für jede Lage desselben, wenn man seine horizontale Projection durch x, die verticale durch y bezeichnet die Gleichung

$$a^2 = x^2 + y^2$$

stattfinden muß, die als die eigentliche Grundlage aller Betrachtungen der Goniometrie anzusehen ist.

§. 268. Winkelfunctionen. Da die Projectionen einer geraden Linie a als Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks, wovon sie selbst Hypotenuse ist, nothwendig kleiner sein müssen, so läßt sich allgemein.

$$(1)\ x = p \cdot a \qquad (2)\ y = q \cdot a$$

setzen, wenn man mit den Factoren p und q ächte Brüche bezeichnet, weil durch deren Multiplication nothwendig Zahlen $< a$ hervorgehen. Und da der jedesmalige Werth dieser ächten Brüche von der Form des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks, d. h. von der Größe seiner Winkel, abhängen wird, so darf man sie Winkelfunctionen (goniometrische Functionen) nennen. Derjenige ächte Bruch womit man a zu multipliciren hat, um den Werth der dem Winkel

α gegenüberstehenden Cathete zu erhalten, wird dessen Sinus, der die andere Cathete bestimmende ächte Bruch aber der Cosinus des Winkels genannt. Demnach ist (Fig. 80):

$$(1)\ ED = a \,.\, \sin.\ \alpha \qquad (2)\ CD = a \,.\, \cos.\ \alpha.$$

Kommt ferner das Verhältniß der Catheten in Betracht, so hat man entweder:

$$(3)\ \frac{ED}{CD} = \frac{a \,.\, \sin.\ \alpha}{a \,.\, \cos.\ \alpha} = \frac{\sin.\ \alpha}{\cos.\ \alpha};$$ wofür tang. α.

oder $$(4)\ \frac{CD}{ED} = \frac{a \,.\, \cos.\ \alpha}{a \,.\, \sin.\ \alpha} = \frac{\cos.\ \alpha}{\sin.\ \alpha};$$ wofür cotg. α,

d. h. Tangente und Cotangente des Winkels α als kürzere Andeutung gesetzt wird.

Endlich findet man noch, um das Verhältniß der Hypotenuse zu einer der beiden Catheten zu bezeichnen, die Kunstausdrücke Secante und Cosecante gebraucht; nämlich das Verhältniß

$$(5)\ \frac{CE}{CD} = \frac{a}{a \,.\, \cos.\ \alpha} = \frac{1}{\cos.\ \alpha}$$ durch sec. α

$$(6)\ \frac{CE}{ED} = \frac{a}{a \,.\, \sin.\ \alpha} = \frac{1}{\sin.\ \alpha}$$ durch csa. α

kürzer angedeutet. Es sind also der Winkelfunctionen im Ganzen sechs, unter denen man die vier letzten als abgeleitete von den beiden ersten als den ursprünglichen zu unterscheiden hat.

§. 269. Zusammenhang der Winkelfunctionen. Indem man die vorstehenden Benennungen auf die aus der Grundvorstellung der Goniometrie (§. 267.) sich ergebende Gleichung $a^2 = y^2 + x^2$ überträgt, erhält man den Ausdruck:

$$a^2 = (a \,.\, \sin.\ \alpha)^2 + (a \,.\, \cos.\ \alpha)^2$$

oder, wenn man beide Seiten durch a^2 dividirt:

$$(1)\ 1 = \sin.\ \alpha^2 + \cos.\ \alpha^2.$$

Werden ferner die beiden Ausdrücke

$$\frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \text{tg}\ \alpha \text{ und } \frac{\cos\ \alpha}{\sin\ \alpha} = \cot\ \alpha$$

mit einander multiplicirt, so ergiebt sich

$$(II)\ 1 = \text{tang}\ \alpha \,.\, \cot\ \alpha.$$

Die durch sin α, cos α, tg α, cot α angedeuteten Winkelfunctionen sind also Zahlen von der Beschaffenheit, daß die Einheit stets

(1) Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus;

(2) Product von Tangente und Cotangente

eines beliebigen (spitzen, stumpfen oder überstumpfen) Winkels ist.

§. 270. Umfang der Winkelfunctionen. Aus der Fundamentalgleichung $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ geht hervor, daß die Werthe von Sinus und Cosinus von 0 und 1 begränzt sein müssen. Für $\sin \alpha = 0$ ist $\cos \alpha = 1$, und umgekehrt, überhaupt aber Ver-

größerung der einen Function mit Verminderung der andern verbunden. Daraus folgt, daß die abgeleiteten Functionen tang $\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ und cotg $\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, als Quotienten veränderlicher Zähler und Nenner, die in jedem möglichen Verhältniß zu einander stehen können, jedes beliebigen ganzen und gebrochenen Zahlenwerthes von 0 bis in's Unbegränzte fähig sind; die letzten beiden aber, sec $\alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ und csc $\alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, ebenfalls eine unendliche Menge von Zahlenwerthen gestatten, die größer, als die Einheit, mithin ganze Zahlen oder unächte Brüche sein müssen.*)

§. 271. Zu- und Abnahme der Winkelfunctionen. (Fig. 80) Da der bewegliche Schenkel eines Winkels bei dessen allmähliger Vergrößerung bis zu 4R mit jeder der beiden Hauptrichtungen AB, FR viermal den nämlichen spitzen Winkel (α oder β) bilden wird, so sehen wir das nämliche Paar zusammengehöriger Projectionen y und x in allen vier Quadranten wiederkehren. Die verticale Projection y nimmt bei diesem allmähligen Wachsthum des Winkels im ersten Quadranten fortwährend zu, im folgenden dagegen wieder ab, und erleidet den nämlichen Wechsel im dritten und vierten Quadranten. Umgekehrt ist es mit der horizontalen Projection x. Hieraus folgt beim Wachsen des Winkels z:

1) zwischen 0° und 90 eine Zunahme für sin z
und eine Abnahme für cos z;
2) zwischen 90° und 180° eine Abnahme für sin z.
und Zunahme für cos z;
3) zwischen 180° und 270° eine Zunahme für sin z
und Abnahme für cos z;
4) zwischen 270° und 360° eine Abnahme für sin z
und Zunahme für cos z.

Demnach wird die Tangente $= \frac{\sin z}{\cos z}$ in ihrer Zu- und Abnahme mit dem Sinus, die Cotangente $= \frac{\cos z}{\sin z}$ dagegen mit dem Cosinus übereinstimmen, aber jede bis in's Unbegränzte wachsen können, während Sinus und Cosinus höchstens den Werth 1 zu erreichen vermögen.

---

*) Die Functionen der Secante und Cosecante verdienen, als Quotienten der Einheit und des Cosinus oder Sinus, keine besondere Berücksichtigung, und werden daher auch im Folgenden nicht weiter beachtet werden.

§. 272. Vorzeichen der Winkelfunktionen. Der Gegensatz der Lage, welcher bei den Projectionen des drehenden Schenkels zum Vorschein kommt, so bald der veränderliche Winkel z zu einem stumpfen oder überstumpfen anwächst, nöthigt (nach §. 231.), die entsprechenden Zahlenwerthe der Winkelfunctionen mit den Vorzeichen des Positiven oder Negativen zu versehen, je nachdem jener Schenkel seine Lage im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten hat.

Bezeichnet CA für die horizontale, CF für die verticale Projection die positive Richtung, also CB für jene, CR für diese die negative, so hat man sich in den oben (§. 268.) aufgestellten Ausdrücken

$$(1)\ x = p \,.\, a \qquad\qquad (2)\ y = q \,.\, a$$

unter p und q nicht nur ächt-gebrochene, sondern zugleich abwechselnd positive und negative Factoren zu denken, wonach die Winkelfunctionen des Sinus und Cosinus (und nicht minder die von ihnen abgeleiteten der Tangente und Cotangente) der jedesmaligen Größe des Winkels gemäß bald als positive, bald als negative Zahlen erscheinen.

Mit dieser nothwendigen Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen der Lage der Projectionen y, x und der entsprechenden Bezeichnung ihrer Zahlenwerthe findet man

I. Im ersten Quadranten, wo z = ACE:

sin z und cos z beide positiv;

folglich auch tg z und cot z positiv.

II. Im zweiten Quadranten, wo z = ACN:

sin z positiv und cos z negativ;

folglich tg z und cot z beide negativ.

III. Im dritten Quadranten, wo z = ACO:

sin z und cos z beide negativ;

folglich tg z und cot z beide positiv;

IV. Im vierten Quadranten, wo z = ACU:

sin z negativ und cos z positiv;

folglich tg z und cot z beide negativ.

§. 273. Reduction der Winkelfunctionen. Der Zusammenhang, worin stumpfe Winkel aller Art mit einem spitzen Winkel α stehen, der als Ergänzung oder Ueberschuß derselben von **R**, **2R**, **3R** oder **4R** angesehen werden kann, macht es möglich, ihre Functionen auf die eines solchen Winkels zu reduciren und dadurch einfacher auszudrücken. So ergeben sich aus den vorstehenden Betrachtungen über die Lage der Projectionen und die entsprechende positive oder negative Bezeichnung der Winkelfunctionen mit Hinblick auf die Fig. 80. folgende vereinfachende Beziehungen unter den Functionen ergänzender Winkel:

Für die Lage CE des drehenden Schenkels im ersten Quadranten oder den W. ECF:

$$\text{I.}\quad\left\{\begin{array}{l}\sin(R-\alpha)=+\cos\alpha;\\ \cos(R-\alpha)=+\sin\alpha.\\ \operatorname{tg}(R-\alpha)=+\cot\alpha;\\ \cot(R-\alpha)=+\operatorname{tg}\alpha.\end{array}\right.$$

Für die Lage CN im zweiten Quadranten oder den Winkel ACN:

$$\text{II.}\quad\left\{\begin{array}{l}\sin(2R-\alpha)=+\sin\alpha;\\ \cos(2R-\alpha)=-\cos\alpha.\\ \operatorname{tg}(2R-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;\\ \cot(2R-\alpha)=-\cot\alpha;\end{array}\right.$$

Für die Lage CO im dritten Quadranten oder den Winkel ACO:

$$\text{III.}\quad\left\{\begin{array}{l}\sin(2R+\alpha)=-\sin\alpha;\\ \cos(2R+\alpha)=-\cos\alpha.\\ \operatorname{tg}(2R+\alpha)=+\operatorname{tg}\alpha;\\ \cot(2R+\alpha)=+\cot\alpha.\end{array}\right.$$

Für die Lage CU im vierten Quadranten oder den Winkel ACU:

$$\text{IV.}\quad\left\{\begin{array}{l}\sin(4R-\alpha)=-\sin\alpha;\\ \cos(4R-\alpha)=+\cos\alpha.\\ \operatorname{tg}(4R-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;\\ \cot(4R-\alpha)=-\cot\alpha.\end{array}\right.$$

Denkt man sich den Winkel ACU durch Drehung des rotirenden Schenkels in entgegengesetzter Richtung beschrieben, so ist er durch $-\alpha$ zu bezeichnen, und demzufolge:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=+\cos\alpha.$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha \qquad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha.$$

Ist $\alpha+\beta=R$, also β Complementwinkel von α, so hat man nach I.:

$$\sin\beta=+\cos\alpha; \qquad \cos\beta=+\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\beta=+\cot\alpha; \qquad \cot\beta=+\operatorname{tg}\alpha;$$

Ist dagegen $\alpha+\delta=2R$, also δ Supplementwinkel von α, so folgt aus II.:

$$\sin\delta=+\sin\alpha; \qquad \cos\delta=-\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\delta=-\operatorname{tg}\alpha; \qquad \cot\delta=-\cot\alpha.$$

§. 274. Versinnlichung der Winkelfunctionen. Will man die Zahlenwerthe des Sinus und Cosinus eines Winkels α durch räumliche Darstellung veranschaulichen, so darf man nur für den oben $=$ a gesetzten Schenkel desselben den Werth 1, d. h. die Hypotenuse des jedesmaligen rechtwinkligen Dreiecks als Längeneinheit für die beiden Catheten annehmen, deren Längen alsdann unmittelbar jene Winkelfunctinoen darstellen; weil sich die Ausdrücke

$$(1)\ ED=CE\,.\,\sin\alpha \text{ und } (2)\ CD=CE\,.\,\cos\alpha$$

in

$$ED=\sin\alpha \quad\text{und}\quad CD=\cos\alpha$$

verwandeln. Eben so lassen die Tangente und Cotangente sich durch Linien versinnlichen, indem man (woher auch ursprüglich die Benennung dieser Functionen stammt) Berührungslinien an den mit dem Radius 1 beschriebenen Kreis legt. Denn alsdann werden die Proportianen

$$(3)\ \frac{AG}{CA}=\frac{DE}{CD};\ \text{und}\ (4)\ \frac{FK}{CF}=\frac{DC}{DE};$$

$$\text{zu}\ \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad\text{und}\quad\frac{\cot\alpha}{1}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Endlich erscheinen die Winkelfunctionen der Secante und Cosecante hier durch die Linien dargestellt, welche den Mittelpunkt des Kreises mit den Endpunkten der Berührungslinien verbinden. Denn es ist

$$(5)\ \frac{CG}{CA}=\frac{CE}{CD};\ \text{und}\ (6)\ \frac{CK}{CF}=\frac{CE}{DE}$$

$$\text{oder}\ \frac{\sec\alpha}{1}=\frac{1}{\cos\alpha};\quad\text{und}\quad\frac{\csc\alpha}{1}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Diese (früher gebräuchliche, aber jetzt veraltete) Art, die Winkelfunctionen räumlich darzustellen, ist indessen in Absicht der vier abgeleiteten Functionen sehr mangelhaft, weil nur die Größe, nicht aber die positive oder negative Bezeichnung derselben dadurch veranschaulicht wird.

§. 275. (Fig. 82.) Functionen zweitheiliger Winkel. Denkt man sich den Winkel ACF $=\alpha$ um eine bestimmte Größe FCE $=\gamma=$ FCK wachsend oder abnehmend, so ändern sich zugleich seine Winkelfunctionen, und es ergeben sich namentlich für Sinus und Cosinus zweitheiliger Winkel der Form $(\alpha+\gamma)$ und $(\alpha-\gamma)$ wichtige Grundformeln, aus denen wiederum eine große Menge anderer, die für trigonom. Betrachtungen unentbehrlich sind, abgeleitet werden können.

Man setze nämlich zu größerer Einfachheit den Radius CA $=1$, ziehe senkrecht auf FC die Linien EH und KH $=\sin\gamma$, auf AC die Linien ED $=\sin(\alpha+\gamma)$, KL $=\sin(\alpha-\gamma)$, HI, und aus H und K die Senkrechten HO, KR, so ist Winkel HEP $=$ PCD $=\alpha$, und folglich:

I. $ED=DO+OE=HI+OE=HC\,.\sin\alpha+HE\,.\cos\alpha,$

d. i. $\sin(\alpha+\gamma)=\sin\alpha\,.\cos\gamma+\sin\gamma\,.\cos\alpha$ . . . . . . (1)

II. $KL=HI-HR=HI-OE=HC\,.\sin\alpha-HE\,.\cos\alpha,$

d. i. $\sin(\alpha-\gamma)=\sin\alpha\,.\cos\gamma-\sin\gamma\,.\cos\alpha$ . . . . . . (2)

III. $DC=CI-DI=CI-HO=HC\,.\cos\alpha-HE\,.\sin\alpha,$

d. i. $\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\,.\cos\gamma-\sin\alpha\,.\sin\gamma$ . . . . . . (3)

IV. $CL=CI+IL=CI+HO=HC\,.\cos\alpha+HE\,.\sin\alpha,$

d. i. $\cos(\alpha-\gamma)=\cos\alpha\,.\cos\gamma+\sin\alpha\,.\sin\gamma$ . . . . . . (4)

Die Allgemeinheit dieser Fundamentalformeln zu beweisen darf man nur darthun, daß sie identische Gleichungen darstellen und daher für jeden beliebigen Werth wie α und γ gelten müssen.

Dies kann auf geometrischem oder auch auf arithmetischem Wege geschehen: entweder durch verschiedene Constructionen analog der in Figur 82. dargestellten, wobei α oder $\gamma > R$, 2R, 3R angenommen werden; oder durch Berechnung, indem man für α oder $\gamma > R$ einen der Ausdrücke

$$2R - \delta,\quad 2R + \delta,\quad 4R - \delta$$

substituirt und beide Seiten der Gleichung (mit Anwendung der Reductionen in §. 273.) entwickelt. Die Identität der obigen vier Grundformeln läßt sich ebenfalls aus den im §. 182. (unter IV. und V.) gegebenen Ausdrücken für cos x und sin x folgern, indem man dieselben auf beiden Seiten der Gleichung einführt; endlich auch aus dem Umstande, daß die Summe der Quadrate aus (1) und (3) oder (2) und (4), ganz unabhängig von den Werthen der Winkel α und γ, die Einheit ergeben.

§. 276. Goniometrische Formeln. Durch Anwendung der arithmetischen Grundoperationen, einiger Umformungen und Substitutionen, lassen sich eine Menge von Formeln aus den vier vorstehenden entwickeln;

I. Durch Addition und Subtraction:

aus (1) und (2) $\sin(\alpha+\gamma) + \sin(\alpha-\gamma) = 2\sin\alpha \,.\, \cos\gamma$ (5)

$\cos(\alpha+\gamma) - \sin(\alpha-\gamma) = 2\sin\gamma \,.\, \cos\alpha$ (6)

aus (3) und (4) $\sin(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha-\gamma) = 2\cos\alpha \,.\, \cos\gamma$ (7)

$\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+\gamma) = 2\sin\alpha \,.\, \sin\gamma$ (8)

II. Durch Multiplication:

aus (1) und (2) $\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma) = \sin\alpha^2 - \sin\gamma^2$ (9)

aus (3) und (4) $\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma) = \cos\alpha^2 - \sin\gamma^2$ (10)

aus (1) und (4) $\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma) = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + \sin\gamma \,.\, \cos\gamma$ (11)

aus (2) und (3) $\cos(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma) = \sin\alpha\cos\alpha - \sin\gamma \,.\, \cos\gamma$ (12)

III. Durch Division:

aus (1) und (3) $\tang(\alpha+\gamma) = \dfrac{\tang\alpha + \tang\gamma}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma}$ . . . . . (13)

aus (2) und (4) $\tang(\alpha-\gamma) = \dfrac{\tang\alpha - \tang\gamma}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\gamma}$ . . . . . (14)

aus (1) und (3) $\cot(\alpha+\gamma) = \dfrac{\cot\alpha \,.\, \cot\gamma - 1}{\cot\alpha + \cot\gamma}$ . . . . . (15)

aus (2) und (4) $\cot(\alpha-\gamma) = \dfrac{\cot\alpha \,.\, \cot\gamma + 1}{\cot\gamma - \cot\alpha}$ . . . . . (16)

IV. Durch Substitution von $\gamma = \alpha$ ergiebt sich kürzer:

aus (1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ . . . . (17)

aus (3) $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = \left\{\frac{2\cos\alpha^2 - 1}{1 - 2\sin\alpha^2}\right\}$ . . . (18)

in etwas veränderter Form:

$$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)};\ \sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)}$$

aus (13) $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha^2}$ . . . . (19)

aus (15) $\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\cot\alpha^2 - 1}{2\cot\alpha}$ . . . . (20)

V. Durch Einführung der Formeln (17) und (18), wobei, wenn $\alpha > \gamma$ angenommen wird, $\cos\gamma > \cos\alpha$ sein muß:

in (9) $2\sin(\alpha+\gamma).\sin(\alpha-\gamma) = \cos 2\gamma - \cos 2\alpha$ . . . (21)

in (10) $2\cos(\alpha+\gamma).\cos(\alpha-\gamma) = \cos 2\alpha + \cos 2\gamma$ . . . (22)

in (11) $2\sin(\alpha+\gamma).\cos(\alpha-\gamma) = \sin 2\alpha + \sin 2\gamma$ . . . (23)

in (12) $2\cos(\alpha+\gamma).\sin(\alpha-\gamma) = \sin 2\alpha - \sin 2\gamma$ . . . (24)

VI. Durch Division dieser Formeln entstehen ferner:

aus (21) u. (24) $\operatorname{tang}(\alpha+\gamma) = \frac{\cos 2\gamma - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin 2\gamma}$

aus (21) u. (23) $\operatorname{tang}(\alpha-\gamma) = \frac{\cos 2\gamma - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\gamma}$ . . . . (25)

aus (22) u. (23) $\cot(\alpha+\gamma) = \frac{\cos 2\gamma + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\gamma}$

aus (22) u. (24) $\cot(\alpha-\gamma) = \frac{\cos 2\gamma + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin 2\gamma}$ . . . . (26)

aus (23) u. (24) $\frac{\operatorname{tang}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{tang}(\alpha-\gamma)} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha - \sin 2\gamma}$ . . . . . (27)

aus (21) u. (22) $\operatorname{tg}(\alpha+\gamma).\operatorname{tg}(\alpha-\gamma) = \frac{\cos 2\gamma - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2\gamma}$ (28)

VII. Ferner geben unmittelbar die Definitionen:

$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ die Gleichungen:

$\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha.\cos\gamma}$ . . . . (29)

$\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\gamma = \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\cos\alpha.\cos\gamma}$ . . . . (30)

$\cot\gamma + \cot\alpha = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha.\sin\gamma}$ . . . . (31)

$\cot\gamma - \cot\alpha = \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha.\sin\gamma}$ . . . . (32)

VIII. Durch Multiplication oder Division entstehen endlich noch:

aus (29) u. (30) $tg\,\alpha^2 - tg\,\gamma^2 = \frac{\sin\,(\alpha + \gamma)\ \sin\,(\alpha - \gamma)}{\cos\,\alpha^2\ \ \cos\,\gamma^2}$ (33)

$\frac{tg\,\alpha + tg\,\gamma}{tg\,\alpha - tg\,\gamma} = \frac{\sin\,(\alpha + \gamma)}{\sin\,(\alpha - \gamma)}$ .... (34)

aus (31) u. (32) $\cot\gamma^2 - \cot\alpha^2 = \frac{\sin\,(\alpha + \gamma)\ \sin\,(\alpha - \gamma)}{\sin\,\alpha^2\,.\,\sin\,\gamma^2}$ (35)

$\frac{\cot\gamma + \cot\alpha}{\cot\gamma - \cot\alpha} = \frac{\sin\,(\alpha + \gamma)}{\sin\,(\alpha - \gamma)}$ .... (36)

§. 277. **Berechnung der gon. Functionen.** Die vorstehenden Formeln, vermöge deren man aus den Functionen zweier Winkel α und γ Functionen ihrer Summe oder Differenz, oder auch aus denen eines beliebigen Winkels α andere des doppelten oder halben Winkels berechnen kann, erfordern für den Entwurf einer Tabelle goniometrischer Functionen nur die unmittelbare Angabe einiger von ihnen für bestimmte Winkel, weil daraus eine unendliche Menge anderer nach und nach abgeleitet werden können. Diejenigen Winkel, wofür die Zahlenwerthe der Sinus als halbe Sehnen ($\frac{1}{2}$x) der doppelten Winkel ohne Weiteres hervorgehen, sind die Winkel von 30°, 45° und 18°.

Es ist nämlich $\frac{1}{2}$x als $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, folglich

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

oder:

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 0{,}50000$; $tg\ 30^\circ = \cot 60^\circ = 0{,}57735$

$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = 0{,}86602$; $\cot 30^\circ = tg\ 60^\circ = 1{,}73205$.

Ferner findet man $\frac{1}{2}$x als $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0{,}70710$; $tg\ 45^\circ = \cot 45^\circ = 1{,}00000$.

Für die Sehne des Winkels von 36° ergiebt sich aus der (nach §. 357, L. 5. Zusatz) folgenden Gleichung

$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x}$ oder $x^2 + x = 1$ der Zahlenwerth $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

Also ist $\frac{1}{2}$x als $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ und daraus:

$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = 0{,}30901$; $tg\ 18^\circ = \cot 72^\circ = 0{,}32491$

$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = 0{,}95105$; $\cot 18^\circ = tg\ 72^\circ = 3{,}07768$

Setzt man nun in (1) und (3) $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, so wird

$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = 0{,}96592$; $tg\ 75^\circ = \cot 15^\circ = 3{,}73205$

$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = 0{,}25881$; $\cot 75^\circ = tg\ 15^\circ = 0{,}26794$

Eben so giebt die Substitution $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 18^\circ$:

$\sin 48^\circ = \cos 42^\circ = 0{,}74314$; $tg\ 48^\circ = \cot 42^\circ = 1{,}11061$

$\cos 48^\circ = \sin 42^\circ = 0{,}66913$; $\cot 48^\circ = tg\ 42^\circ = 0{,}90040$.

und man kann auf diesem Wege, indem man die gefundenen Functionen neuer Winkel benutzt, immer andere ableiten. Durch Anwen-

dung der Formeln (17) .... (20) findet man ferner neue Functionen für die Hälfte oder das Doppelte der gegebenen Winkel.

Sei z. B. $\alpha = 48^\circ$, so ist $\cos 24^\circ = \sqrt{\left(\frac{1+0,66913}{2}\right)}$

und $\sin 24^\circ = \sqrt{\left(\frac{1-0,66913}{2}\right)}$

oder:

$\sin 24^\circ = \cos 66^\circ = 0,40673$; $\operatorname{tg} 24^\circ = \cot 66^\circ = 0,44522$

$\cos 24^\circ = \sin 66^\circ = 0,91354$; $\cot 24^\circ = \operatorname{tg} 66^\circ = 2,24603$

Oder man setze $\alpha = 42^\circ$. so ist $\sin 84^\circ = 2 . \sin 42^\circ . \cos 42^\circ$, also

$\sin 84^\circ = \cos 6^\circ = 0,99452$; $\operatorname{tg} 84^\circ = \cot 6^\circ = 9,51436$

$\cos 84^\circ = \sin 6^\circ = 0,10452$; $\cot 84^\circ = \operatorname{tg} 6^\circ = 0,10510$.

Diese Beispiele der Berechnung mögen hinreichen, zu zeigen, wie man mit Hülfe der goniom. Formeln die Functionen einzelner Winkel zu finden und dadurch eine Tabelle derselben zu construiren allenfalls im Stande wäre, wenn nicht die Analysis durch Ausdrücke für Sinus und Cosinus, welche die Form unendlicher Reihen haben (s. §. 182.), ein leichteres und vollständigeres Rechnungsverfahren darböte.

§. 278. Goniometrische Tafeln. Soll der Grundbegriff der Goniometrie — Bestimmung der Winkel vermöge gerader Linien — zur Anwendung kommen, so müssen die Zahlenwerthe der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten in Beziehung auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks als Einheit, für sämmtliche Winkel (nach einer gewissen Stufenfolge) berechnet und auf eine übersichtliche Weise geordnet oder in Tafeln zusammengestellt werden, die es möglich machen, zu jedem gegebenen Winkel die zugehörigen Functionen, oder umgekehrt zu jeder Function den zugehörigen Winkel anzugeben. Da nun jene Zahlenwerthe im Allgemeinen irrational und deshalb nur in unvollständigen Decimalbrüchen auszudrücken sind, so hängt die Genauigkeit der Tafeln von der Menge der Decimalstellen ab, wie ihre Vollständigkeit von der Menge der überhaupt angegebenen Winkel. In größeren Tafeln schreiten diese zum Theil nach Secunden fort, in kleineren nur nach einzelnen Minuten; in jenen sind ihre Functionen bis auf 7 oder 10, in den kleineren bis auf 5 Decimalstellen angegeben. Alle erstrecken sich aber von 0° bis 45°, weil die Functionen größerer, spitzer oder stumpfer Winkel (nach §. 273) auf die, in jene Gränzen eingeschlossenen zu reduciren, oder ihre Zahlenwerthe unter denselben bereits vorhanden sind. So ist z. B. $\cos 71^\circ = \sin 19^\circ$, $\operatorname{tg} 64^\circ = \cot 26^\circ$, $\sin 124^\circ = \sin (2R - 56^\circ) = \sin 56^\circ$, $\operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} (2R + 30) = - \operatorname{tg} 30^\circ$. Die verschiedenen Bedeutungen des nämlichen Zahlenwerths für Functionen der ergänzenden Winkel α und β, wenn $\alpha + \beta = 90^\circ$, sind in den Tafeln durch Ueber- und Unter-

schriften der correspondirenden Functionen sinus und cosinus, tangens und cotangens bemerkt. Zu den obenstehenden Benennungen gehört die absteigende, zu den untenstehenden die aufsteigende Reihe der Minuten zur Rechten.

Die Unbequemlichkeit, mit den in irrationalen Brüchen ausgedrückten, goniometrischen Functionen, Berechnungen der Multiplication oder Division, Potenzirung und Wurzel-Ausziehung auszuführen, wie die Gestalt der Formeln, zu welchen trigon. Untersuchungen führen, solche häufig genug fordert, hat den Entwurf solcher goniometrischer Tafeln veranlaßt, in denen nicht die Functionen selbst, sondern vielmehr ihre Logarithmen enthalten sind. Da nun aber jene größtentheils ächte Brüche und nur die Tangenten von 45° bis 90° oder Cotangenten von 45° bis 0° größer als die Einheit, also die Logarithmen der trigonometrischen Functionen (nach §. 129.) zum größten Theil negative Zahlen sind, so hat man der Gleichförmigkeit und Bequemlichkeit wegen alle Logarithmen um 10 zu groß angesetzt und muß deshalb bei jedem — 10 hinzugefügt denken. So ist z. B. log. sin $30^\circ = \log. (\frac{1}{2}) = -0{,}3010300$ oder nach Angabe der Tafeln die dekadische Ergänzung 9,6989700, weil $(10 - 0{,}3010300) - 10$ mit jenem negativen Logarithmus identisch ist. Die Zugabe von Proportionaltheilen für einzelne Minuten oder Secunden und der Gebrauch derselben erklärt sich (nach §. 128) von selbst.

II. Trigonometrie.

§. 279. Anwendung der Goniometrie. Sollen nunmehr die Begriffe und Lehrsätze der Goniometrie auf Figuren angewendet werden, so kann dies nur in der Absicht geschehen, aus gegebenen Bestandtheilen derselben andere unbekannte durch Rechnung zu bestimmen. Die Anzahl der bestimmenden Stücke, welche zur Ausmittelung eines abhängigen erforderlich sind, hängt begreiflich von der Art der Figur ab, und ist die geringste für das Dreieck, den eigentlichen Gegenstand der Trigonometrie. Bezeichnet man die, den Ecken A, B, C (Fig. 81.) desselben gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c, und die Winkel durch α, β, γ, so reicht es (nach §. 237) zu seiner Bestimmung hin, daß von jenen sechs Bestandtheilen drei, von einander unabhängige gegeben seien, um jedes der drei übrigen (abhängigen) Stücke zu finden, den einzigen Fall ausgenommen, wo zwei Seiten nebst einem nicht eingeschlossenen Winkel gegeben sind, weil daraus zwei verschiedene Dreiecke folgen können, sofern der Winkel ein spitzer und die gegenüberliegende Seite kleiner als die anliegende aber nicht ausdrücklich bemerkt ist, ob die Senkrechte aus der Spitze auf die dritte Seite inner- oder außerhalb liegen soll.

Denken wir uns aber diese Bemerkung der Angabe des besondern Falles noch hinzugefügt, so darf überhaupt ein Dreieck als völlig bestimmt angesehen werden, wenn drei von einander unabhängige Stücke desselben gegeben sind, unter denen (nach §. 237, L. 6) höchstens zwei Winkel sein dürfen, also wenigstens eine Seite enthalten sein muß. Die Trigonometrie wird also die abhängige Größe, welche gefunden werden soll, mit den Werthen der drei gegebenen in eine Gleichung verknüpfen und arithmetisch durch deren Auflösung bestimmen müssen.

§. 280. Trigonometrische Lehrsätze für rechtwinklige Dreiecke. Unter den Dreiecken gestattet das rechtwinklige die einfachste Anwendung der Goniometrie, indem man, um den Zusammenhang zwischen zwei beliebigen Seiten des Dreiecks auszudrücken, eine derselben (nach §. 268.) nur mit einer der Winkelfunctionen zu multipliciren braucht. Den Zusammenhang zwischen allen drei Seiten giebt bekanntlich der Pythagoräische Lehrsatz. Folgende Gleichungen, welche alle Fälle gegenseitiger Bestimmung in sich schließen, und auch als Lehrsätze ausgesprochen werden können, enthalten nur zwei bestimmende Größen des Dreiecks (Fig. 81.) weil der rechte Winkel bei allen als die dritte vorausgesetzt wird:

(1) $c = a \,.\, \sin \gamma$ (2) $b = a \cos \gamma$

(3) $a = \dfrac{c}{\sin \gamma}$ (4) $a = \dfrac{b}{\cos \gamma}$

(5) $c = b \,.\, \operatorname{tang} \gamma$ (6) $b = c \,.\, \cot \gamma$

(7) $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

(8) $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a+c)(a-c)}$

(9) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$

§. 281. Allgemeine trigonom. Lehrsätze über die Seiten und Winkel eines Dreiecks.

1. (Fig. 83.) Die Höhe CD eines Dreiecks ist das Produkt aus dem Sinus eines Winkels an der Grundlinie und der anliegenden Seite.

Denn $CD = a \,.\, \sin \beta = b \,.\, \sin \alpha$.

2. (Fig. 83.) Die Grundlinie AB eines Dreiecks ist die Summe der Produkte aus den Cosinus der anliegenden Winkel in die anliegenden Seiten.

Denn $AB = AD + DB = b \,.\, \cos \alpha + a \,.\, \cos \beta$.

Zusatz. Für das stumpfwinklige Dr. AB′C wird $\cos \beta$ negativ, oder $AB' = AD - B'D$.

3. (Fig. 83.) Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Denn fällt man die Senkr. BD, so ist $CD = b \,.\, \sin \alpha = a \,.\, \sin \beta$, oder $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, und aus den nämlichen Gründen:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma};\ \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

4. Die Summen und Differenzen zweier Seiten im Dreieck und der Sinus ihrer gegenüberliegenden Winkel sind verhältnißgleich.

Denn es folgt aus $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ (L. 3.), daß

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \beta} \text{ und } \frac{a-b}{b} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \beta},$$

also $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$.

5. Die Summe und Differenz zweier Seiten im Dreieck sind den Tangenten der halben Summe und Differenz ihrer gegenüberliegenden Winkel verhältnißgleich.

Denn I. nach L. 4. und Goniom. Formel (27) hat man

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\tang \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

II. (Fig. 84.) Construirt man mit CA als Radius einen Kreis, verlängert CB bis D, zieht DE, AF und ihr par. EB, so ist W. DAF = R und W. DCA $= \alpha + \beta = 2x$, folglich $x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $y = x - \beta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Also findet man

$$\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{EA} \text{ oder}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{\tang \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

6. (Fig. 83.) Das Quadrat einer Dreiecksseite ist denen der beiden anderen Seiten weniger ihrem doppelten Produkte in den Cosinus des eingeschlossenen Winkels gleich.

Denn es ist (nach §. 255, L. 10.) $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \,.\, AD$ oder da $AD = AC \,.\, \cos \alpha$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos \alpha$.

Zusatz. Ist der W. α stumpf, so wird $\cos \alpha$ negativ, also das letzte Glied additiv.

7. (Fig. 84.) Das Quadrat einer Seite im Dreieck ist denen der Produkte aus der Summe der beiden andern in den Sinus, und ihrer Differenz in den Cosinus des halben eingeschlossenen Winkels gleich.

Denn $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 = (CG - CK)^2 + (BG + AK)^2$,
d. i. $c^2 = (a \,.\, \cos \frac{1}{2}\gamma - b \,.\, \cos \frac{1}{2}\gamma)^2 + (a \,.\, \sin \frac{1}{2}\gamma + b \,.\, \sin \frac{1}{2}\gamma)^2$,
oder $= (a+b)^2 \,.\, \sin \frac{1}{2}\gamma^2 + (a-b)^2 \cos \frac{1}{2}\gamma^2$.

8. Der Sinus der Hälfte eines beliebigen Winkels im Dreieck ist die Quadratwurzel aus dem Produkte der beiden Quotienten, welche entstehen, wenn man den halben Umfang um eine anliegende Seite vermindert und durch dieselbe dividirt.

I. Denn es ist (nach L. 7.), wenn man $\cos \frac{1}{2}\gamma^2 = 1 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2$ setzt:

$$c^2 = [(a+b)^2 - (a-b)^2] \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 + (a-b)^2$$

oder $[(a+b)^2 - (a-b)^2] \sin \frac{1}{2}\gamma^2 = c^2 - (a-b)^2$,

d. i. $2a \,.\, 2b \,.\, \sin \frac{1}{2}\gamma^2 = (c+b-a)(c+a-b)$,

$$\text{also } \sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(c+b-a)(c+a-b)}{2a \,.\, 2b}}$$

oder wenn man $a+b+c = P$ setzt:

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}P - a}{a}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}P - b}{b}\right)}.$$

II. (Fig. 84.) Bildet man dieselbe Hülfsconstruction, wie zu L. 5. und 7., und zieht FI par. DE, so ist:

$$(1)\ AB^2 = BE^2 + AE^2$$
$$(2)\ BF^2 = BI^2 + AE^2$$
$$\text{also } (3)\ AB^2 - BF^2 = BE^2 - BI^2$$

oder $(AB + BF)(AB - BF) = (BE + BI)(BE - BI)$,

d. i. $[c + (a-b)][c - (a-b)] = 2BG \,.\, 2EG$

oder $(c+a-b)(c+b-a) = 2a \,.\, \sin \frac{1}{2}\gamma \,.\, 2b \,.\, \sin \frac{1}{2}\gamma$.

woraus der obige Ausdruck sich ebenfalls ergiebt.

§. 282. Lehrsätze über den Flächeninhalt des Dreiecks.

1. (Fig. 83.) Der Flächeninhalt (F) eines Dreiecks wird durch das halbe Produkt zweier Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels bestimmt.

Denn es ist (§. 264, L. 3.) $F = \frac{1}{2} AB \,.\, CD = \frac{1}{2} c \,.\, b \sin \alpha = \frac{1}{2} c \,.\, a \sin \beta$.

2. Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird durch die Quadratwurzel aus dem Produkte der halben Summe seiner Seiten in die, um jede einzelne Seite verminderte, halbe Summe bestimmt.

Denn es ist (§. 281, L. 6.) $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

$$\text{also } 1 + \cos \alpha = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{und } 1 - \cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$\text{Daraus folgt } 1 - \cos \alpha^2 = \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2 c^2}$$

$$\text{oder } \sin \alpha^2 = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2 c^2}$$

$$\text{also } F = \frac{c \,.\, b \sin \alpha}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

und wenn man $a+b+c = P$, $\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2}}$ setzt:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}P(\tfrac{1}{2}P - a)(\tfrac{1}{2}P - b)(\tfrac{1}{2}P - c)}.$$

§. 283. Behandlung trigonometrischer Aufgaben. Jede Aufgabe, welche auf die Bestimmung eines Dreiecks aus einzelnen seiner Bestandtheile zurückgeführt werden kann, wird zu einer trigo-

nometrischen, sofern jene Bestimmung nicht auf dem Wege der Construction, sondern vielmehr auf dem der Rechnung geleistet werden soll. Häufige Veranlassung zu solcher rechnenden Bestimmung von Seiten oder Winkeln geben nicht nur die praktische Geometrie, die mathematische Geographie und Astronomie, sondern auch fast sämmtliche Zweige der Physik, namentlich die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung. Die trigonometrische Behandlung solcher Angaben fordert zunächst die an einer ungefähren Construction vorzunehmende Untersuchung, welche Dreiecksseiten und Winkel gegeben und welche aus ihnen zu bestimmen seien; dann die Anwendung des auf den vorhandenen Fall passenden Lehrsatzes vermöge seiner auf die Construction bezogenen Formel; und endlich die vorläufige Andeutung der ganzen, mit Logarithmen auszuführenden, Berechnung, damit dieselbe möglichst geordnet und übersichtlich werde. Als Beispiele solcher Berechnung mögen hier mehre trigonometrische Aufgaben nebst ihrer Auflösung folgen.

1. (Fig. 81.) Die Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, worin die Hypotenuse und ein Winkel gegeben sind.

Sei $a = 493{,}7$; $\gamma = 65°40'$, so ist nach §. 280. (1) und (2):

$$\log c = \begin{cases} \log a = 2{,}69346 \\ + \text{l.} \sin\gamma = 9{,}95960 - 10 \end{cases}$$
$$2{,}65306 = \log 449{,}8.$$

$$\log b = \begin{cases} \log a = 2{,}69346 \\ + \text{l.} \cos\gamma = 9{,}61494 - 10 \end{cases}$$
$$2{,}30840 = \log 203{,}4$$

Also $c = 449{,}8$ und $b = 203{,}4$.

2. Die Hypotenuse aus einer Cathete und einem an- oder gegenüberliegenden Winkel zu berechnen.

Sei $b = 73{,}94$; $c = 115{,}3$; $\gamma = 57°20'$; so ist nach §. 280. (3) und (4):

$$\text{I. } \log a = \begin{cases} \log b = 1{,}86888 \\ - \text{l.} \cos\gamma = 9{,}73219 - 10 \end{cases}$$
$$2{,}13669 = \log 136{,}9$$

$$\text{II. } \log a = \begin{cases} \log c = 2{,}06183 \\ - \text{l.} \sin\gamma = 9{,}92522 - 10 \end{cases}$$
$$2{,}13661 = \log 136{,}9.$$

3. Eine Cathete aus der andern und der Hypotenuse zu berechnen.

Sei $a = 3471$, $b = 1245$, so ist nach §. 280. (9):

$$\log c = \begin{cases} \log (a + b) = 3{,}67357 \\ + \log (a - b) = 3{,}34753 \end{cases}$$
$$7{,}02110 : 2$$
$$3{,}51055 = \log 3240.$$

4. Aus einer Seite und den anliegenden Winkeln eines Dreiecks eine seiner andern Seiten zu berechnen.

Sei $c = 4{,}378$; $\alpha = 43°20'$ und $\beta = 61°40'$, so ist $\gamma = 75°$, und nach §. 281, L. 3:

$$\log b = \begin{cases} \log c = 0{,}64128 \\ + \text{l. sin}\ \beta = 9{,}94458 - 10 \\ \overline{\quad 10{,}58586 - 10} \\ - \text{l. sin}\ \gamma = 9{,}98494 - 10 \\ \overline{\quad 0{,}60092 = \log 3{,}989.} \end{cases}$$

5. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreiecks die übrigen Stücke zu berechnen.

Sei die Seite $a = 317$; $b = 295$; $\gamma = 32°17'$, so läßt sich die Berechnung in folgender Weise ausführen.

I. Will man nur die gewöhnlichen Log. Tafeln anwenden, so berechne man zunächst (nach §. 281, L. 5.) die Winkel α und β.

Nun ist $a + b = 612$, $a - b = 22$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 73°51'\,30''$, also:

$$\text{I.}\ \log \text{tg}\ \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \begin{cases} \log (a - b) = 1{,}3424227 \\ + \text{l. tg}\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 10{,}5384668 - 10 \\ \overline{\quad 11{,}8808895 - 10} \\ - \log (a + b) = 2{,}7867514 \\ \overline{\quad 9{,}0941381} \\ = \log \text{tang}\ 7°4'49''. \end{cases}$$

Also $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 73°51'30$

und $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 7°\ 4'49''$

Durch Addition $\alpha = 80°56'19''$

Durch Subtr. $\beta = 66°46'41''$.

Daraus findet man (nach §. 281, L. 3.) $c = 171{,}45$.

II. Beim Gebrauch der Gaußischen Logarithmen (§. 132.) berechne man (nach §. 281, L. 7.) zuerst die Log. beider Theile der Formel $(a + b)^2 . \sin \frac{1}{2}\gamma^2 + (a - b)^2 . \cos \frac{1}{2}\gamma^2$:

$$\begin{aligned} &\log (a + b) = 2{,}78675 \\ &+ \log \sin \tfrac{1}{2}\gamma = 9{,}44407 - 10 \\ &\overline{\quad 2{,}23082 \times 2 = 4{,}46164} \\ &\log (a - b) = 1{,}34242 \\ &+ \log \cos \tfrac{1}{2}\gamma = 9{,}98233 - 10 \\ &\overline{\quad 1{,}32475 \times 2 = 2{,}64950} \\ &\text{Also Differenz} = 1{,}81214. \end{aligned}$$

Sucht man diesen Log. in der Spalte A auf, so findet man daneben 0,00664. Folglich ist

$$\begin{aligned} &0{,}00664 \\ &+ 4{,}46164 \\ &\overline{\text{d. i.}\ 4{,}46828 = \log c^2,} \\ &\text{also}\ 2{,}23414 = \log c = \log 171{,}45. \end{aligned}$$

6. Aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel die anderen Stücke des Dreiecks zu berechnen.

Sei a = 73625, b = 97241, $\alpha = 43°55'$, so ist nach §. 281, L. 3.:

$$\log \sin \beta = \left\{ \begin{array}{rl} \log b = & 4{,}9878494 \\ + \text{l. } \sin \alpha = & 9{,}8411162 - 10 \\ \hline & 14{,}8289656 \\ - \log a = & 4{,}8670253 \\ \hline & 9{,}9619403 = \text{l. } \sin 66°21'. \end{array} \right.$$

Da aber a < b angenommen, so wird β eben sowohl stumpf als spitz sein können, d. h. entweder = 66°21′ oder 113°39′. Für den einen und den andern Fall ist $\gamma = 69°44'$ oder 22°26′, und die Seite c (nach §. 281, L. 3.) bestimmt durch:

$$1)\ \log c = \left\{ \begin{array}{rl} \log a = & 4{,}8670253 \\ + \text{l. } \sin \gamma = & 9{,}9722448 - 10 \\ \hline & 14{,}8392701 - 10 \\ - \text{l. } \sin \alpha = & 9{,}8411162 - 10 \\ \hline & 4{,}9981539 = \log 99575. \end{array} \right.$$

$$2)\ \log c = \left\{ \begin{array}{rl} \log a = & 4{,}8670253 \\ + \text{l. } \sin \gamma = & 9{,}5816177 - 10 \\ \hline & 14{,}4486430 - 10 \\ - \text{l. } \sin \alpha = & 9{,}8411162 - 10 \\ \hline & 4{,}6075268 = \log 40506. \end{array} \right.$$

Anmerkung. In dieser Berechnung sind die Log. von a und sin α dreimal gebraucht worden, wodurch sie im Grunde einfacher ist, als sie scheint.

7. Aus den drei Seiten eines Dreiecks einen seiner Winkel zu berechnen.

Sei a = 3742, b = 2732, c = 2858, so findet man nach §. 281, L. 8.): $\frac{1}{2}(a + b + c) = 4666$; $\frac{1}{2}P - b = 1934$; $\frac{1}{2}P - c = 1808$;

$$\log \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \left\{ \begin{array}{rl} \log (\frac{1}{2}P - b) = & 3{,}28646 \\ + \log (\frac{1}{2}P - c) = & 3{,}25720 \\ \hline & 26{,}54366 - 20 \\ - \log b = & 3{,}43648 \\ - \log c = & 3{,}45606 \\ \hline & 6{,}89254 \\ & 19{,}65112 - 20 : 2 \\ \hline & 9{,}82556 - 10 \\ & = \log \sin 42°. \end{array} \right.$$

Also ist $\alpha = 84°$, und die Winkel β und γ lassen sich nun leicht nach §. 281, L. 3. bestimmen.

8. Den Flächeninhalt eines Dreiecks zu bestimmen, wenn seine Winkel nebst einer Seite gegeben sind.

Sei $a = 325$, $\beta = 41^\circ 15'$, $\gamma = 68^\circ 42'$, also $\alpha a = 70^\circ 3'$, so ist (nach §. 282, L. 1.) $F = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$, und da

$$b : a = \sin\beta : \sin\alpha \text{ oder } b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}, \text{ auch}$$

$$F = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}, \text{ also}$$

$$\log F = \left\{ \begin{array}{rl} 2 \log \alpha a = & 5{,}0237668 \\ + \text{l. } \sin\beta = & 9{,}8191133 - 10 \\ + \text{l. } \sin\gamma = & 9{,}9692720 - 10 \\ \hline & 24{,}8121521 - 20 \\ - \log. 2 = & 0{,}3010300 \\ - \text{l. } \sin\alpha = & 9{,}9731236 - 10 \\ \hline & 10{,}2741536 - 10 \\ \hline & 4{,}5379985 = \log. 34514. \end{array} \right.$$

9. Aus den drei Seiten eines Dreiecks seinen Flächeninhalt zu berechnen.

Sei $a = 325$; $b = 227{,}97$; $c = 322{,}13$; so ist (nach §. 282, L. 2.) $\frac{1}{2} P = 437{,}55$; $\frac{1}{2} P - a = 112{,}55$; $\frac{1}{2} P - b = 209{,}58$; $\frac{1}{2} P - c = 115{,}42$; also

$$\log. F = \left\{ \begin{array}{rl} \log. \frac{1}{2} P & = 2{,}6410277 \\ + \log. (\frac{1}{2} P - a) & = 2{,}0513455 \\ + \log. (\frac{1}{2} P - b) & = 2{,}3213498 \\ + \log. (\frac{1}{2} P - c) & = 2{,}0622811 \\ \hline & 9{,}0760041 : 2 \\ \hline & 4{,}5380022 = \log. 34514. \end{array} \right.$$

10. Den Ort eines Punktes P durch Rechnung zu bestimmen, an welchem drei nach den gegebenen Punkten A, B, C gezogene Linien die gegebenen Winkel π und φ einschließen. (Sogenannte Aufgabe von Pothenot, eigentlich von Snellius.)

Um aus den gegebenen W. B, π und φ die unbekannten α und γ zu bestimmen, deren Summe $\lambda = 4R - (B + \pi + \varphi)$ ist, setze man (nach 281, L. 3.):

$$\text{I. } \frac{AB}{BP} = \frac{\sin\pi}{\sin\alpha}; \qquad \text{II. } \frac{BP}{BC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi};$$

$$\text{also } \frac{\sin\gamma \cdot \sin\pi}{\sin\alpha \cdot \sin\varphi} = \frac{AB}{BC} \text{ oder } \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{AB \cdot \sin\varphi}{BC \cdot \sin\pi};$$

und da $\sin\gamma = \sin(\lambda - \alpha) = \sin\lambda \cdot \cos\alpha - \cos\lambda \cdot \sin\alpha$:

$$\frac{\sin\lambda \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\lambda \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{AB \cdot \sin\varphi}{BC \cdot \sin\pi}$$

$$\text{oder } \cot\alpha = \frac{AB \cdot \sin\varphi}{BC \cdot \sin\pi \cdot \sin\lambda} + \cot\lambda$$

Durch α ist auch γ bekannt, und dann die Linie BP nach I. oder II. leicht zu bestimmen.

§. 284. *Lehrsätze über die Transversalen im Dreieck. Die aus den Spitzen eines Dreiecks ABC (Fig. 85.) gezogenen Transversalen AB, BE, CF mögen mit d, e, f, die ihnen zur Rechten liegenden oder primären Winkel mit α', β', γ', die secundären oder zur Linken mit α'', β'', γ'' und eben so die diesen Winkeln gegenüberliegenden primären oder secundären Seiten-Abschnitte mit a', b', c' oder a'', b'', c'' bezeichnet werden. Die Seiten des, von den Transversalen im Innern des gegebenen gebildeten Dreiecks GKL deute man ferner durch g, k, l, und die übrigen Stücke derselben durch d', e', f'; d'', e'', f'' an, so ist nach dieser Bezeichnung:

$a = a' + a''$; $b = b' + b''$; $c = c' + c''$;

$\alpha = \alpha' + \alpha''$; $\beta = \beta' + \beta''$; $\gamma = \gamma' + \gamma''$;

$d = d' + k + d''$; $e = e' + l + e''$; $f = f' + g + f''$;

1. (Fig. 85.) Die Producte der primären und der secundären Seitenabschnitte im Dreieck verhalten sich zu einander, wie die Producte der Sinus ihrer gegenüberliegenden Winkel.

Denn es folgt aus §. 281, L. 3, daß

$$a' : d = \sin\alpha' : \sin\beta$$
$$d : a'' = \sin\gamma : \sin\alpha''$$
$$b' : e = \sin\beta' : \sin\gamma$$
$$e : b'' = \sin\alpha : \sin\beta''$$
$$c' : f = \sin\gamma' : \sin\alpha$$
$$f : c'' = \sin\beta : \sin\gamma''$$

Also $a' . b' . c' : a'' . b'' . c'' = \sin(\alpha', \beta', \gamma') : \sin(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, wenn man durch diese Abkürzung die Producte der drei Sinus andeuten will.

2. (Fig. 85.) Die Producte aus den primären Abschnitten der Transversalen und den um die Seiten des inneren Dreiecks verlängerten verhalten sich, wie die Producte der Sinus der primären und der secundären Winkel.

Denn nach §. 281, L. 3. ist

$$d' : (f' + g) = \sin\gamma' : \sin\alpha''$$
$$e' : (d' + k) = \sin\alpha' : \sin\beta''$$
$$f' : (e' + l) = \sin\beta' : \sin\gamma''$$

Also $d'e'f' : (d' + k)(e' + l)(f' + g) = \sin(\alpha', \beta', \gamma') : \sin(\alpha'', \beta'', \gamma'')$.

Zusatz. Die Producte aus den primären und secundären Abschnitten der Dreiecksseiten verhalten sich, wie die aus den primären Abschnitten der Transversalen und den um die Seiten des inneren Dreiecks verlängerten zu einander:

$$a' . b' . c' : a'' . b'' . c'' = d' . e' . f' : (d' + k)(e' + l)(f' + g).$$

3. (Fig. 86.) Wenn die Transversalen einander in dem nämlichen Punkte G durchschneiden, so sind die Producte der Sinus der primären und der secundären Winkel einander gleich.

Denn werden die Seiten des inneren Dreiecks g, k, l = o angenommen, so ist nach L. 2.

$$\sin(\alpha', \beta', \gamma') = \sin(\alpha'', \beta'', \gamma'').$$

4. (Fig. 86.) Wenn die Transversalen einander in dem nämlichen Punkte G durchschneiden, so sind die Produkte aus den primären und secundären Seitenabschnitten einander gleich.

Denn wenn g, k, l = o, so ist nach L. 2. Zusatz, $a' b' c' = a'' b'' c''$.

5. (Fig. 86.) Wenn $a' . b' . c' = a'' . b'' . c''$, so durchschneiden die Transversalen einander in dem nämlichen Punkte G.

Denn angenommen, c' sei nicht $= AF$, sondern etwa $= AP$, folglich c'' nicht $= BF$, sondern $= BP$,

so wäre zugleich $a' . b' . AP = a'' . b'' . BP$

und nach L. 4. $a' . b' . AF = a'' . b'' . BF$

also $AP : AF = BP : BF$, welches unmöglich. (Vgl. L. 255, L. 3. und 4.)

6. (Fig. 86.) Wenn $\sin\alpha' . \sin\beta' . \sin\gamma' = \sin\alpha'' . \sin\beta'' . \sin\gamma''$, so durchschneiden die Transversalen einander in dem nämlichen Punkte G.

Denn nach der Voraussetzung und L. 1. ist zugleich $a' b' c' = a'' b'' c''$, und folglich nach L. 5. der Punkt G der Durchschnittspunkt der Transversalen.

7. (Fig. 87.) Wenn man an jede Spitze eines Dreiecks zwei gleiche äußere Winkel legt, so schneiden die nach den Durchschnittspunkten der Schenkel gezogenen Transversalen einander in dem nämlichen Punkte G.

$$\begin{aligned} \text{Denn es ist } AT : BT &= \sin\varepsilon : \sin\delta \\ BR : CR &= \sin\varphi : \sin\varepsilon \\ CS : AS &= \sin\delta : \sin\varphi \\ \hline \text{Also I) } AT . BR . CS &= AS . BT . CR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner } AT : CT &= \sin\gamma' : \sin(\alpha + \delta) \\ CT : BT &= \sin(\beta + \varepsilon) : \sin\gamma'' \\ BR : AR &= \sin\alpha' : \sin(\beta + \varepsilon) \\ AR : CR &= \sin(\gamma + \varphi) : \sin\alpha'' \\ CS : BS &= \sin\beta' : \sin(\gamma + \varphi) \\ BS : AS &= \sin(\alpha + \delta) : \sin\beta'' \\ \hline \text{Also II) } AT.BR.CS : AS.BT.CR &= \sin(\alpha'', \beta'', \gamma'') : \sin(\alpha', \beta', \gamma'). \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen und L. 6. folgt, daß die Transversalen einander in dem nämlichen Punkte durchschneiden müssen.

Zusatz. Werden über den Seiten eines Dreiecks gleichseitige oder auch winkelgleiche, gleichschenklige Dreiecke construirt, so sind dieses besondere Fälle des vorstehenden allgemeinen Satzes.

8. (Fig. 88.) Wenn man durch die Seiten eines Dreiecks Kreise legt, welche je eine derselben berühren, so schneiden sie einander in dem nämlichen Punkte G, wofür $\alpha' = \beta' = \gamma'$.

Denn construirt man um a als Sehne einen Kreis **BGC**, wovon b, und um b als Sehne einen Kreis **AGC**, wovon c Tangente ist, so hat man, **CG** und **AG** ziehend, (nach §. 248, L. 5.) $\alpha' = \gamma'$ und $\gamma' = \beta'$, folglich $\alpha' = \beta'$, wonach a Berührungslinie für den durch **AGB** beschriebenen Kreis ist.

§. 285. Aufgaben.

1. Jede der vier Functionen sin α, cos α, tang α, cot α, durch die drei übrigen auszudrücken.
2. Aus dem Sinus eines W. $\alpha = 0{,}856$ die Functionen desselben zu berechnen.
3. Eben so aus cos $\alpha = 0{,}407$.
4. Eben so aus tang $\alpha = 2{,}34$.
5. Eben so aus cot $\alpha = 1{,}203$.
6. Folgende Functionen stumpfer Winkel sollen auf solche von spitzen Winkeln reducirt werden: sin 170°; cos 147°; tang 98°31′; cot 171°14′; cos 168°9′; tang 101°41′; sin 113°53′.
7. Eben so sin 204°17′; tang 305°48′; cos 278°9′; cot 249°39′; cos 200°7′; sin 289°33′; cot 300°1′.
8. Die Sinus und Tangenten für $\frac{1}{12}$R, $\frac{1}{24}$R, $\frac{1}{48}$R anzugeben. (S. §. 259, 2.)
9. Man berechne sin 57° aus den Functionen für 15° und 42°.
10. Eben so cos 9° aus den Functionen für 24° und 15°.
11. Eben so tang 21° aus den Functionen von sin. u. cos. für 42°.
12. Eben so cot 37°30′ aus den Functionen von sin. u. cos. für 75°.
13. Aus der Länge einer senkrechten Stange **AB** = 9′ und derjenigen ihres horizontalen Schattens **AC** = 11,7 die Sonnenhöhe, d. h. Winkel γ, zu bestimmen. Fig. 81.
14. Aus der Sonnenhöhe $\gamma = 48°10'$ und der Länge des horizontalen Schattens **AC** = 201 die Höhe eines Thurms **AB** zu berechnen. Fig. 81.
15. Die horizontale Parallaxe des Mondes, d. h. **BAC**, zu berechnen, wenn man den Abstand des Mondes **CA** = 51000 und den Erdradius **CB** = 860 Meilen annimmt. Fig. 67.
16. Aus der geographischen Breite eines Orts **D**, d. i. W. **ACD** = 38°14′, und dem Radius der Erde **CA** = 860 Meilen den Radius **LD** des Parallelkreises zu finden. Fig. 37.
17. Eine Linie **BC** (auf dem Felde) zu bestimmen, welche nur an ihrem Endpunkte **B** zugänglich sei. Gegeben **AB** = 314, W. α = 41°10′, W. β = 63°50′. Fig. 83.
18. Desgleichen, wenn sie an beiden Endpunkten zugänglich, aber

weder unmittelbar zu messen, noch zu übersehen ist. Gegeben AC = 1073, AB = 1182, W. $\alpha = 45°3'$. Fig. 83.

19. Desgleichen eine Linie DC, die an keinem ihrer Endpunkte zugänglich ist. Gegeben AB = 534, W. ABC = 65°42', W. ABD = 38°16', W. BAD = 52°8', W. BAC = 29°4'. Fig. 76.

20. Desgleichen eine Linie AC, wenn die Standlinie BD dieselbe durchschneidet. Gegeben BD = 1038, W. ABD = 26°36', W. ADB = 85°7', W. CBD = 31°42', W. CDB = 19°44'. Fig. 76.

21. Die unbekannten Stücke eines Dreiecks ABC zu finden, wenn dessen Grundlinie c = 87,75, der Gegenwinkel $\gamma = 73°20'$, und die Differenz der Basiswinkel $(\beta - \alpha) = 13°4'$ ist. Fig. 83.

22. Desgleichen, wenn c = 117,3, $\gamma = 92°18'$ und das Verhältniß der andern Seiten, d. i. a : b = 8 : 11 ist. Fig. 83.

23. Die Abschnitte AD und BD der Grundlinie c zu bestimmen, wenn a = 2134, W. $\gamma = 75°$, W. $\alpha = 33°$ ist. Fig. 83.

24. Die Seite a zu berechnen, wenn der Abschnitt AD = 319, W. $\alpha = 46°15'$, W. $\gamma = 101°10'$ ist. Fig. 83.

25. Die Seiten a und b zu bestimmen, wenn AB = 73,24, (a + b) = 581,4, W. $\beta' = 133°12'$ ist. Fig. 83. (§. 281, L. 8.)

26. Desgleichen, wenn AB' = 513, (b − a) = 207, W. $(\beta' + \alpha) = 164°5'$ ist. Fig. 83. (§. 281, L. 7.)

27. Aus den Seiten eines Dr. a = 323,4; b = 297,5; c = 300 dessen Winkel α, β, γ zu berechnen.

28. Eben so den Flächeninhalt des Dreiecks.

29. Um wieviel übertrifft die Fläche eines Dreiecks, dessen Seiten = 22, 31, 46 sind, die eines Kreises vom Radius 10?

30. Die Seiten a, b, c eines Dreiecks zu berechnen, von welchem die Basiswinkel $\alpha = 36°52'$, $\beta = 110°5'$ und der Flächeninhalt = 1476 gegeben sind.

31. Die Seite eines regul. 13-Ecks im Kreise zu bestimmen, dessen Radius = 6,7 sei.

32. Die Seite eines regul. 7-Ecks sei = 5,73; wie groß ist der Radius des umschriebenen Kreises?

33. Aus dem Centriwinkel FCG = 92°6' und dem Radius CG = 13,5 den Kreisabschnitt FGEF zu berechnen. Fig. 35.

34. Aus dem Inhalte eines Kreissegments FGEF = 24,75 und dem Centriwinkel FCG = 100° den Radius des Kreises CG zu berechnen. Fig. 35.

35. Die Seite eines regul. Polygons sei = 0,736 und die Anzahl seiner Seiten = 41; wie verhalten sich die Radien des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises zu einander?

36. Die Weite des Gesichtskreises, d. h. den Bogen AE, für den

Gipfel eines Berges zu bestimmen, welcher 5460 Par. Fuß über der Meeresfläche liege, wenn der Erdradius zu 3267000 Toisen angenommen wird. Fig. 80.

37. Der Gipfel D eines Berges erscheint in E unter dem W. 19°16′, in G unter dem W. 20°42′ und GE sei = 937 Fuß. Wie hoch ist der Berg? Fig. 14.

38. Die Höhe eines Thurms AB zu bestimmen, wenn die Standlinie EF = 844′, W. EFA = 34°16′, W. AEF = 92°32′, W. AEB = 16°44′ ist. Fig. 90.

39. Zwei Kräfte, = 410 und 320, wirken unter dem W. 51°37′, auf dem nämlichen Punkt A. Größe und Richtung der Resultirenden sollen bestimmt werden. Fig. 29.

40. Größe und Richtung einer Kraft (AD) zu bestimmen, welche in Verbindung mit einer andern AB = 128 eine Resultirende AC = 200 hervorbringt, die mit AB den W. o = 18°24′ bilde. Fig. 29.

41. Eben so für eine Kraft MA, welche den gegebenen Kräften MB = 72 und MC = 84, mit W. BMC = 142° das Gleichgewicht halte. Fig. 56.

42. Den senkrechten Druck einer Last von 516 Pf. auf eine geneigte Ebene BC zu finden, wenn W. ABC = 14°10′ ist. Fig. 14.

43. Eben so das Verhältniß des Drucks von 1000 Pf. auf zwei Ebenen DE und DG, wenn W. DEF = 10° und W. DGF = 16° ist. Fig. 14.

44. Die Kraft zu berechnen, welche ein Fuhrwerk von 1200 Pfund Gewicht auf der geneigten Ebene CB abwärts treibt, wenn W. ABC = 5°40′ ist. Fig. 14.

45. Nach der Formel $s = \frac{1}{2} gt^2 . \sin \alpha$ die von einem, auf geneigter Ebene hinabgleitenden, Körper durchlaufene Bahn s zu berechnen, wenn $\frac{1}{2}$ g = 15 Pariser Fuß, t = 4 Sec. und α = 10°, 20°, 30°, 40°, 50° gesetzt wird.

46. Nach der Formel $c = gt . \sin \alpha$ die Geschwindigkeit c aus den nämlichen Angaben zu berechnen.

47. Die Zeit zu bestimmen, welche der Körper zum Durchlaufen der Ebene gebraucht, wenn $\alpha = 35°16'$ und s = 316 Fuß angenommen wird.

48. Nach der Formel $\frac{2c^2 . \sin \alpha . \cos \alpha}{g}$ oder $\frac{c^2}{g} . \sin 2\alpha$ die Wurfweite einer abgeschossenen Kugel zu bestimmen, wenn die Wurfgeschwindigkeit c = 200 Fuß gesetzt wird.

49. Aus der geographischen Breite zweier Oerter F, D das mitt-

lere Verhältniß ihrer Erleuchtung durch die Sonne zu berechnen. Es sei W. ACD = 40° 20′, W. ACF = 10° 40′. Fig. 91.

50. Ein Lichtstrahl GC werde im durchsichtigen Körper ABKH nach CO gebrochen, so daß Winkel GCL = 46°, Winkel OCI = 35° 11 sei. Hieraus das Berechnungsverhältniß zu bestimmen. Fig. 92.

Anhang.

Bei Anwendung der Trigonometrie auf beliebige vielseitige Figuren erscheint es zuweilen zweckmäßig, die Richtung sämmtlicher Seiten auf eine einzige normale Richtung zu beziehen. Bezeichnet man mit a, b, c ... f die Seiten eines Polygons ABC ... F (Fig. 93.) und durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varphi$ die spitzen Winkel, welche sie mit der normalen Richtung NS bilden, so findet man unter der Annahme, daß die Punkte A und D in dieser Richtung, B und E aber in der darauf senkrechten am weitesten von einander abstehen, folgende Gleichungen:

1) $a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma = d \cdot \cos\delta + e \cdot \cos\varepsilon + f \cdot \cos\varphi$.

2) $e \cdot \sin\varepsilon + f \cdot \sin\varphi + a \cdot \sin\alpha = b \cdot \sin\beta + c \cdot \sin\gamma + d \cdot \sin\delta$.

Denn beschreibt man ein Rechteck, NQRS, um das gegebene Polygon, so daß zwei Seiten desselben (NS, QR) die normale Richtung haben und die beiden anderen (NQ, RS) senkrecht zu dieser sind, so erhält man die vorstehenden Gleichungen als Ausdruck der einander gegenüberstehenden gleichen Seiten des Rechtecks.

Enthält das Polygon auch einspringende Winkel, so werden in den obigen Ausdrücken diejenigen Glieder negativ, in denen Seiten vorkommen, welche sich im Sinne der angenommenen Projectionsrichtung zurückwenden. So findet man für das Polygon in Fig. 94. die Gleichungen:

1) $a \cdot \cos\alpha - b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma + d \cdot \cos\delta =$
$e \cdot \cos\varepsilon + f \cdot \cos\varphi + k \cdot \cos\varkappa + l \cdot \cos\lambda$.

2) $b \cdot \sin\beta + a \cdot \sin\alpha + l \cdot \sin\lambda - k \cdot \sin\varkappa + f \cdot \sin\varphi =$
$c \cdot \sin\gamma + d \cdot \sin\delta + e \cdot \sin\varepsilon$.

Ausdrücke, wie die vorstehenden, können zur Prüfung für die Richtigkeit der Bestimmung sämmtlicher Seiten eines Polygons und ihrer Richtungen benutzt werden, wie dies namentlich bei jenen Dreiecksnetzen geschieht, durch welche eine Gegend bei der s. g. Triangulirung überzogen wird, indem man auf hervorragenden Punkten die Winkel, und irgendwo in möglichst horizontaler Fläche eine Standlinie als Basis mißt. Der durch einen Punkt A (Fig. 95.) gelegte Meridian bezeichnet hier die normale Richtung, auf welche

sämmtliche Seiten des Dreiecksnetzes projicirt werden können. Dies geschieht, vermöge der Cosinus, der s. g. Azimuthalwinkel, nach den obigen Ausdrücken (1) während man durch Multiplication der Seiten mit den Sinus dieser Winkel die Abstände der einzelnen Punkte B, C, D . . . . vom Normalmeridian NS erhält. Stimmen die Resultate einer solchen Berechnung mit denen der trigonometrischen Bestimmung sämmtlicher Seiten des Dreiecksnetzes aus den beobachteten Winkeln der einzelnen Dreiecke, so liegt in dieser Uebereinstimmung die Bestätigung der Richtigkeit in den angestellten Messungen; denn in einem Falle hat man die Punkte des Dreiecksnetzes A, B, C, D . . . . mit Hülfe der Dreieckswinkel, im andern dagegen unabhängig von diesem mit Hülfe der Azimuthalwinkel und durch ihre Coordinaten (Ab, Bb; Ac, Cc u. s. w.) bestimmt.

Zweites Buch.

Die Geometrie des Raumes.

§. 286. Lage im Raume. Die Betrachtung von Linien Winkeln und Figuren wird begreiflich dann schwieriger und verwickelter, wenn wir dieselben nicht in der nämlichen Ebene voraussetzen, sondern in verschiedenen, außerhalb einander befindlichen, annehmen, oder zu der allgemeinen Vorstellung des Raumes mit seinen drei Dimensionen übergehen, von denen bisher nur Länge und Breite betrachtet wurden. Das Hinzukommen einer neuen Ausdehnung führt für die Bestimmung der gegenseitigen Lage der Linien auch neue Bedingungen ein, und fordert die Betrachtung mehrer Ebenen im Raume, deren Vorstellung durch die allgemeine Voraussetzung der früheren geometrischen Lehren, welche alle Figuren in einer gemeinsamen Ebene annahmen, ausgeschlossen blieb. Damit verbindet sich nothwendig eine neue Ansicht der Winkelgröße, wodurch die Neigung von Flächen im Raume auf ähnliche Weise gemessen und bestimmt werden könne, wie die Neigung zweier Linien in der Ebene bestimmt wurde.

§. 287. Stereometrie. Die Verbindung jener dritten Ausdehnung des Raumes mit denen der Länge und Breite führt zu einem allgemeinern Begriffe der räumlichen Gestalten oder Figuren, als dem bisher aufgestellten. Dieselben erscheinen nämlich zunächst als Liniengebilde im Raume, so wie die ebenen Figuren (ganz abgesehen von dem, was sie als Theil der Ebene begränzen und enthalten) als Liniengebilde in der Ebene betrachtet werden durften. Versteht man dagegen unter Figuren überhaupt ein ringsum begränztes Ausgedehntes im Raume, so ist freilich die einfachste Art der Begränzung die durch Linien in der Ebene, die allgemeinere

aber die Begränzung durch Flächen, wodurch diejenigen Raumformen entstehen, die man Körper zu nennen pflegt. Der besondere Zweig der Geometrie, welcher sich mit ihrer Untersuchung befaßt, wird unter dem Namen Stereometrie oder Körperlehre der Untersuchung der ebenen Figuren oder Planimetrie gegenüber gestellt.

Erstes Capitel.

Die Linien, Ebenen und Winkel.

§. 288. Linien und Ebenen im Raume. Durch einen im Raume gegebenen Punkt können wir nach allen Richtungen desselben eine unbegränzte Menge gerader Linien gelegt uns vorstellen; sobald aber außer jenem noch ein zweiter Punkt gegeben wird, hört jede Unbestimmtheit auf und es ist nur eine einzige — die beide Punkte verbindende — gerade Linie möglich.

So wie eine unbegränzte Menge gerader Linien lassen sich auch unendlich viele Ebenen durch einen im Raume gegebenen Punkt legen; selbst wenn noch ein zweiter Punkt — oder eine beide verbindende gerade Linie — angenommen wird, ist die Lage der durch sie gelegten Ebene noch völlig unbestimmt, weil man sie um die Gerade (wie um eine feste Achse) in Drehung versetzt denken kann, und erst dann erhält sie eine bestimmte Lage im Raume, wenn sie einen gegebenen dritten, außer der Geraden liegenden Punkt antrifft. Demnach ist durch drei Punkte des Raumes die Lage einer Ebene in demselben völlig bestimmt oder durch drei Punkte nur eine Ebene zu legen möglich.

§. 289. Winkel im Raume. Durch einen Punkt außer einer geraden Linie lassen sich unendlich viele Gerade im Raume ziehen, welche die gegebene nirgends treffen. Aber nur die eine unter diesen Linien heißt der gegebenen parallel, welche sich in der, durch dieselbe und den Punkt gelegten, Ebene befindet. Eine Gerade wird einer Ebenen parallel genannt, wenn beide — unbegränzt verlängert — einander nirgends begegnen. Senkrecht zu derselben darf sie nur dann genannt werden, wenn alle durch ihren Treffpunkt in der Ebene gezogenen geraden Linien rechte Winkel mit ihr einschließen sollten. In jedem andern Falle, der nicht unter den beiden vorhergehenden begriffen ist, hat die Linie eine geneigte Lage gegen die Ebene.

Denken wir uns durch zwei Punkte C, D eine Ebene CDF (Fig. 97.) gelegt und diese in Drehung versetzt, so bildet sie in jeder neuen Lage CDA mit der ursprünglichen einen Flächenwinkel, so wie die in ebener Fläche gedrehte gerade Linie mit ihrer ursprünglichen Richtung Linienwinkel einschließt. Diesen Flächenwinkel, wovon die Gerade CD Scheitelkante genannt wird, bezeichnet man durch A (CD) F, wo die Einklammerung der beiden mittlern Buchstaben andeuten soll, daß CD Scheitelkante des Winkels sei, dessen Schenkel-Ebenen durch die Lage der Punkte A und F bestimmt werden. Sei nun CDE eine Erweiterung der Ebene CDF auf der andern Seite von CD, so entstehen die Neben-Flächenwinkel A(CD)F und A(CD)E, welche im Falle der Gleichheit rechte, im Falle der Ungleichheit spitze und stumpfe genannt werden; durch fernere Erweiterung der Ebene CDA werden zwei Paare von Scheitel-Flächenwinkeln gebildet. Offenbar läßt sich auf die nämliche Weise, wie bei den Linienwinkeln, auch hier die Gleichheit der rechten wie der Scheitelwinkel darthun, so wie daß Neben-Flächenwinkel gleich zwei rechten und alle Winkel um eine Scheitelkante CD gleich vier rechten sein müssen. Bei gleichen Nebenwinkeln steht die eine Schenkel-Ebene auf der andern senkrecht, bei ungleichen aber gegen dieselbe geneigt; parallel heißen zwei Ebenen, wenn sie — wie weit man sie auch erweitert denken möge — einander nirgends im Raume treffen, also keinen Flächenwinkel bilden.

§. 290. Lehrsätze über die gegenseitige Lage von Linien und einer Ebene.

1. Wenn eine gerade Linie und eine Ebene einander durchschneiden, so kann dieses nur in einem Punkte geschehen.

Denn angenommen, sie hätten noch einen zweiten Punkt mit einander gemein, so würde (nach §. 222.) die Gerade völlig in die Ebene fallen, welches der Voraussetzung entgegen ist.

2. Eine gerade Linie kann nicht zum Theil in, zum Theil außer einer Ebene liegen.

Denn denkt man sich das Gegentheil, so ließe sich das in der der Ebene liegende Stück auch in ihr verlängern, und man müßte gegen den Begriff einer geraden eine Trennung derselben nach zwei verschiedenen Richtung annehmen.

3. (Fig. 97.) Zwei gerade Linien CD, EF, welche einander schneiden, liegen in derselben Ebene und bestimmen deren Lage.

Denn es sind beide Gerade durch drei Punkte B, E, D völlig bestimmt, und durch diese (nach §. 288.) nicht mehre Ebenen möglich.

Zusatz I. Ein Dreieck EBD bestimmt aus gleichen Gründen die Lage einer Ebene.

Zusatz II. Zwei Parallelen ED, CF, bestimmen die Lage

einer Ebene, weil CF (nach §. 289.) in der Ebene der Punkt C, D, E liegt.

4. (Fig. 97.) Eine gerade Linie AB, welche auf zwei einander schneidenden geraden Linien CD, EF in ihrem Durchschnittspunkte senkrecht steht, ist eine Senkrechte auf der durch diese Linien gelegten Ebene.

Denn denken wir uns auf beiden Seiten von B gleiche Stücke, BF = BE und BC = BD auf den gegebenen Linien abgeschnitten, die Endpunkte durch CF und DE verbunden, willkürlich eine Linie GK, und nach irgend einem Punkte A der Senkrechten die Geraden aus E, K, D, C, G, F gezogen, so ist

(nach §. 237, L. 1.) Dr. CBF $\cong$ DBE, also . . . . CF = DE
Dr. ABC $\cong$ ADB, ... AC = AD
Dr. ABF $\cong$ ABE, ... AF = AE
Daraus folgt Dr. ACF $\cong$ ADE, ... W. ACG = ADK
Ferner ist Dr. CBG $\cong$ DBK, also . . . CG = KD
Daraus folgt, daß Dr. ACG $\cong$ ADK, ... AG = AK
und endlich, daß Dr. ABG $\cong$ ABK, ... W. ABG = ABK

womit die Richtigkeit des Lehrsatzes für jede, willkürlich durch B in der Ebene MN gezogene, Linie erwiesen ist.

Zusatz I. Die Senkrechte AB ist die kürzeste aller vom Punkte A auf die Ebene gezogenen Linien; also mißt sie seinen Abstand von der Ebene.

Zusatz II. Durch einen Punkt A läßt sich nur eine Senkrechte auf die Ebene MN ziehen, und aus B nur eine errichten, weil in keiner Lage eine Dreiecksebene AGK gedacht werden kann, worin zwei Senkrechte auf GK vorkämen.

Zusatz III. Wenn von irgend einem Punkte A auf eine Ebene MN eine Senkrechte AB und mehre geneigte Linien AD, AK, AE u. s. w. ausgehen, so sind die von jener gleich entfernten einander gleich, von den ungleich entfernten aber ist die entfernteste auch die längste Linie; d. h. wenn BE = BD, so ist auch AE = AD, und wenn BD > BK, so ist auch AD > AK.

5. (Fig. 97.) Wenn eine gerade Linie AB senkrecht auf drei anderen steht, die von dem nämlichen Punkte B ausgehen, so liegen diese in einer Ebene.

Denn angenommen, es liege, wenn man durch zwei Linien BC und BF die Ebene MN gelegt, die dritte Gerade außerhalb derselben, etwa in der Richtung $B\gamma$, so hat man, wenn $A\gamma$ und aus B nach dem Durchschnittspunkte G eine Linie gezogen wird (nach L. 4.) ABG = R und nach der Annahme $AB\gamma$ = R, welches unmöglich ist.

Zusatz. Der Schenkel BC eines rechten Winkels ABC, welcher sich um den ruhenden Schenkel AB desselben bewegt, erzeugt

demnach durch seine Drehung eine von AB senkrecht durchschnittene Ebene MN. In Hinsicht auf diese Erzeugungsart einer Ebene MN darf man jede senkrecht auf derselben stehende Gerade eine Achse und jeden Punkt A dieser Senkrechten einen Pol in Bezug auf zwei, aus ihrem Fußpunkte B gezogene Linien BD, BE nennen.

6. (Fig. 98.) Zwei auf einer Ebene senkrecht stehende Linien AB, CD sind unter einander parallel.

Denn man verbinde ihre Fußpunkte B, D, lege an D einen rechten Winkel BDF, trage auf DF und BA gleiche Längen ab, und ziehe AD, AF und BF, so ist Dr. FDB $\cong$ ADB, folglich FB = AD, und da AB = DF, auch Dr. AFB = FAD. Folglich ist W. FDA = ABF = R oder FD senkrecht auf DA wie auf DB und DC, wonach (L. 5.) diese drei Linien in einer Ebene ABD liegen. Daraus aber folgt der Parallelismus von AB und CD.

7. (Fig. 98.) Steht eine Linie AB senkrecht auf einer Ebene, so ist dies auch mit jeder ihr parallelen DC der Fall.

Es gilt hier die nämliche Hülfsconstruction, wie zu L. 6., mit dieser Folgerung: Da FD auf DB und DA, also der Ebene ADB, senkrecht steht, worin auch die Gerade DC liegen muß, da sie AB par. ist, so ist (nach L. 4.) auch W. FDC = R und also CD auf MN senkrecht.

8. (Fig. 98.) Zwei Linien AC, EF sind parallel, wenn sie einer dritten im Raume BD parallel sind.

Denn denkt man sich BA und BE rechtwinklig auf BD, und dann AE gezogen, so stehen sowohl AC und EF (nach L. 7.) als BD auf der Ebene ABE senkrecht, und sind deshalb (nach L. 6.) einander parallel.

9. (Fig. 99.) Eine, auf der Ebene MN im Punkte C geneigt stehende gerade Linie AB schließt mit der nach dem Fußpunkte der Senkrechten gezogenen Linie CB einen kleineren Winkel ein, als mit einer beliebigen andern CD in der Ebene.

Denn macht man CD = CB und zieht AD, so ist AD > AB, und deshalb (nach §. 237, L. 14.) W. ACD > ACB.

Erklärung. Dieser kleinste Winkel, welcher von der Geneigten CA und einer, nach dem Fußpunkte der Senkrechten AB gezogenen Linie CB eingeschlossen wird, heißt der Neigungswinkel der Geraden CA gegen die Ebene MN. Gleiche Neigung haben gerade Linien gegen eine Ebene, wenn die Neigungswinkel derselben einander gleich sind.

10. (Fig. 100.) Wenn eine Gerade GK in der Ebene MN auf einem der Schenkel eines Neigungswinkels ACB senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf dem andern Schenkel.

Denn sei AC die Geneigte, AB die Senkrechte von einem ihrer Punkte A auf die Ebene MN, also CB der in, CA der außer dieser Ebene liegende Schenkel des Neigungswinkels, so ist:

I. wenn GCB = R und BD par. GC angenommen wird, BD, folglich (nach L. 7) auch GC senkrecht auf der Ebene ABC; also GCA = R;

II wenn GCA = R und CL senkrecht auf MN angenommen wird, GC senkrecht auf der Ebene LCA, worin (nach L. 6) auch BA, also auch BC liegen muß. Folglich ist GCB = R.

11. (Fig. 98.) Zwei gleichartige (spitze, rechte oder stumpfe) Winkel, deren Schenkel EB, FD und EA, FC parallel sind, sind einander gleich.

Denn macht man AE = CF und EB = FD, so sind BD, EF, AC Parallelen von gleicher Länge und deshalb AB = CD, also Dr. AEB ≅ CFD, und endlich W. E = F.

12. (Fig. 98.) Zwei Parallelen AE, FC haben gegen eine schneidende Ebene MN gleiche Neigung.

Denn macht man EA = FC und fällt die Senkrechten AB und CD, so ist (nach L. 6 und 11) W. EAB = W. FCD, also auch W. AEB = CFD.

§. 291. Lehrsätze über die gegenseitige Lage von Linien und zwei oder mehreren Ebenen.

1. (Fig. 98.) Wenn zwei Ebenen MN, CE einander schneiden, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt EF eine gerade Linie.

Denn lägen irgend drei Punkte desselben nicht in gerader Linie, so müßten beide Ebenen (nach §. 288) in eine zusammenfallen, was gegen die Voraussetzung streitet.

Erklärung. Errichtet man in zwei einander schneidenden Ebenen aus irgend einem Punkte E ihrer Durchschnittslinie Senkrechte, so ist der von ihnen gebildete Neigungswinkel AEB das Maaß des Flächenwinkels, welchen die Ebenen bilden. Welcher Punkt der Durchschnittslinie EF hierzu gewählt werde, ist gleichgültig, da (nach §. 290, L. 11) alle so gebildete Neigungswinkel einander gleich sein müssen. Die Ebene des Neig.-W. AEB schneidet (nach §. 290, L. 4) die Durchschnittslinie EF beider Ebenen nothwendig senkrecht. Ist der Neig.-W. ein rechter, so stehen beide Ebenen senkrecht auf einander.

2. (Fig. 101.) Wenn eine Linie LE senkrecht auf einer Ebene MN steht. so gilt dasselbe von jeder durch LE gelegten Ebene AS.

Denn denkt man sich aus E eine Senkrechte EH auf AB in der Ebene MN gezogen, so ist der Neig.-W. LEH = R, folglich die Ebene AS senkrecht auf MN.

3. (Fig. 93.) Wenn eine Ebene AS senkrecht auf einer an

deren MN steht, so gilt dasselbe von jeder, in der ersten auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt AB senkrecht gezogenen Linie LE.

Denn zieht man EH senkrecht auf AB, so ist nach Voraussetzung W. HEL = R = W. LEA, folglich (nach §. 290, L. 4) LE senkrecht auf MN.

4. (Fig. 101.) Wenn eine Ebene AS auf einer andern MN senkrecht steht, und auf dieser aus einem Punkte E des Durchschnitts eine Senkrechte errichtet wird, so muß dieselbe ganz in AS liegen.

Denn fiele sie nicht mit der in AS gezogenen Senkrechten EL zusammen, welche (nach L. 3) auf MN senkrecht ist, so wären (gegen §. 290, L. 4, II.) aus E auf MN zwei Senkrechte möglich

5. Werden zwei schneidende Ebenen von einer dritten durchschnitten, so convergiren die drei Durchschnittslinien entweder in dem nämlichen Punkte, oder sie sind einander parallel.

I. (Fig. 99.) Schneiden einander die Ebenen ABC und ACD in der Kante AC, welche der dritten Ebene MN nicht par. sei, so trifft sie diese in irgend einem Punkte C, welcher allen drei Ebenen gemein ist. Folglich müssen (nach L. 1) auch die drei Durchschnittslinien derselben AC, BC, DC, in diesem Punkte convergiren.

II. (Fig. 98.) Schneiden die Ebenen ABCD, ACEF einander in einer Kante AC, welche der dritten Ebene MN par. sei, so ist sie auch nothwendig den Durchschnittslinien BD, EF parallel.

6. (Fig. 102.) Wenn zwei Ebenen AD, AF senkrecht auf einer dritten MN stehen, so gilt dasselbe von ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie AC.

Denn wenn man aus A auf MN eine Senkrechte AC errichtet, so muß diese (nach L. 4) in beiden Ebenen AD und AF zugleich liegen, also ihre Durchschnittslinie sein.

7. (Fig. 101.) Werden zwei parallele Ebenen MN, PQ durch eine dritte RS geschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Denn angenommen, sie wären es nicht, so müßten auch die Ebenen MN, PQ einander irgendwo treffen, gegen die Voraussetzung.

8. (Fig. 101.) Werden zwei Ebenen MN, PQ von einer Geraden LF beide senkrecht durchschnitten, so sind sie einander parallel.

Denn angenommen, die in beiden Ebenen gezogenen Linie EB, FD könnten einander in irgend einem Punkte (O) treffen, so müßten, weil LEB = R = LFD ist, die Linien OE und OF zwei Senkrechte aus O auf LF sein, welches unmöglich ist.

9. (Fig. 102.) Wird eine von zwei parallelen Ebenen MN, PQ senkrecht von einer Geraden AC durchschnitten, so gilt dieses auch von der andern.

Denn angenommen, AC stehe auf MN senkrecht, sei aber gegen PQ geneigt, also z. B. W. ACF stumpf oder spitz, so müßten

in der Durchschnittsebene ACF die Geraden CF, AE verlängert einander treffen, welches nach Vg. unmöglich ist.

10. (Fig. 102.) Wird eine von zwei parallelen Ebenen MN, PQ senkrecht von einer dritten Ebene AF durchschnitten, so gilt dieses auch von der andern.

Denn zieht man durch die par. Durchschnittslinie AE, CF eine Senkrechte AC, so steht diese (nach L. 3) senkrecht auf MN, folglich (nach L. 9 und 2) auch auf PQ.

11. (Fig. 101.) Eine zwei parallele Ebenen MN, PQ durchschneidende gerade Linie LG ist gegen beide gleich geneigt.

Denn wäre sie es nicht, so müßten, wenn man aus irgend einem Punkte L der Geneigten eine Senkrechte auf MN zieht, die (nach L. 9) auch auf PQ senkrecht sein muß, die verlängerten Schenkel KE, GF, folglich auch die Ebenen MN, PQ einander irgendwo treffen, gegen die Voraussetzung.

12. (Fig. 101.) Eine zwei parallele Ebenen MN, PQ durchschneidende Ebene RT ist gegen beide gleich geneigt.

Denn zieht man durch die par. Durchschnittslinien AM, CP eine Senkrechte RI und aus den Durchschnittspunkten A, C derselben in den Ebenen MN, PQ zwei andere Senkrechte AB, CD auf AM und CP, so folgt aus der Gleichheit der W. IAB und ACD auch die gleiche Neigung der Ebene RT gegen die Ebenen MN und PQ.

13. (Fig. 101.) Sind zwei Ebenen MN, PQ, welche von einer dritten RT in parallelen Linien AM, CP geschnitten werden, gegen diese Ebene gleich geneigt, so sind sie einander parallel.

Denn legt man durch AM und CP eine gemeinschaftliche Senkrechte RI, und durch diese die auf RT senkrechte Ebene RS, so würden bei der Annahme, daß MN und PQ nicht parallel wären, die Durchschnittslinien AB, CD einander irgendwo treffen, also W. IAB und ICD verschieden sein, welches der Vg. widerspricht.

14. (Fig. 101.) Die zwischen zwei parallelen Ebenen MN, PQ liegenden Parallelen AC, KG sind einander gleich.

Denn eine durch dieselben gelegte Ebene AG schneidet MN und PQ (nach L. 7) in den Parallelen AK und CG; folglich ist AKGC ein Parallelogramm, und AC = KG.

Zusatz. Alle Senkrechten zwischen parallelen Ebenen sind gleich, und messen, als die kürzesten Verbindungslinien der Ebenen, deren Abstand.

15. (Fig. 102.) Winkel im Raume mit parallelen Schenkeln, wie BAE, DCF, liegen in parallelen Ebenen.

Denn macht man CF = AE, CD = AB, so entstehen zwei Parallelogramme AD und AF, wonach AC = BD = EF. Angenommen nun, daß eine durch C mit MN parallel gelegte Ebene

von den Linien BD, EF in andern Punkten als D und F etwa, in G und H durchschnitten werde, so wären (nach L. 14) BG und EH = AC, gegen die nothwendige Folge der Voraussetzung.

Zusatz. Durch jeden, außer einer Ebene MN gegebenen Punkt C läßt sich nur eine derselben parallele Ebene legen.

16. (Fig. 102.) Sind drei oder mehre Parallelen, welche nicht in derselben Ebene liegen, zwischen zwei Ebenen einander gleich, so sind diese Ebenen parallel.

Denn der Parallelismus der Ebenen MN, PQ folgt (1) für drei gleiche Parallelen AC, BD, EF unmittelbar aus L. 15; (2) für mehr, als drei Parallelen aus dem Zusatz zu L. 15, indem man durch die Endpunkte einer bestimmten Parallele, (z. B. AC) und je zwei anderer Ebenen legt, die zu einer Ebene zusammenfallen müssen.

Zusatz. (Fig. 102.) Durch Verbindung der Durchschnittspunkte, in welchen zwei par. Ebenen MN, PQ von parallelen Linien getroffen werden, entstehen congruente Figuren.

17. (Fig. 103.) Zwei einer dritten Ebene RS parallele Ebenen MN, PQ sind einander parallel.

Denn eine auf RS errichtete Senkrechte muß (nach L. 2) auf jeder der ihr par. Ebenen MN, PQ senkrecht stehen, welche mithin (nach L. 8) einander parallel sind.

18. (Fig. 102.) Durch zwei, einander nicht schneidende, gerade Linien AB, CF lassen sich immer zwei parallele Ebenen legen.

Denn zieht man aus einem beliebigen Punkt A der einen Geraden AB eine Parallele AE mit der andern CF, und eben so aus einem Punkte C der letzten eine Par. CD mit jener, so sind (nach L. 15) die Ebenen DCF und BAE parallel.

19. (Fig. 102.) Durch zwei einander nicht schneidende gerade Linien AB, CF läßt sich immer eine gemeinschaftliche Senkrechte ziehen.

Denn denkt man sich die Ebenen MN und PQ, die (nach L. 18) einander parallel durch die Geraden AB, CF gelegt worden, von den senkrechten Ebenen ABD und CFE durchschnitten, so stehen diese (nach L. 10) auf beiden Ebenen MN, PQ zugleich senkrecht, folglich (nach L. 6) auch ihre Durchschnittslinie AC. Also ist W. BAC = W. ACF = R.

Zusatz. Die senkrechte Verbindungslinie CA der Geraden AB, CF ist die kürzeste unter allen. (L. 14 Zus.)

20. (Fig. 103.) Zwei gerade Linien AD, CB, welche drei parallele Ebenen durchschneiden, werden von diesen verhältnißgleich getheilt.

Denn sind A, F, D die Durchschnittspunkte der einen, so wie C, G, B der andern Geraden, und trifft die Verbindungslinie AB

die Ebene **PQ** im Punkte **E**, so ist (nach L. 7) **EF** mit **BD** und **EG** mit **AC** parallel. Daraus folgt, daß **AE : EB = AF : FD = CG : GB**.

§. 292. Ecke. (Fig. 104.) Sind die Durchschnittslinien **AM**, **BM**, **CM** dreier Ebenen nicht etwa parallel, so müssen sie (nach §. 291, L. 5) in dem nämlichen Punkte **M** convergiren und bilden an demselben drei Linienwinkel **AMB**, **BMC**, **CMA**. Der, einerseits durch den Punkt **M** und die Ebenen **AMB**, **BMC**, **CMA** begränzte, andererseits aber völlig unbegränzte Theil des Raumes wird körperlicher Winkel oder Ecke genannt und durch (**M**) **ABC** bezeichnet, wo die Einklammerung den Scheitel der Ecke, und **A**, **B**, **C** drei Richtungspunkte ihrer Kanten andeuten. Außer den drei, von diesen gebildeten Kantenwinkeln, welche (als Ebenen betrachtet) zugleich die Seitenflächen (oder Seiten) der Ecke sind, enthält dieselbe drei Flächenwinkel vermöge des dreifachen Durchschneidens von je zwei Seitenflächen.

Obgleich man sich nach dem Vorhergehenden die Seitenflächen und Kanten als unbegränzt vorzustellen hat, nimmt man doch zur Veranschaulichung der Construction eine willkürliche Begränzung beider dadurch vor, daß man die Kanten der Ecke von gleicher Länge, oder die Richtungspunkte derselben in gleichen Abständen vom Scheitel und durch Kreisbogen unter einander verbunden denkt. Nach dieser Vorstellungsart erscheinen die Seitenflächen sämmtlich als Kreisausschnitte, wie **AMB**, **AMC**, **BMC**. Die von ihnen gebildeten Flächenwinkel werden am zweckmäßigsten durch griechische Buchstaben α, β, γ . . . . angedeutet, welche den Kanten **MA**, **MB**, **MC** . . . . entsprechen; eben so bezeichne man die, diesen Kanten gegenüberliegenden Kantenwinkel **BMC**, **AMC**, **AMB** abkürzend durch die lateinischen Buchstaben a, b, c. Man erhält dadurch ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind, und erkennt hieraus leicht, wie die dreiseitige Ecke und das sphärische Dreieck in der genauesten Beziehung zu einander stehen. Wenn zwei Seiten einer dreiseitigen Ecke einander gleich sind, darf man sie (nach Analogie des Dreiecks) eine gleichschenklige, wenn aber alle drei Seiten übereinstimmen, eine gleichseitige nennen.

Durch mehr, als drei in dem nämlichen Punkte einander durchschneidende Ebenen wird eine vielseitige Ecke gebildet, welche sich in dreiseitige zerlegen läßt, indem man stets drei benachbarte Kanten derselben zusammenfaßt und durch Ebenen verbindet. Da jede Seitenfläche an einer Kante endigt, mit welcher die folgende wieder anfängt, bis endlich die letzte Seitenfläche sich an die erste schließt, so müssen Seitenflächen und Kanten einer Ecke stets in gleicher Anzahl vorhanden sein. Da ferner in jeder Seitenfläche von zwei Kanten ein Kantenwinkel, und eben so an jeder Kante von zwei Ebenen

ein Flächenwinkel gebildet wird, so hat eine Ecke die Winkel beider Arten mit Seitenebenen und Kanten in gleicher Menge.

§. 293. Lehrsätze über die dreiseitige Ecke.

1. (Fig. 104.) In einer gleichschenkligen Ecke liegen gleichen Seiten (Kantenwinkeln) gleiche Flächenwinkel gegenüber.

Denn man fälle aus **A** die Senkrechten **AP**, **AF** und **AG** auf die Seitenebene **BMC** und ihre Kanten, und ziehe Linien von **P** nach **F**, **G**, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, von denen Dr. **AMF** $\cong$ **AMG**, folglich auch Dr. **APF** $\cong$ **APG** sein muß, woraus W. **AFP** = W. **AGK**, d. i. $\beta = \gamma$, folgt.

2. (Fig. 104.) Sind in einer Ecke zwei Flächenwinkel einander gleich, so sind es auch die gegenüberliegenden Seiten (Kantenwinkel).

Denn aus **AGP** = **AFP** folgt (§. 237., L. 15) **AG** = **AF**, und hieraus Dr. **AMG** $\cong$ **AMF**, also W. b = W. c.

3. (Fig. 104.) Der größeren Seite einer Ecke liegt auch der größere Winkel gegenüber.

Denn ist **AMB** > **AMC**, also auch **AF** > **AG**, so ist W. **AFP** < W. **AGP**.

4. (Fig. 104.) Dem größeren Winkel einer Ecke liegt auch die größere Seitenfläche gegenüber.

Denn die Annahme, daß dem kleinern Winkel die größere oder eine gleiche Seite gegenüber liegen könne, streitet gegen L. 3 u. 2.

5. (Fig. 105.) Zwei Seiten einer Ecke zusammengenommen sind größer, als die dritte.

Denn legt man die beiden kleineren Seiten **AMB** und **CMB** an einander = **CMD**, und bildet die Ecke (M) **ACD**, so entsteht die gleichschenklige Ecke (M) **ABD**, als Theil derselben; folglich ist der Flächenwinkel an **A** größer als der an **D** und daher (nach L. 4) **CMD** > **CMA**, oder **AMC** < **AMB** + **CMB**.

6. (Fig. 110.) Die Summe der drei Kantenwinkel einer Ecke beträgt stets weniger als vier rechte Winkel.

Denn denkt man sich durch die Ecke **D** eine Ebene **ABC** gelegt und einen beliebigen Punkt **P** im Dreieck **ABC** mit dessen Eckpunkten verbunden, so liegen sowohl um **D** als um **P** drei Dreiecke, deren Winkel zusammen **6R** betragen. Die sechs untern Winkel in den Seitendreiecken betragen aber nothwendig mehr, als die in dem Durchschnittsdreieck enthaltenen und lassen daher, von **6R** abgezogen, einen kleineren Rest als diese, d. h. weniger als **4R**.

Zusatz. Die Behauptung gilt nicht minder von jeder nseitigen Ecke und wird dafür in gleicher Art bewiesen.

7. (Fig. 118.) Zwei Verticalecken, (M)**ABC** und (M)**KHL**, sind symmetrisch.

Denn die Seiten und Winkel in beiden sind paarweise gleich, aber der Lage nach verschieden, wie man dies durch die Vorstellung

erkennt, daß eine menschliche Gestalt die Füße dem Centrum M und das Gesicht der Kante AM oder KM zugewendet, gleiche Seiten (wie AMC, HMK) in der einen Ecke zur Rechten, in der andern aber zur Linken haben würde.

§. 294. Aufgaben.

1. Durch einen im Raume gegebenen Punkt F mit einer gegebenen Geraden BD eine Parallele zu ziehen. Fig. 98.
2. Von einem gegebenen Punkt F auf eine gegebene Gerade BD eine Senkrechte zu ziehen. Fig. 98.
3. Durch einen Punkt B in einer Geraden AB eine senkrechte Ebene MN zu legen. Fig. 97.
4. Durch einen Punkt C außer einer Geraden AB eine senkrechte Ebene MN durch dieselbe zu legen. Fig. 97.
5. Durch den gegebenen Punkt E einer Geraden EF in einer Ebene MN eine auf EF senkrechte Ebene ABE zu legen. Fig. 98.
6. Auf einer Ebene MN in einem Punkte B eine Senkrechte BA zu errichten. Fig. 97. (Aufl. durch Ziehung von CD und EF durch B und Anwendung von Aufg. 5.)
7. Auf einer Ebene MN von einem Punkte A außer derselben eine Senkrechte zu fällen. Fig. 100.
8. Den Abstand eines Punktes A von einer Ebene MN zu bestimmen. Fig. 100.
9. Auf einer Ebene MN aus den Punkten B, E u. s. w. Senkrechte zu errichten, wenn eine Senkrechte AC gegeben ist. Fig. 102.
10. Durch eine Gerade BD in der Ebene MN eine auf MN senkrechte Ebene ABCD zu legen. Fig. 98.
11. Durch eine gegen die Ebene MN geneigte Gerade CA eine auf MN senkrechte Ebene zu legen. Fig. 99.
12. Durch einen Punkt C eine Ebene PQ einer gegebenen Ebene MN parallel zu legen. Fig. 101.
13. Eine Ebene AEFC so zu legen, daß sie eine andere Ebene MN unter dem gegebenen Flächenwinkel CFD schneide. Fig. 98.
14. Durch zwei einander nicht schneidende und nicht parallele Gerade AB, CF, zwei parallele Ebenen zu legen. Fig 102.
15.* Durch zwei einander nicht schneidende und nicht parallele Gerade AB, CF eine gemeinschaftliche Senkrechte zu ziehen. Fig. 102.
16. Aus drei Seiten (Kantenwinkeln) a, b, c einer dreiseitigen Ecke ihre übrigen Bestandtheile durch Construction in einer Ebene zu finden. Fig. 104. und 106.
17. Desgl. aus zwei Seitenflächen a, c und dem eingeschlossenen Flächenwinkel γ.

18. Desgl. aus einer Seitenfläche a und den anliegenden Flächenwinkeln β, γ.

Anmerkung. Da die Auflösung der meisten vorstehenden Aufgaben an der Möglichkeit beruht, durch je drei Punkte des Raumes eine Ebene zu legen, welches allerdings in der Vorstellung, aber nicht in der Wirklichkeit allgemein auszuführen ist, so hat man dieselbe als eine bloß ideale von der in ebener Fläche wirklich ausführbaren oder graphischen Auflösung zu unterscheiden. Jene idealen Constructionen haben nur einen theoretischen Werth, während jede practische Anwendung graphische Constructionen erfordert.

Zweites Capitel.

Die ebenflächigen Körper.

§. 295. Erklärungen. Wenn ebene oder gekrümmte Flächen einen Raum vollständig begränzen, so bildet ihre Verbindung eine körperliche Gestalt. In den ebenflächigen (d. h. von ebenen Flächen begränzten) Körpern oder Polyedern werden diese Flächen Seitenflächen, die Durchschnittslinien aber, in welchen je zwei solche einander treffen, Kanten genannt. Da, wo drei oder mehre Ebenen einander in dem nämlichen Punkte durchschneiden, entsteht eine Ecke, und nach der Anzahl solcher Ecken kann man die Körper mit Rücksicht auf die Menge ihrer Seiten und Kanten eintheilen und benennen. Kommen in einem solchen m Seiten, n Kanten und r Ecken vor, so kann man ihn ein m-seitiges und n-kantiges r-Eck nennen. Sollten unter diesen dreierlei Bestandtheilen eines Körpers einige enthalten sein, welche andere ihrer Lage und Größe nach mit Nothwendigkeit bestimmen, so muß man sie als bestimmende und diese als von ihnen abhängige Größen unterscheiden.

Unter Diagonalen versteht man auch hier gerade Linien, welche Eckpunkte der Figur mit einander verbinden; unter Diagonal-Ebenen solche, die durch eine Kante und irgend eine gegenüberliegende Ecke gelegt sind, also einen Flächenwinkel zweier Seiten durchschneiden. Polyeder mit gleichen Seiten, Kanten und Winkeln mögen vorzugsweise reguläre Körper genannt werden.

§. 296. Pyramide. (Fig. 107.) Wenn man außerhalb der Ebene einer Figur ABCD . . . einen Punkt M, und durch die Seiten derselben und diesen Punkt Verbindungsebenen gelegt denkt, so

entsteht jene körperliche Gestalt, die man Pyramide nennt. Da die Ebenen einander in Kanten durchschneiden, welche den Punkt M mit den Ecken A, B, C, D . . . . verbinden, so wird dieser Körper von einer Reihe von Dreiecken eingeschlossen, die sich an jene bestimmende Figur, die Basis der Pyramide, als Seiten derselben schließen und sich sämmtlich in M, ihrer Spitze oder dem Scheitel, vereinigen. Hiernach stimmt die Anzahl der Seiten einer Pyramide mit derjenigen ihrer Basis überein, und es giebt deren drei-, vier- und mehrseitige. Unter Höhe einer Pyramide versteht man die aus ihrer Spitze auf die Basis-Ebene gefällte Senkrechte, unter Transversal-Ebene eine durch M in irgend einer Richtung gelegte, sie durchschneidende Ebene. Pyramiden mit regulärer Basis, durchgängig gleichen Seiten und eben solchen Winkeln derselben mögen zur Unterscheidung reguläre genannt werden.

§. 297. Lehrsätze über die Pyramide.

1. Eine vielseitige Pyramide von n Seiten läßt sich in (n—2) dreiseitige zerlegen.

Dies geschieht durch Zerlegung der Basis in (n—2) Dreiecken und durch Transversalebenen.

2. (Fig. 107.) Eine der Basis parallel gelegte Ebene schneidet die Pyramide in einer ihrer Basis ähnlichen Figur.

Denn da (nach §. 291, L. 7.) die Seiten von abcd . . . . denen von ABCD . . . . paarweise parallel sind und (wie leicht zu beweisen) in dem nämlichen Verhältniß zu einander stehen, sind jene Figuren einander ähnlich.

3. (Fig. 107.) Wenn man durch die Kanten einer Pyr. (M) auf die Basis senkrechte Transversalebenen legt, so schneiden sie einander in derselben Geraden MP.

Denn da der Durchschnitt je zwei senkrechter Ebenen AMP, BMP . . . . auf der Basis senkrecht steht, und alle durch den Scheitelpunkt M gehen, so fallen sie nothwendig in eine Linie zusammen.

4. (Fig 107.) Die Kantenwinkel an der Spitze einer Pyramide betragen zusammen stets weniger als vier rechte Winkel.

Beweis wie zu L. 6, §. 293, mit Bezug auf n Dreiecke.

5. (Fig. 107.) Wenn man auf dem Mittelpunkt eines regulären Polygons ABCD . . . . eine Senkrechte errichtet und einen Punkt M derselben durch Dreiecke mit den Seiten der Basis verbindet, so entsteht eine reguläre Pyramide.

Denn es sind alle Seitenflächen der Pyramide und nicht minder sämmtliche Ecken an der Basis einander gleich.

§. 298. Prisma. (Fig. 108.) Denkt man sich einer ebenen Figur ABCD . . . . eine ihr congruente abcd . . . . im Raume dergestalt parallel gelegt, daß auch die Seiten beider einander parallel

laufen und diese paarweise durch Ebenen verbunden, so entsteht ein Prisma. Auch kann man sich dasselbe dadurch erzeugt vorstellen, daß aus den Ecken eines ebenen Polygons **ABCD** . . . . gezogene Parallelen von einer, demselben parallelen, Ebene **abcd** . . geschnitten werden. Die Seitenflächen dieses Körpers sind beiden Vorstellungsarten gemäß augenscheinlich Parallelogramme, weil sie zwei Parallelen von gleicher Länge **AB** = **ab**, **BC** = **bc** . . . . oder **Aa** = **Bb**, **Bb** = **Cc** . . . . zu Seiten haben und ihre Anzahl muß mit derjenigen der Basisseiten übereinstimmen. Daher wird man, je nachdem dieser drei, vier oder mehre sind, auch drei=, vier= oder überhaupt vielseitige Prismen haben. Die einander parallelen Vielecke **ABCDE**, **abcde** bilden die Endflächen des Prisma's, und wird eine von beiden, z. B. **ABCDE**, zur Grundfläche gewählt, so nennt man die andere **abcde** deren Gegenfläche. Die Kanten, welche beide Endflächen umschließen, werden als Endkanten von den parallelen Seitenkanten unterschieden. Unter Höhe eines Prisma's versteht man die aus irgend einem Punkte der Gegenfläche auf die Grundfläche gefällte Senkrechte. Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so heißt das Prisma ein Parallelepipedon (**ACGE**, **Fig. 109.**), und wenn die Seiten senkrecht zur Grundfläche sind, ein gerades oder senkrechtes (**ACG′E′**). Gerade Prismen heißen dann regulär, wenn sie reguläre Polygone zu Endflächen haben.

§. 299. Lehrsätze über das Prisma.

1. (Fig. 108.) Ein vielseitiges Prisma von n Seiten läßt sich in (n — 2) dreiseitige zerlegen.

Denn da die congruenten n=Ecke **ABCD** . . . ., **abcd** . . . . in (n — 2) Dr. zerfallen, so theilen die Diagonal=Ebenen **Ac**, **Ec** . . . . das gegebene Prisma in eben so viele dreiseitige.

2. (Fig. 109.) Die gegenüberliegenden Seitenflächen eines Parallelepipedons sind congruent und parallel.

Denn da **AB** und **EF**, so wie **AD** und **EK**, und eben so **AE**,**DK** als Seiten eines Parallelogramms einander gleich und parallel sind, so ist auch **W. EAB** = **W. KDC**; folglich sind die Seitenflächen **ABFE** und **DCGK** (§. 240, L. 7.) einander congruent und (§. 291, L. 15) ebenfalls parallel.

Anmerkung. Wird eine der Ecken eines Parallelepipedons von drei rechten Kantenwinkeln gebildet, so ist dieses auch nothwendig mit den übrigen der Fall, oder seine Flächen sind sämmtlich Rechtecke, und es wird daher ein rechtwinkliges genannt. Sind die Seitenflächen eines solchen, dessen Basis ein Quadrat ist, ebenfalls Quadrate, so heißt es ein Würfel oder Cubus.

3. (Fig. 105.) In einem Parallelepipedon sind die entgegengesetzten Ecken symmetrisch.

Denn es sind die drei Kantenwinkel gleich, aber nicht übereinstim=

mend in ihrer Lage, so daß die Ecken nicht (als congruent) in einander fallen können, es sei denn, daß sie gleichschenklig wären. Vgl. §. 293, L. 7).

4. (Fig. 109.) Ein Parallelepipedon **ACGE** wird durch eine Diagonal-Ebene **BDKF** in zwei symmetrische dreiseitige Prismen zerlegt.

Dies folgt aus der Gleichheit der Seiten und der Symmetrie der Ecken, welche einander gegenüberliegen.

§. 300. Polyeder. Wie jedes ebene Polygon in so viele Dreiecke zerlegbar ist, als es Seiten hat, indem man seine Eckpunkte mit irgend einem, im Innern der Figur gewählten, Punkte verbindet, läßt auch jedes Polyeder sich durch ein gleiches Verfahren in eben so viel Pyramiden zerfällen, als es Seitenflächen enthält. Umgekehrt wird daher ein Polyeder durch Zusammensetzung mehrer Pyramiden sich erzeugen lassen, und sofern man diese als regulär und congruent voraussetzt, nach einer Seite durch ihren gemeinschaftlichen Scheitel, nach der andern aber durch ihre, zu einem Figurennetze verbundenen, Grundflächen begränzt werden. Sollte durch eine fortgesetzte Zusammenfügung solcher Pyramiden jenes Figurennetz endlich zu einer geschlossenen Oberfläche werden, so würde dadurch ein reguläres Polyeder entstehen.

Im Innern eines Polyeders angenommene Richtungslinien werden Achsen desselben genannt. Man pflegt durch solche Achsen entweder zwei Seitenflächen, oder eine Seitenfläche mit einer Ecke, oder zwei gegenüberliegende Ecken zu verbinden. Jede am Endpunkte einer solchen Achse liegende Fläche oder Ecke ist in Beziehung auf die gegenüberliegende deren Gegenfläche oder Gegenecke zu nennen. Die von einer Achse durchschnittenen Ecken heißen Scheitel und die von ihnen ausgehenden Kanten Scheitelkanten, während man die der Achse parallel laufenden als Seitenkanten und diejenigen, welche Grundfläche und Gegenfläche einschließen, als Randkanten bezeichnet.

Eine besonders beachtungswerthe Gattung von Polyedern sind die, abgestumpften Pyramiden ähnlichen, sogenannten Obelisken, welche entstehen, indem man die homologen Ecken zweier paralleler winkelgleicher Figuren **ABCDE**, **FGHIK** (Fig. 129a.), deren Seiten paarweise parallel sind, durch gerade Linien mit einander verbindet.

§. 301. *Lehrsätze über Polyeder.

1. Die Anzahl der Flächenwinkel eines Polyeders ist so groß als die Anzahl seiner Kanten.

Der Beweis liegt in dem Begriffe der Kanten.

2. Die Anzahl der Kantenwinkel **w** eines Polyeders ist doppelt so groß, als die Anzahl seiner Kanten **K**.

Denn da an jeder Kante vier Kantenwinkel liegen, in der Anzahl 4K aber jeder Winkel doppelt vorkommt, so ist $w = 2K$.

3. Sei F die Anzahl der Flächen eines Polyeders, K die Anzahl seiner Kanten und E die Anzahl seiner Ecken, so hat man

I. wenn jede Fläche n Seiten enthält:

$$F . n = 2K, \text{ also } K = \tfrac{1}{2} F . n;$$

II. wenn jede Ecke m Kanten enthält:

$$E . m = 2K, \text{ also } K = \tfrac{1}{2} E . m.$$

Denn in F . n, wie in E . m, ist jede Kante doppelt gezählt.

Zusatz I. Gelten die Voraussetzungen I. und II. zugleich, wie z. B. für reguläre Polyeder, so ist $F . n = E . m$, also $F : E = m : n$.

Zusatz II. Hat ein Polyeder verschiedenartige Flächen mit n, n′, n″ .... Seiten, deren Menge durch F, F′, F″ .... angedeutet werden möge, so ist (nach I.):

$$K = \tfrac{1}{2}(F . n + F' . n' + F'' . n'' \;....)$$

Zusatz III. Hat ein Polyeder verschiedenartige Ecken mit m, m′, m″ .... Kanten, deren Anzahl durch E, E′, E″ bezeichnet werde, so ist (nach II.):

$$K = \tfrac{1}{2}(Em + E'm' + E''m'' + \;....)$$

4. An jedem Polyeder ist die Anzahl der Kanten, um zwei vermehrt, der Anzahl der Flächen und der Ecken zusammengenommen gleich.

Denn bezeichnet man in einem Figurennetze, welches n ebene Figuren beliebiger Art enthalte (ohne einen Körper zu umschließen), die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten durch F_n, E_n, K_n, ferner nach Hinwegnahme irgend einer äußern Figur die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten für das Netz aus den übrigen (n — 1) Figuren durch F_{n-1}, E_{n-1}, K_{n-1}, und die Zahl der verschwundenen Ecken jener hinweggenommenen Figur durch e, so ist, weil dadurch eine Kante mehr verloren geht:

$$(1)\; F_{n-1} = F_n - 1,$$
$$(2)\; E_{n-1} = E_n - e,$$
$$(3)\; K_{n-1} = K_n - (e + 1);$$

also, indem man (1) und (2) addirt:

$$F_{n-1} + E_{n-1} = F_n + E_n - (e + 1),$$

und indem man hievon (3) subtrahirt:

$$F_{n-1} + E_{n-1} - K_{n-1} = F_n + E_n - K_n,$$

wonach der Werth von $F + E - K$ unverändert bleibt, wie viele einzelne Figuren man auch hinwegnehmen möge. Sind deren aber n — 1, so gelangt man zu einer einzigen ebenen Figur, wofür $F = 1$ und $E = K = 0$, also $F + E - K = 1$ ist. Folglich hat man allgemein: $F_n + E_n - K_n = F + E - K = 1$. Um nun diese Vorstellung eines Figurennetzes auf ein Polyeder von F Seitenflächen, E Ecken und K Kanten anzuwenden, braucht

man nur irgend eine seiner Flächen wegzulassen, womit Ecken und Kanten in gleicher Anzahl a ausfallen. Dadurch erhält man aber für das entstehende Figurennetz nach dem Vorigen die Gleichung

$$(F-1)+(E-a)-(K-a)=1; \text{ also } F+E=K+2.$$

§. 302. Reguläre Polyeder.

1. Reguläre Polyeder können nur dreierlei Figuren, das gleichseitige Dreieck, das Quadrat oder das reguläre Fünfeck zu Seitenflächen haben.

Denn denkt man sich eine Ecke von regulären Sechsecken gebildet, deren wenigstens drei zusammenstoßen müssen, so erhält man als Summe der Kantenwinkel $3 \cdot \frac{4}{3}R = 4R$, welches gegen §. 293, L. 6. streitet. Noch viel weniger kann also ein reguläres Sieben- oder Achteck u. s. w. die Seitenfläche eines regulären Polyeders abgeben.

2. Es kann der regulären Polyeder nicht mehr als fünf geben. Denn denkt man sich als Figur der Seitenflächen

(1) das gleichseitige Dreieck, so läßt sich daraus, weil $3 \cdot \frac{2}{3}R$, $4 \cdot \frac{2}{3}R$ und $5 \cdot \frac{2}{3}R$ sämmtlich weniger, als $4R$ betragen, eine drei-, vier- und fünfseitige Ecke bilden. Aber $6 \cdot \frac{2}{3}R$ ist $= 4R$, also eine Ecke aus sechs gleichseitigen Dreiecken unmöglich;

(2) das Quadrat, so kann man, weil $3 \cdot R < 4R$, davon drei zu einer Ecke zusammensetzen, jedoch nicht mehre;

(3) das reguläre Pentagon, so geben ebenfalls nur drei eine Ecke, weil $3 \cdot \frac{6}{5}R < 4R$, hingegen $4 \cdot \frac{6}{5}R$ schon $> 4R$.

3. Reguläre Polyeder können nur von vier, sechs, acht, zwölf oder zwanzig Seitenflächen eingeschlossen werden.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich aus folgenden Constructionen:

I. (Fig. 110.) Ein reguläres Polyeder zu construiren, dessen Ecken von drei gleichseitigen Dreiecken gebildet werden.

Man errichte auf dem Mittelpunkte P eines gleichseitigen Dreiecks ABC die Senkrechte PD, und trage von A eine Linie AD = AB auf derselben ab, so sind auch DB und DC = AB, also alle Seiten des Körpers, und ebenfalls alle Ecken einander gleich. Wegen seiner vier Seitenflächen heißt dieser Körper ein Tetraeder.

II. (Fig. 111.) Ein reguläres Polyeder zu construiren, dessen Ecken von vier gleichseitigen Dreiecken gebildet werden.

Man construire mit der Dreiecksseite AB ein Quadrat ABEF, errichte in dessen Mittelpunkt P eine Senkrechte und trage zu beiden Seiten eine Länge PC und PD = PA ab, so entstehen durch Verbindung von C und D mit den Ecken des Quadrats über demselben zwei vierseitige Pyramiden, deren Seitenflächen und Flächenwinkel einander gleich sind. Beide in Verbindung bil-

den mithin ein reguläres achtseitiges Polyeder, das sogenannte Oktaeder.

III. (Fig. 112.) Ein reguläres Polyeder zu construiren, dessen Ecken von fünf gleichseitigen Dreiecken gebildet werden.

Man construire mit einer Dreiecksseite bc ein reguläres Fünfeck bcdef, errichte in dessen Mittelpunkt p eine Senkrechte ap, und trage aus b die Länge be auf derselben ab, so entsteht um a eine Ecke von fünf gleichen Seiten. Denkt man sich dieselbe an den Eckpunkten A, D, E eines gleichseitigen Dreiecks ADE gebildet, so entsteht eine zusammenhängende Oberfläche von zehn regulären Dreiecken. Dieselbe läßt sich mit einer anderen, ihr gleichen, dergestalt zusammenfügen, daß die Vereinigungspunkte zweier Seiten (wie B, G, K) an diejenigen von drei Seiten (wie C, F, H) stoßen und umgekehrt, wodurch an allen Punkten des Umfangs ebenfalls Raumecken von fünf gleichen Seiten entstehen müssen. Außer den Seiten werden aber auch die Flächenwinkel des Körpers sämmtlich gleich sein, und da er jener zwanzig besitzt, bezeichnet man ihn mit dem Namen Ikosaeder.

IV. (Fig. 113.) Ein reguläres Polyeder zu construiren, dessen Ecken von Quadraten gebildet werden.

Man errichte auf den Ecken eines Quadrats ABCD ein Prisma, dessen Seitenkanten = AB sind, so entsteht ein von sechs Quadraten unter rechten Flächenwinkeln eingeschlossener regulärer Körper, das Hexaeder (Cubus, Würfel).

V. (Fig. 114.) Ein reguläres Polyeder zu construiren, dessen Ecken von drei regulären Fünfecken gebildet werden.

Man construire sechs congruente, reguläre Fünfecke und lege an die Ecken eines von ihnen, ABCDE, die fünf anderen, so daß sie zu dreien Ecken bilden. Dadurch entsteht eine zusammenhängende Oberfläche von sechs regulären Fünfecken, die man mit einer andern, ihr gleichen, zusammengelegt und zu einem geschlossenen Polyeder vereinigt denken kann, weil mit allen Punkten des Umfangs, wo zwei Seiten an einander stoßen (wie F, H, K, M, O) die äußersten Punkte der andern Figur (wie G, I, L, N, P) und umgekehrt zusammenfallen, und mit den übrigen congruente, dreiseitige Raumecken bilden werden. Das auf diese Weise entstehende reguläre Polyeder wird von zwölf Seiten eingeschlossen, und deshalb Dodekaeder genannt.

§. 303. Aufgaben.

1. Eine Pyramide zu bilden, wenn deren Grundfläche ABCD .... nebst zwei an einander gränzenden Seiten MBA, MBC gegeben sind. Fig. 107.
2. Eben so ein Prisma zu bilden. Fig. 108.

3. Aus drei Kanten und ihren Winkeln ein Parallelepipedon zu bilden. Fig. 109.
4. Aus den Kanten einer dreiseitigen Pyramide das Flächennetz derselben (in ebener Fläche) zu construiren. Fig. 110.
5. Desgl. für eine reguläre sechsseitige Pyramide. Fig. 107.
6. Aus drei Kanten einer Ecke und ihren Winkeln das Flächennetz zu einem dreiseitigen Prisma zu construiren. Fig. 128.
7. Desgl. zu einem fünfseitigen Prisma aus dessen Grundfläche und zwei zusammengränzenden Seitenflächen. Fig. 108.
8. Das Flächennetz zu einem Tetraeder zu bilden, wovon eine Kante AB gegeben ist. Fig. 110.
9. Desgl. zu einem Oktaeder. Fig. 111.
10. Desgl. zu einem Ikosaeder. Fig. 112.
11. Desgl. zu einem Hexaeder. Fig. 113.
12. Desgl. zu einem Dodekaeder. Fig. 114.
13. Die Anzahl der Kanten aller fünf regulären Körper (nach §. 301, L. 3) zu bestimmen.
14. Alsdann die Anzahl ihrer Ecken (nach §. 301, L. 4).
15. Eben so die Anzahl der Kanten und Ecken (nach §. 301. L. 3).
16. Die Anzahl der Kantenwinkel für die regulären Körper anzugeben.

Drittes Capitel.

Die krummflächigen Körper.

§. 304. Erklärungen. Die von krummen Oberflächen ganz oder theilweise begränzten Gestalten oder **krummflächigen Körper** lassen sich in solcher Mannigfaltigkeit denken, daß sie nicht im Allgemeinen, sondern nur die einfachsten unter ihnen, nämlich die auf Vorstellung des Kreises zurückführenden, Gegenstand der elementaren Geometrie sein können. Durch die Kreisbewegung einer Figur um eine feste Achse kann man sich aber drei Hauptarten einfacher krummflächiger Körper erzeugt vorstellen, je nachdem man ein **rechtwinkliges Dreieck**, ein **Rechteck** oder einen **Halbkreis** an jene Achse gelegt und um sie gedreht denkt. Im ersten Falle entsteht ein Körper mit kreisförmiger Basis, der **Kegel** (Conus); im zweiten ein solcher mit zwei parallelen kreisförmigen Endflächen, der **Cylinder**, und im dritten Falle ein von krummer und in sich selbst zurücklaufender Oberfläche begränzter Körper, die **Kugel**. Denkt man sich die Achse des Kegels oder des Cylinders aus ihrer **senkrechten** in eine

gegen die Grundfläche geneigte Lage übergehend, so entsteht dadurch die Vorstellung eines schiefen Kegels oder Cylinders im Gegensatze des hier allein zu betrachtenden geraden oder senkrechten. Wie bei dem Kreise alle Punkte des Umfangs, sind bei der Kugel alle Punkte der Oberfläche von einem innerhalb liegenden Mittelpunkte gleichweit entfernt und folglich alle Durchmesser einander gleich. Die beiden Endpunkte eines Durchmessers der Kugel werden in Beziehung auf einander Gegenpunkte genannt. Eine schneidende Ebene liegt theils innerhalb, theils außerhalb, eine berührende aber völlig außerhalb der Kugel, mit deren Oberfläche sie einen oder (sofern dieses möglich ist) mehre Punkte gemein hat. Das Nämliche gilt von geraden Linien, die auch hier Sehnen, Secanten und Tangenten heißen. Von zwei beliebigen Radien wird ein Centriwinkel, von mehren im Centrum einander schneidenden Ebenen ein Kugelausschnitt (Kugelsector) und von einer beliebigen Durchschnittsebene ein Kugelabschnitt (Kugelsegment) gebildet.

§. 305. Lehrsätze über Kegel, Cylinder und Kugel.

1. (Fig. 115.) Der Kegel wird von einer auf seiner Achse senkrecht stehenden Ebene in einem Kreise geschnitten.

Denn in welcher Richtung man auch durch die Achse **DC** zwei Ebenen **ADB** und **GDK** legen möge, immer ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke.

$$(1)\ cg : CG = cD : CD;\ (2)\ ca : CA = cD : CD,$$

folglich (3) $cg : CG = ca : CA$, und da $CG = CA$, auch $cg = ca$, also agb ein Kreis.

Erklärung. Der durch Drehung eines Trapezes **ACca** entstehende Körper wird ein abgestumpfter Kegel genannt, weil man von dem vollständigen durch **ACD** beschriebenen Kegel einen kleineren **Dagb** abgeschnitten denken kann.

2. (Fig. 116.) Der Cylinder wird von einer auf seiner Achse senkrecht stehenden Ebene in einem Kreise geschnitten.

Denn legt man durch die Achse in beliebiger Richtung zwei Ebenen **AD**, **GD**, so ist $ac = AC$ und $gc = GC$, und da $AC = GC$, auch $ac = gc$, folglich agb eine Kreislinie.

Anmerkung. Die Betrachtung einer beliebigen (schneidenden) Ebene in Beziehung auf den Kegel oder Cylinder geht über die Gränzen der Elemente hinaus und gehört der höheren Geometrie an. (S. Buch III., Cap. 3.)

3. (Fig. 117.) Die Kugel wird von einer Ebene stets in einer Kreislinie geschnitten.

Sei abd die schneidende Ebene und **MP** aus dem Centrum senkrecht auf sie gefällt, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke **Mmc** und **Mmd** congruent, folglich $mc = md$.

Zusatz I. Wenn der Durchschnittskreis durch das Centrum der Kugel gelegt wird, so ist sein Radius dem der Kugel gleich, und in diesem Falle wird er ein größter Kugelkreis im Gegensatz der kleineren genannt.

Zusatz II. Zwei größte Kreise halbiren einander; denn ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt muß durch das Centrum der Kugel gehen und ist mithin ein Durchmesser für beide Kreise.

Zusatz III. Durch zwei beliebige Punkte der Kugeloberfläche kann man einen größten Kreis legen; denn beide bestimmen mit dem Centrum die Lage einer Durchschnittsebene. Sollten sie indessen Gegenpunkte sein, wie P, Q, so lassen sich eine unendliche Menge von größten Kreisen, wie PAQ, PDQ, PCQ . . . . durch sie legen.

4. (Fig. 117.) Jeder größte Kreis ADB theilt die Kugel in zwei congruente Hälften.

Denn wenn man den untern Theil der Kugel um den Durchmesser AB gedreht denkt, bis der Halbkreis ADB mit AEB zusammenfällt, so müssen beide Oberflächen in einander fallen, weil sonst die Punkte beider nicht alle vom Centrum gleichweit entfernt sein können.

5. (Fig. 117.) Die im Centrum eines größten Kugelkreises ABC errichtete Senkrechte MP trifft die Mittelpunkte aller ihm parallelen Kreise.

Denn sei aeb dem Kreise AEB parallel, so steht Mm auch auf seiner Ebene senkrecht und es ist am = dm = cm, also m sein Mittelpunkt.

6. (Fig. 117.) Kugelkreise sind einander gleich, wenn ihre Ebenen gleichweit vom Centrum der Kugel, hingegen um so kleiner, je weiter sie von demselben entfernt liegen.

Dies folgt aus der Größe der Durchmesser nach §. 245, L. 7.

7. (Fig. 117.) Wenn man durch den Mittelpunkt eines beliebigen Kugelkreises adb eine Senkrechte zieht, so trifft diese die Kugel in zwei Gegenpunkten P und Q, welche von allen Punkten des Kreises gleichweit abstehen und Pole desselben genannt werden.

Denn zieht man die Sehnen Pa, Pd, Pc..., so sind dieselben als Hypotenusen congr. Dreiecke einander gleich, mithin auch die zugehörigen Bogen auf der Oberfläche der Kugel, und a, d, c... gleichweit von P entfernt. Dasselbe gilt in Beziehung auf den andern Pol Q.

8. (Fig. 118.) Eine Kugel kann von einer Ebene GAF nur in einem Punkte berührt werden.

Denn angenommen, es gebe außer dem Punkte A noch einen zweiten Berührungspunkt A', so würde die Gerade AA' als Sehne ins Innere der Kugel fallen, folglich die Ebene, welche

die Punkte A und A' mit derselben gemein hätte, sie nothwendig durchschneiden, welches gegen die Vg. ist.

9. (Fig. 118.) Eine durch den Endpunkt eines Kugelradius MA senkrecht zu demselben gelegte Ebene GAF ist Berührungsebene der Kugel.

Denn jeder in der Ebene GAF außer A liegende Punkt, wie F oder G, liegt weiter vom Centrum C entfernt; also ist allein A ein der Kugel und Ebene gemeinschaftlicher, d. h. Berührungspunkt.

10. (Fig. 118.) Der von zwei größten Kreisen ABK und ACK eingeschlossene sphärische Winkel BAC wird von dem zwischen ihnen enthaltenen Bogen DE, wovon A Pol ist, oder auch von dem Tangentenwinkel GAF gemessen.

Denn den Flächenwinkel α beider Kreisebenen bestimmen (nach §. 291, L. 1. Erkl.) zwei auf MA gezogene Senkrechte MD und ME oder AF und AG, welche diesen Winkel einschließen.

11. (Fig. 117.) Der zwischen zwei größten Kreisen PAQ, PCQ enthaltene Kugelstreifen verhält sich zu der ganzen Kugeloberfläche, wie der eingeschlossene Bogen AC zum ganzen Kreisumfange ADBEA.

Denn denkt man den ganzen Kreisumfang allgemein in m gleiche Theile getheilt, wovon n den Bogen AC bilden, und durch alle Theilungspunkte und P, Q größte Kreise gelegt, so wird die Kugeloberfläche dadurch in m, der Streifen PAQCP aber in n congruente kleinere Streifen getheilt. Also verhalten sich beide zu einander, wie $m : n = AC : ADBEA = \alpha : 4R$.

Erklärung. Legt man durch drei Punkte A, B, C der Kugeloberfläche, welche nicht mit dem Centrum in derselben Ebene liegen, größte Kreise, so bilden deren Bogen AB, BC, CA ein sphärisches Dreieck, die Ebenen der Kreise aber am Centrum M der Kugel eine dreiseitige Ecke, deren Seitenflächen (als Kantenwinkel) von den Seiten des sphärischen Dreiecks (als Bogen) gemessen werden. Durch Verbindung zusammengränzender Dreiecke auf der Kugeloberfläche entsteht ein sphärisches Vieleck.

§. 306. Lehrsätze über das sphärische Dreieck.

1. (Fig. 104.) In einem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke ABC liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; und sind zwei Winkel eines sphärischen Dreiecks gleich, so ist es ein gleichschenkliges.

Beweis wie zu L. 1. und 2. im §. 293.

2. (Fig. 104.) Der größeren Seite AB eines sphärischen Dreiecks ABC liegt der größere Winkel gegenüber; — dem größeren Winkel immer die größere Seite.

Beweis wie zu L. 3. und 4. im §. 293.

3. (Fig. 105.) Zwei Seiten AB, BC eines sphärischen Dreiecks sind zusammen stets größer als die dritte Seite AC.

Beweis wie zu L. 5. im §. 293.

4. (Fig. 118.) Die Summe der Seiten eines sphär. Dreiecks KBC beträgt stets weniger als der Umfang eines größten Kugelkreises

Denn da (nach L. 3.) $BC < AB + AC$, muß $KB + KC + BC < KB + KC + AB + AC$, d. h. der Umfang des Dreiecks ABC muß kleiner, als zwei Halbkreise oder ein ganzer Kreis der Kugel sein.

5. (Fig. 119.) Wenn man aus den Eckpunkten des sphärischen Dreiecks ABC, als Polen, das sphärische Dreieck PQR construirt, so sind dessen Eckpunkte wiederum Pole für die Seiten des gegebenen Dreiecks.

Denn da (nach Vg.) der Kreis QR von A und der Kreis QP von C um einen Quadranten entfernt ist, so ist Q Pol des Kreises AC. Aus den nämlichen Gründen sind P und R Pole der Kreise BC und AB.

Erklärung. Zwei sphär. Dreiecke dieser Art, worin die Eckpunkte des Einen Pole der gegenüberliegenden Seiten des Andern sind, werden Polardreiecke genannt, und wenn ihre Endpunkte durch Radien mit dem Centrum der Kugel verbunden werden, so entstehen sogenannte dreiseitige Polarecken.

6. (Fig. 119.) In einem Polardreiecke PQR sind die Seiten Supplemente von den Winkeln des gegebenen sphärischen Dreiecks ABC.

Denn aus $RE = 90°$ und $QE + DE = 90°$ folgt $RE + QE = 180° - DE$ oder $RQ = 180° - \alpha$ und in gleicher Weise $PR = 180° - \beta$ und $PQ = 180° - \gamma$.

7. Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks beträgt stets weniger, als sechs rechte, aber mehr, als zwei rechte Winkel.

Denn aus L. 6 folgt, daß $PQ + QR + RP = 6R - (\alpha + \beta + \gamma)$; und da nach L. 4 der Umfang des Dr. $PQR < 4R$ sein muß, so ist die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ nothwendig $> 2R$ und $< 6R$.

8. (Fig. 118.) Wenn drei größte Kreise ABK, ACK, CBH einander durchschneiden, so entstehen sphärische Vertical-Dreiecke ABC, KLH, welche symmetrisch sind.

Beweis wie in L. 7, §. 293.

9. (Fig. 118). Sind in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel einander gleich, so sind es auch die anderen Winkel nebst der dritten Seite.

Denn nach Vg. muß das zur Vergleichung gegebene Dreieck entweder mit ABC, oder mit KLH zusammenfallen.

10. (Fig. 118.) Sind in zwei sphärischen Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel einander gleich, so sind es auch die andern Seiten nebst dem dritten Winkel.

Denn denke man das gegebene Dreieck auf **ABC** oder **KLH** so gelegt, daß die gleichen Seiten zusammenfallen, so muß es mit einem dieser Dreiecke congruent sein.

11. (Fig. 119.) Sind in zwei sphärischen Dreiecken die Seiten einander paarweise gleich, so sind es auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Da durch ein sphärisches Dreieck **PQR** sein Polardreieck **ABC** vollständig bestimmt wird, namentlich (nach L. 6) durch die Seiten p, q, r die Winkel α, β, γ als deren Supplemente, und wiederum durch die Seiten von **ABC** die Winkel von **PQR** bestimmt werden, so folgt aus der vorausgesetzten Gleichheit der Seiten in zwei sphärischen Dreiecken auch nothwendig die Gleichheit ihrer Winkel.

12. (Fig. 119.) Sind in zwei sphärischen Dreiecken auf einer Kugel die Winkel einander gleich, so sind es auch die Seiten.

Der Beweis folgt ebenfalls aus L. 6.

13. (Fig. 120.) Zwei symmetrische sphärische Dreiecke **ABC**, **DEF** sind inhaltsgleich.

Denn denkt man sich durch die Eckpunkte beider Dreiecke Ebenen gelegt, so wird die Kugeloberfläche dadurch in congruenten Kreisen geschnitten, da die Dreiecksseiten nach Vg. paarweise gleich sind, folglich auch die Sehnendreiecke **ABC**, **DEF**. Sind nun **P** und **Q** Pole jener gleichen Kreise, so entstehen durch deren Verbindung mit den Ecken gleichschenklige Dreiecke, welche paarweise congruent sind, und man hat demnach:

$$ABP + BCP - ACP = DEQ + FEQ - DFQ.$$

14. (Fig. 118.) Werden zwei größte Kugelkreise **ABK**, **ACK** von einem dritten **CBH** geschnitten, so ist die Summe der beiden Dreiecke **ABC**, **HBK** dem Kugelstreifen gleich, welcher $\beta = ABC$ zum Winkel hat.

Denn da (nach L. 14) Dr. **KLH** mit Dr. **ABC** inhaltsgleich ist, folgt daß $BKH + ABC = BKH + KHL$, d. h. gleich dem Kugelstreifen gesetzt werden darf, dessen begränzende Halbkreise den W. β einschließen.

Zusatz. Der Inhalt der beiden sphärischen Dreiecke **ABC** + **BKH** verhält sich (nach §. 305, L. 11) zur Kugelfläche, wie $\alpha : 4R$.

15. (Fig. 118.) Die Oberfläche eines sphärischen Dreiecks verhält sich zu derjenigen der Kugel, wie der Ueberschuß seiner Winkel über zwei rechte sich zu acht rechten Winkeln verhält.

Sei **F** die Oberfläche der Kugel, so ist nach Vorigem:

$$(1)\ ABC + BCK = \frac{\alpha}{4R} \cdot F;$$

$$(2)\ ABC + BHK = \frac{\beta}{4R} \cdot F;$$

$$(3)\ ABC + BAH = \frac{\gamma}{4R} \cdot F;$$

also $3ABC + (BCK + BHK + BAH) = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4R} \cdot F.$

Nun ist aber $ABC + BCK + BHK + BAH = \frac{1}{2}F,$

also $2ABC = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{4R}\right) F - \frac{1}{2}F$ oder

$$ABC = F\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - 2R}{8R}\right).$$

Zusatz I. Zwei sphärische Dreiecke sind inhaltsgleich, wenn die Summe der Winkel in beiden die nämliche ist.

Zusatz II. Haben zwei sphärische Dreiecke gleichen Flächeninhalt, so ist auch die Summe der Winkel in beiden gleich.

§. 307. Aufgaben.

1. Die entwickelte Oberfläche eines Cylinders in ebener Fläche darzustellen, wenn der Radius seiner Basis $= r$ und seine Höhe $= h$ in Linien oder in Zahlen gegeben sind, z. B. $r = 18$, $h = 15$.
2. Eben so für einen senkrechten Kegel, dessen Basisdurchmesser 16 und dessen Höhe 11 betrage.
3. Ebenso für einen abgestumpften Kegel, wenn die Durchmesser der Gegenflächen $= 24$ und 14 und die senkrechte Höhe $= 8$ ist.
4. Unter welchen Umständen fällt ein sphärisches Dreieck mit seinem Polardreieck zusammen.
5. Die Winkel eines sphärischen Dreiecks aus seinen drei Seiten durch Construction in einer Ebene zu bestimmen.
6. Desgleichen eine Seite nebst den anliegenden Winkeln aus den beiden andern Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.
7. Desgleichen zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel aus der dritten Seite und den anliegenden Winkeln.
8. Die Winkel eines sphärischen Dreiecks sind $\alpha = 86^\circ 22'$, $\beta = 72^\circ 18'$, $\gamma = 120^\circ 4'$. Wie groß sind die Seiten seines Polardreiecks.
9. Die Seiten eines sphärischen Dreiecks ABC sind $a = 100^\circ$, $b = 120^\circ$, $c = 70^\circ$, und der Radius der Kugel $= 860$. Welche Winkel bilden die Sehnen des Dreiecks ABC?
10. Unter dem Aequator der Erdkugel beträgt jeder Grad 15 Meilen; wieviel unter dem 10., 20., 30. Breitengrade?

11. Wie groß sind die Winkel eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks, wenn dessen Oberfläche gleich = 324, und der Radius der Kugel = 10 ist.

12. Den Winkel des Kugelstreifens zu finden, der einem sphärischen Dreieck inhaltsgleich sei, dessen Winkel gegeben sind: $\alpha = 65°14'$; $\beta = 87°3'$; $\gamma = 121°31'$.

Viertes Capitel.

Die Aehnlichkeit der Körper.

§. 308. Erklärungen. Körper werden, gleich den Figuren in der Ebene, dann ähnlich genannt, wenn bei irgend einer Lage derselben die von irgend einem Punkte O ausgehenden Geraden von ihrem Umfange verhältnißgleich geschnitten werden. Die nämliche Erklärung gilt von Linienverbindungen im Raume, ohne daß dieselben als Gränzen von Körpern gedacht zu werden brauchen. Der Convergenzpunkt O, welcher eben sowohl außerhalb, als innerhalb oder auch im Umfange der Raumgestalten liegen kann, möge auch hier Aehnlichkeitspunkt derselben genannt und die Benennung von homologen Punkten, Linien und Convergentenabschnitten, wie bei den Figuren der Ebene, beibehalten werden.

Nach vorstehender Erklärung sind z. B. zwei (concentrisch gelegte) Kugeln von verschiedenem Halbmesser nothwendig einander ähnlich; eben so die räumlichen Figuren MABCD und mabcd (Fig. 120), sofern die Punkte M und m, A und a, B und b, C und c, D und d auf Geraden liegen, die von dem nämlichen Punkte O ausgehen und dabei vorausgesetzt wird, daß

$$\frac{AO}{aO} = \frac{BO}{bO} = \frac{CO}{cO} = \frac{DO}{dO} = \frac{MO}{mO}$$

sei, möge man nun unter jenen Gestalten bloße Linienverbindungen der Punkte M, A, B, C, D und m, a, b, c, d oder vielmehr von ebenen Flächen umschlossene Körper, nämlich die Pyramiden MACD und mabcd verstehen.

Ohne die Bedingung, daß sämmtliche Convergentenabschnitte verhältnißgleich seien, darf man die eine Figur nur der andern homolog nennen. Der wichtigste Fall dieser Art tritt dann ein, wenn alle Punkte a, b, c, d . . . . jener Figur sich in einer Ebene befinden, während die homologen Punkte A, B, C, D . . . . eine

beliebige Lage im Raume haben mögen. Die ebene Figur abcd .... wird dann eine Projection von ABCD .... genannt, weßhalb man den Punkt O und die von ihm ausgehenden Geraden auch mit dem Namen Projectionscentrum und Projectionslinien bezeichnet.

Anmerkung. Dies ist die Grundvorstellung der sogenannten Perspective, welche die Erscheinung körperlicher Gestalten im Bilde auf ebener Fläche untersucht, indem sie die Lage des Augenpunktes O, so wie die Fläche oder Tafel abcd als gegeben voraussetzt. Für geometrische Constructionen erscheint es am einfachsten und zweckmäßigsten, die Projectionslinien nicht convergirend, sondern unter einander parallel anzunehmen, wonach z. B. abcd die Projection der Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ sein würde. Verbindet man damit die Vorstellung zwei einander senkrecht schneidender Ebenen CDA und CDH (Fig. 109), wovon die erste die Horizontalebene, die andere die Vertikalebene genannt werden möge, so giebt es für jeden beliebigen Punkt F im Raume eine Horizontalprojection B und eine Verticalprojection G, wodurch seine Lage völlig bestimmt wird. Das Nämliche gilt von einer Linie AF (Fig. 91) welche in zwei andern Linien BF und AD auf jenen Ebenen projicirt wird, und es ist leicht einzusehen, wie eine jede, von geraden oder auch krummen Linien gebildete, Figur im Raume in Beziehung auf zwei senkrechte Ebenen zwei andere ebene Figuren erzeugt, durch welche sie wieder bestimmt wird, wodurch man ein Mittel erhält, räumliche Constructionen durch solche in der Ebene zu ersetzen. Dies ist die Aufgabe der Projections-Geometrie oder sogenannten darstellenden Geometrie (géometrie descriptive).

§. 309. Lehrsätze von den Convergenten im Raume.

1. (Fig. 121.) Wenn Figuren in der nämlichen Ebene den Bedingungen der Aehnlichkeit entsprechen, so thun sie dies auch in parallelen Ebenen.

Denn denkt man sich die Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ aus der Ebene von ABCD in die parallele Lage abcd versetzt, und auf der Verbindungslinie Aa den Punkt O so angenommen, daß AO : aO = AB : ab, so ist (nach §. 254 L. 4) O Convergenzpunkt für beide Figuren, also AO : aO = BO : bO = CO : cO u. s. f.

2. (Fig. 121.) Wenn zwei Figuren ABCD und abcd, in parallelen Ebenen den Bedingungen der Aehnlichkeit entsprechen, so thun sie dieses auch in der nämlichen Ebene.

Denkt man sich von dem Convergenzpunkt O und den Ecken der einen Figur abcd, auf die Ebene der andern die Senkrechten OP, aα, bβ, cγ, dδ .... gefällt und die Fußpunkte durch gerade Linien verbunden, so ist (nach §. 291, L. 16, Zusatz) $\alpha\beta\gamma\delta$ $\backsimeq$ abcd und P Convergenzpunkt der Figuren ABCD, $\alpha\beta\gamma\delta$, weil die durch OAα, OBβ, Ocγ .... senkrecht gelegten Ebenen einander sämmtlich in der Linie OP durchschneiden müssen. Ferner sind

(nach §. 290, L. 8.) AB, $\alpha\beta$, BC, $\beta\gamma$ ... einander parallel, folglich (nach §. 253, L. 1.) $\alpha\beta\gamma\delta$ ähnlich ABCD.

§. 310. Lehrsätze über die Aehnlichkeit der Pyramiden.

1. (Fig. 121.) Eine Pyramide OABCD wird durch eine der Basis parallele Ebene in zwei ähnliche Pyramiden zerlegt.

Denn da die Seitenkanten beider Pyr. OABCD und Oabcd in O convergiren, so sind ihre homologen Abschnitte verhältnißgleich und (nach Def.) die Pyramiden ähnlich.

2. (Fig. 121.) Wird eine Pyramide durch eine der Basis parallele Ebene geschnitten, so verhalten sich die Grundflächen wie die Quadrate ihrer homologen Kanten oder Höhen.

Denn da abcd und ABCD ähnlich sind, so verhalten ihre Flächen sich (nach §. 263, L. 6.) zu einander, wie $ab^2 : AB^2 = ap^2 : AP^2 = aO^2 : AO^2$.

§. 311. Lehrsätze über die Aehnlichkeit der Polyeder.

1. (Fig. 122.) Aehnliche Polyeder MO, mO können in ähnliche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.

Denn denkt man beide Pol. von Dreiecken eingeschlossen (welches immer gestattet ist, insofern jedes Vieleck aus mehren Dreiecken in einer Ebene besteht) und dergestalt in einander gelegt, daß zwei homologe Ecken in O zusammenfallen, so convergiren der Def. der Aehnlichkeit gemäß alle Verbindungslinien homologer Dreieckspunkte im Punkte O, der zur gemeinschaftlichen Spitze ähnlicher dreiseitiger Pyramiden wird.

2. (Fig. 122.) Die Oberflächen ähnlicher Polyeder verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer homologen Kanten.

Denn es ist, wenn $ab : AB = bc : BC = cd : CD$ .... (nach §. 263, L. 5.) $abm : ABM = ab^2 : Ab^2$, $bcm : BCM = bc^2 : BC^2$ u. s. w., also (nach §. 68, L. 16.):

$$\left(\frac{abm + bcm + cdm \;....}{ABM + BCM + CDM \;....}\right) = \frac{abm}{ABM} = \frac{ab^2}{AB^2}$$

§. 312. Lehrsätze über die Aehnlichkeit der krummflächigen Körper.

1. Alle Kugeln sind einander ähnlich.

Denn denkt man sie concentrisch gelegt und beliebige Linien aus der Mitte gezogen, so werden diese von den einzelnen Kugelflächen nach allen Richtungen in dem nämlichen Verhältniß geschnitten.

2. Zwei Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Achsen-Durchschnitte es sind.

3. Zwei Kegel sind ähnlich, wenn ihre Achsen-Durchschnitte es sind.

§. 313. *Lehrsätze über Linien in und an der Kugel.

1. Die Stücke zwei einander schneidender Kugelsehnen Aa, Bb sind verhältnißgleich.

Zusatz. Wenn man durch einen Punkt O im Innern der Kugel beliebige Sehnen zieht, so sind die Produkte aus ihren Abschnitten bei allen einander gleich.

2. Die Abschnitte zweier aus einem beliebigen Punkte P gezogener Kugelsecanten sind verhältnißgleich.

Zusatz. Wenn man von einem Punkte P außerhalb der Kugel Secanten durch dieselbe zieht, so sind die Producte jeder einzelnen und ihres außen liegenden Abschnitts bei allen andern gleich.

3. Wenn man durch den Berührungspunkt zweier Kugeln Secanten legt, so sind ihre Abschnitte in beiden Kugeln verhältnißgleich.

Die Beweise dieser Sätze folgen, da zwei einander schneidende gerade Linien die Lage einer Ebene bestimmen und die Kugel von solcher in einem Kreise geschnitten wird, unmittelbar aus §. 257.

4. Alle aus einem beliebigen Punkte gezogenenen Kugeltangenten sind einander gleich.

5. Die gemeinschaftlichen Tangenten und die Achse zweier Kugeln sind Convergenten.

Denn denkt man sich durch die Achse zweier Kugeln Ebenen in beliebigen Richtungen gelegt, so erzeugt jeder Durchschnitt zwei Kreise, deren Tangenten (nach §. 257, L. 5.) mit der Achse convergiren.

§. 314. Aufgaben.

1. Eine der im Raume gegebenen Figur abcd ähnliche zu construiren, wenn eine Seite AB homolog der Seite ab und der Punkt A gegeben ist.
2. Eben so, wenn außer dem Verhältniß der homologen Seiten der Aehnlichkeitspunkt O gegeben ist.
3. Die Horizontal- und Verticalprojection einer Kugel von gegebenem Durchmesser zu construiren.
4. Eben so für Cylinder und Kegel, deren Basisdurchmesser und Höhe gegeben sind.
5. Eben so für ein Tetraeder in verschiedener Lage.
6. Desgl. für ein Oktaeder.
7. Eine Pyramide durch eine der Basis ABCD parallel gelegte Ebene so zu theilen, daß der Durchschnitt abcd zu jener sich verhalte, wie zwei Linien m : n. Fig. 121.
8. Eben so, daß die Seiten-Oberfläche von Oabcd ein Drittel von OABCD werde. Fig. 121.
9. Einen Cylinder zu construiren, der einem gegebenen ähnlich sei, zu dessen Grundfläche die seinige sich verhalte, wie zwei Linien p : q.
10. Den Convergenzpunkt zweier Kugeln zu finden, deren Radien und Entfernung gegeben sind.

Fünftes Capitel.

Die Körperräume.

§. 315. **Körpermaß.** So wie man zur Angabe des Flächengehalts ebener Figuren sich eines bestimmten Quadrats bedient, wählt man, um den räumlichen Inhalt eines Körpers vermöge gleichartiger Einheiten anzugeben, zum Maße desselben die Gestalt eines **Würfels** oder **Cubus** von gegebener Seite. Wenn auch nicht jeder Körper, gleich einem rechtwinkligen Parallelepipedon durch wiederholtes Setzen eines Cubus erzeugt und folglich nicht **unmittelbar** dadurch gemessen werden kann, so wird er doch einer **mittelbaren** Ausmessung durch das Cubikmaß fähig, wenn wir seinen räumlichen Inhalt auf eine bestimmte Weise mit dem Inhalt eines geradezu meßbaren vergleichen und dadurch das **Verhältniß** beider bestimmen können. Ist der räumliche oder sogenannte **Cubik-Inhalt** des einen uns bekannt, so wird aus den Verhältnißzahlen derjenige des andern sich ergeben, und auf diese Weise die Inhaltsbestimmung der Körper sich immer weiter verfolgen lassen.

§. 316. **Lehrsätze über die Gleichheit der Körper.**

1. (Fig. 123.) Parallelepipeda über derselben Grundfläche ABCD, deren Gegenflächen FH, KM, in derselben Ebene und zwischen den nämlichen Parallelen liegen, sind inhaltsgleich.

Denn es sind die Prismen AHM und BGL, und nach Abzug beider von dem vierseitigen Prisma ABGM, die Pararallelepipeda ABH und ABM einander gleich.

2. (Fig. 123.) Parallelepipeda über derselben Grundfläche ABCD, deren Gegenflächen IKLM, NOPQ in der nämlichen Ebene liegen, sind inhaltsgleich.

Denn verlängert man zwei Seiten der congruenten Parallelogramme IKLM, NOPQ, so bilden sie, einander schneidend, ein drittes, ebenfalls congruentes EFGH. Es ist aber (nach L. 1) Parp. ABM = ABH, und ABH = ABQ, folglich ABM = ABQ.

3. (Fig. 123.) Jedes Parallelepipedon ABQ kann in ein rechtwinkliges von gleicher Basis verwandelt werden.

Zunächst läßt es sich in ein senkrechtes ABH verwandeln. Verlängert man in demselben (Fig. 124.) nun die Linie CD, um AN, BK senkrecht darauf zu fällen, und construirt über dem Rechteck ABKN ein Parp. ABLM, so sind die Parp. ABGH, ABLM also auch ABOQ (Fig. 123.) und ABLM (Fig. 124.) inhaltsgleich.

4. (Fig. 126.) Die beiden symmetrischen Prismen, worin ein Parallelepipedon **ABCH** durch eine Diagonalebene **BFHD** zerlegt wird, sind inhaltsgleich.

Man lege durch eine Kante **BF** zwei senkrechte Ebenen und verlängere die Seiten des Prisma's, so entstehen die congruenten Parallelogramme **BLMK**, **FOPN**, und das rechtwinklige Parp. **KBLP**. Da nun (nach §. 297, L. 3) die Pyr. **BAKMD** und **FENPH** congruent sind, so folgt, daß **ABH** = **KBP**, und eben so daß **BCH** = **BLP**. Es ist aber (nach §. 299, L. 2) **KBP** = **BLP**, folglich auch **ABH** = **BCH**.

Zusatz. Zwei symmetrische dreiseitige Prismen sind inhaltsgleich, da man sie als Hälften eines Parallelepipedons betrachten kann.

5. (Fig. 127.) Eine dreiseitige Pyramide kann in zwei inhaltsgleiche Prismen und zwei congruente Pyramiden zerlegt werden.

Denn legt man durch die Mitte **E** einer Kante **PB** zwei Ebenen, mit den gegenüberliegenden Seiten parallel, so entstehen die congruenten Dreiecke **DEF**, **GBH** und **DPF**, **GEH**, welche mit den ebenfalls congruenten Dreiecken **PDE**, **EGB** und **PEF**, **EBH** gleiche Pyramiden einschließen. Legt man ferner mit der Grundfläche **GC** eine congruente **EL** parallel durch **EF**, und construirt das Parp. **GL**, so kann dasselbe (L. 4) sowohl durch **EHCF**, als auch durch **IHKF** in Hälften getheilt werden. Nun ist augenscheinlich das Prisma **GID** ≌ **HCF**, und da dieses = $\frac{1}{2}$**GL**, auch **GJD** = **GEC**.

6. (Fig. 128.) Ein dreiseitiges Prisma kann in drei Pyramiden zerlegt werden, wovon die eine mit jeder andern gleiche Basis und Höhe hat.

Denn wird das Prisma durch die Ebenen **BCD**, **BFD** geschnitten, so hat (1) **BDEF** mit **DABC** gleiche Basis, und wegen der Parallelflächen auch gleiche Höhe; (2) **DBEF** mit **DBCF** gleiche Basis und, wegen der gemeinschaftlichen Spitze, auch gleiche Höhe.

7. (Fig. 125.) Wird eine abgestumpfte dreiseitige Pyramide einer ihrer Seitenflächen parallel durch eine Ebene geschnitten, welche man durch die Ecke des kleinen Dreiecks legt, so ist der dadurch entstehende Körper einem gleich hohen Prisma gleich, dessen Basis die mittlere Durchschnittsfigur zwischen Grund- und Gegenfläche ist.

Denn sei **BCF** par. **ADGE**, und die Ebene **KLMN** durch die Mitte der Kante **AE** gelegt, so entstehen, indem man die Ebene **EFG** erweitert und durch **KL** eine andere par. **DG** legt, die inhaltsgleichen Prismen **ASK** und **PFK**, woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Anmerkung. Ein Körper der im Vorstehenden bezeichneten Art werde eine doppelt-abgestumpfte dreiseitige Pyramide genannt.

8. (Fig. 129a.) Jeder Obelisk läßt sich in eine Pyramide

und eine Reihe doppelt-abgestumpfter dreiseitiger Pyramiden von der nämlichen Höhe zerlegen.

Denn zieht man aus irgend einem Endpunkte **B** der kleinern Gegenfläche des Obelisken Parallelen mit dessen einzelnen Kanten, so erhält man zunächst eine Pyramide **BQRS** .... und durch fernere Verbindung der Punkte **B** und **D**, **R** und **J**, u. s. f. eine Reihe doppelt-abgestumpfter dreiseitiger Pyramiden, welche sämmtlich mit jener die nämliche Höhe gemein haben.

Anmerkung. Denkt man sich den Obelisken durch eine der Basis parallele Ebene in der Mitte seiner Höhe durchschnitten, so besteht die dadurch erzeugte mittlere Durchschnittsfläche aus denen aller einzelnen doppelt-abgestumpften Pyramiden und der der ergänzenden vollständigen Pyramide, welche den vierten Theil ihrer Basis beträgt und Ergänzungsfigur genannt wird.

Die Durchschnittsfigur wie auch die Ergänzungsfigur sind augenscheinlich sehr leicht zu construiren, da man zu jener nur die halbe Summe, zu dieser die halbe Differenz der oberen und unteren Randkanten des Obelisken unter den gegebenen Winkeln zu verbinden braucht.

§. 317. Lehrsätze über das Verhältniß der Körper.

1. (Fig. 129.) Rechtwinklige Parallelepipeda von gleicher Basis verhalten sich, wie ihre Höhen.

Denn denkt man sich eine Seitenkante **AE** in **m** gleiche Theile (Einheiten) getheilt und der Basis parallele Ebenen durch alle Theilungspunkte gelegt, so wird augenscheinlich das Parp. **AG** dadurch in **m** congruente kleinere zerlegt. Besteht nun **AK** aus **n** Theilen **AE**, so enthält das Parp. **AL** auch **n** Theile von **AG**, oder es verhält sich $AL : AG = n : m = AK : AE$.

Aber auch wenn das Verhältniß $AK : AE$ nicht in ganzen Zahlen auszudrücken wäre, bleibt diese Proportion gültig. Denn angenommen, es wäre

(1) $AL : AG = AM : AE$, und es würde ein Punkt **P** zwischen **K** und **M** so gewählt, daß **AP** mit **AE** commensurabel sei, so hätte man

(2) $AO : AG = AP : AE$, und ferner aus beiden

(3) $AL : AO = AM : AP$, welches unmöglich ist. Da aus denselben Gründen nicht $AL : AG = AN : AE$ sein kann, so folgt ganz allgemein, daß $AL : AG = AK : AE$.

2. (Fig. 130.) Rechtwinklige Parallelepipeda **DF**, **DQ** derselben Höhe verhalten sich, wie ihre Grundflächen.

Denn legt man beide Körper mit einer Kante **DH** so an einander, daß deren anliegende Seiten in dieselben Ebenen fallen, und erweitert die übrigen Seiten, so bilden dieselben ein drittes Parp. **HL**, und es ist (L. 1)

(1) $EC : HL = EH : HI$; (2) $HL : PM = HG : PH$,

also $EC : PM = EH . HG : HI . PH = EHGF : PHIQ$.

3. (Fig. 130.) Rechtwinklige Parallelepipeda RM, CE verhalten sich überhaupt zu einander, wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

Denn werden beide Körper wie vorhin an einander gelegt und die Seiten zu dem Parp. HL erweitert, so hat man

(nach L. 1) RM : PM = DS : DH,

(nach L. 2) PM : EC = RSTU : EFGH,

also RM : EC = RSTU . DS : EFGH . DH.

Zusatz. Da die Grundflächen als Producte der Seiten (Länge und Breite) angesehen werden können, so verhalten rechtwinklige Parallelepipeda sich auch, wie die Producte ihrer drei Dimensionen.

§. 318. Lehrsätze über die Bestimmung des Inhalts und der Oberfläche ebenflächiger Körper.

1. (Fig. 124.) Den Inhalt eines Parallelepipedons P findet man durch Multiplication seiner Grundfläche B mit der Höhe H.

Denn jedes beliebige Parp. P ist (nach §. 316, L. 3) einem rechtwinkligen von inhaltsgleicher Basis B und derselben Höhe H gleich. Es verhält sich aber, wenn C den messenden Cubus bezeichnet, dessen Seite = q sei (nach §. 317, L. 3) $P : C = B . H : q^2 . q$, und wenn C als Körper-, so wie q als Linien-Einheit angenommen wird, P = B . H.

2. (Fig. 124.) Die Oberfläche O eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist der doppelten Summe der Producte aus je zwei Kanten einer Ecke gleich.

Daß O = 2 (AB . BK + BK . BF + BF . BA) ist, folgt aus §. 264, L. 1.

Zusatz. Bilden die drei Kanten die Winkel a, b, c, so wird (nach §. 282, L. 1) der Ausdruck der Oberfläche:

$$O = 2\,(AB \,.\, BK \,.\, \sin a + BK \,.\, BF \,.\, \sin b + BF \,.\, BA \,.\, \sin c)$$

3. (Fig. 126.) Der Inhalt eines beliebigen Prisma's wird durch Multiplication seiner Grundfläche B mit seiner Höhe H gefunden.

Denn jedes vielseitige Prisma kann in eben so viele dreiseitige Prismen, als seine Basis B in Dreiecke, zerlegt werden. Jedes solches Prisma mit der Basis b darf man aber (nach §. 316, L. 4) als Hälfte eines Parp. von doppelter Basis (2b) betrachten, also = b . H setzen, und da die Summe der Basisdreiecke = B und die gemeinschaftliche Höhe = H ist, so folgt, daß P = B . H.

4. Die Seitenoberfläche eines senkrechten Prisma's findet man durch Multiplication seines Basisumfangs mit der Höhe.

Beweis aus §. 264, L. 1.

5. (Fig. 127.) Den Inhalt einer dreiseitigen Pyramide Q findet man durch Multiplication ihrer Grundfläche B mit dem dritten Theile der Höhe H.

Denn da der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide Q (nach §. 316, L. 6) nur ein Theil von demjenigen eines Prisma's P derselben Basis und Höhe sein kann, so darf man $Q = P.f$ setzen, unter f einen näher zu bestimmenden ächten Bruch verstehend. Nun ist, weil $EFD = \frac{1}{4}B$ und $MN = NP = \frac{1}{2}H$, wenn die Pyramide (nach §. 316, L. 5) in zwei gleiche kleinere und zwei Prismen zerlegt wird:

$$Q = P.f = B.H.f = 2\left(\frac{B}{4}.\frac{H}{2}\right) + 2\left(\frac{B}{4}.\frac{H}{2}\right)f$$
$$= \left(\frac{B.H}{4}\right)(1+f),$$

also $f = \frac{1}{4}(1+f)$ oder $f = \frac{1}{3}$, und $Q = \frac{1}{3}B.H$.

Zusatz. Jedes dreiseitige Prisma kann durch Diagonal-Ebenen (nach §. 316, L. 6) in drei inhaltsgleiche Pyramiden zerlegt werden.

Anmerkung. Die Inhaltsbestimmung der Pyramiden läßt sich ebenfalls auf die Vergleichung zweier Pyramiden von gleicher Basis und Höhe gründen, welche man durch eine unendliche Menge der Basis parallele Ebenen geschnitten denkt. Die dadurch entstehenden einzelnen Schichten werden in diesem Falle als Prismen von gleicher Basis und Höhe (oder wenigstens als von solchen Prismen eingeschlossen) betrachtet, woraus folgt, daß sie paarweise an Inhalt einander gleich sind, also auch ihre Summen, d. h. die beiden verglichenen Pyramiden. Hieraus ergiebt sich dann in Verbindung mit L. 6. im §. 316. unmittelbar, daß der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide der dritte Theil eines Prisma's von gleicher Basis und Höhe ist.

6. (Fig. 107.) Der Inhalt einer vielseitigen Pyramide Q wird durch Multiplication ihrer Basis mit dem dritten Theile der Höhe gefunden.

Denn zerlegt man Q durch Diagonal-Ebenen in dreiseitige Pyramiden, deren Grundflächen $= a, b, c \ldots$ so haben alle die nämliche Höhe, und es ist $Q = \frac{1}{3}H(a+b+c\ldots) = \frac{1}{3}.BH$.

Zusatz I. Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma's von gleicher Basis und Höhe.

Zusatz II. Zwei Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundflächen, und wenn ihre Basis gleich ist, wie ihre Höhen.

Zusatz III. (Fig. 107.) Aehnliche Pyramiden, Q, q verhalten sich, wie die Cuben ihrer Höhen oder homologen Kanten, weil $Q:q = \frac{1}{3}B.H : \frac{1}{3}b.h$, und da (nach §. 310, L. 2) $B:b = H^2:h^2$, auch $= H^3:h^3$, woraus auch $Q:q = MA^3:Ma^3 = AB^3:ab^3 \ldots$ folgt.

Zusatz IV. (Fig. 121.) Aehnliche Polyeder MABCD, mabcd verhalten sich, wie die Cuben ihrer homologen Kanten, da sie sich in ähnliche Pyramiden zerfällen lassen.

7. Die Seiten-Oberfläche einer regulären Pyramide findet man

durch Multiplication ihres Basisumfangs mit der halben Seitenhöhe.

Beweis aus §. 264, L. 3.

8. (Fig. 107.) Den Inhalt einer abgestumpften Pyramide **R** findet man durch Multiplication des dritten Theils ihrer Höhe mit der Summe beider Grundflächen (G^2 und g^2) und der mittlern Proportionale zwischen beiden.

Denn es ist, nach L. 4, (1) $R = \frac{1}{3}(G^2 . H - g^2 . h)$, und ferner (nach §. 310, L. 6) $G^2 : g^2 = H^2 : h^2$ oder $G : g = H : h$, woraus sich (2) $H = \frac{G}{g} h$ und (3) $\frac{H - h}{G - g} = \frac{h}{g}$ ergiebt. Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$(4)\ R = \tfrac{1}{3} . \frac{h}{g} (G^3 - g^3) = \tfrac{1}{3} \left(\frac{H-h}{G-g}\right) (G^3 - g^3)$$
$$= \frac{H-h}{3} (G^2 + Gg + g^2).$$

9. Die Seiten-Oberfläche einer abgestumpften regulären Pyramide ist dem Product aus dem halben Umfange beider Endflächen in die Seitenhöhe gleich.

Beweis aus §. 264, L. 4.

10. Den Inhalt eines regulären Polyeders **S** findet man durch Multiplication der Oberfläche **O** mit dem dritten Theile des Radius **H** der eingeschriebenen Kugel.

Denn fällt man auf jede Seite **F** des n seitigen Polyeders aus seinem Centrum eine Senkrechte **H**, so ist (nach L. 4) $S = \frac{1}{3} . nF . H = \frac{1}{3} O . H$.

Zusatz. Derselbe Satz gilt aus den nämlichen Gründen für jedes, um eine Kugel beschriebene, irreguläre Polyeder.

11. (Fig. 129a.) Den Inhalt eines Obelisken findet man, indem man seine mittlere Durchschnittsfigur nebst einem Drittel der Ergänzungsfigur durch die Höhe multiplicirt.

Denn da man sich (nach §. 316, L. 8) den Obelisken **O** in eine Reihe doppelt-abgestumpfter Pyramiden und eine ergänzende Pyramide zerlegt denken kann, deren mittlere Durchschnittsfiguren mit **D**, **D'**, **D''** ..... und **E** angedeutet werden mögen, so ist (§. 316, L. 7.)

$$(1)\ O = D . h + D' . h + D'' . h + \ldots + 4E . \tfrac{1}{3} h$$

Nun ist aber die mittlere Durchschnittsfläche des ganzen Obelisken:

$$(2)\ M = D + D' + D'' + \ldots + E,$$

und daher, wenn man in (1) das letzte Glied in $E . h$ und $\frac{1}{3} E . h$ zerlegt,

$$(3)\ O = M . h + \tfrac{1}{3} E . h = (M + \tfrac{1}{3} E) . h.$$

Zusatz. Ein Obelisk ist einem Prisma und einer Pyramide von der nämlichen Höhe gleich, wovon jenes die mittlere Durchschnittsfigur und diese die Ergänzungsfigur des Obelisken zur Basis hat.

§. 319. Lehrsätze über die Bestimmung des Inhalts und der Oberfläche krummflächiger Körper.

1. Den Inhalt eines Cylinders C findet man durch Multiplication seiner Basis B mit seiner Höhe H.

Sei $C = x.H$, unter x die unbekannte Fläche verstanden, die mit des Cylinders Höhe multiplicirt werden muß, um seinen Inhalt zu geben, und denkt man sich in und um den Cylinder die regulären Prismen P, p construirt, deren Grundflächen G, g um und in den Basiskreis beschriebene Polygone sind, so ist $C < P$ und $> p$, d. h. $x.H < G.H$ und $> g.H$. Nun giebt es aber keine Fläche, welche unter allen beliebigen Annahmen für P und p kleiner als G und größer als g wäre, als den Kreis B; folglich ist $x = B$ und $C = B.H$.

Zusatz. Ist der Radius der Grundfläche $= R$, so ist $C = R^2 . \pi . H$.

2. Die krumme Oberfläche O eines Cylinders wird durch Multiplication des Basisumfangs U mit der Höhe H gefunden.

Sei $O = x.H$ und denkt man sich unter Q, q die Oberflächen regulärer, um und in den Cylinder beschriebener Prismen, deren Perimeter $= P, p$, so ist $O < Q$ und $> q$, d. h. $x.H < P.H$ und $> p.H$. Nun ist aber nur der Kreisumfang U unter allen Umständen $< P$ und $> p$, folglich $U = x$ und $O = U.H$.

Zusatz. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche mit R, so ist $O = 2R . \pi . H$.

3. Den Inhalt eines Kegels K findet man durch Multiplication seiner Basis B mit dem dritten Theil der Höhe H.

Denn sei $K = x.H$, und vergleicht man den Kegel mit zwei Pyramiden Q, q, die gleiche Höhe H, aber ein in oder um den Basiskreis beschriebenes Polygon, G oder g, zur Grundfläche haben, so ist $K < Q$ und $> q$, d. h. $x.H < \frac{1}{3}G.H$ und $\frac{1}{3}g.H$; also muß $x = \frac{1}{3}B$ sein, weil allein $B < G$ und $> g$ ist.

Zusatz. Ist der Radius der Grundfläche $= R$, so ist $K = \frac{1}{3}R^2 . \pi . H$.

4. Den Inhalt eines abgestumpften Kegels K findet man durch Multiplication des dritten Theils der Höhe mit der Summe der beiden Grundflächen G^2, g^2 und der mittleren Proportionale zwischen beiden.

Der Beweis ist ganz wie in §. 318, L. 8.

Zusatz. Bezeichnet man den Radius der Grundfläche durch R, den der Gegenfläche durch r, so ist $K = \frac{1}{3}H (R^2 + Rr + r^2) \pi$.

5. Die krumme Oberfläche O eines Kegels findet man durch Multiplication seines Basisumfangs U mit der Hälfte der Seitenhöhe S.

Bezeichnen Q, q die Oberflächen zweier regulärer Pyramiden, de-

ren Grundflächen mit den Perimetern P, p um und in den Basiskreis beschrieben worden, so ist $O < Q$ und $> q$, d. h. $< \frac{1}{2}P . M$ und $> \frac{1}{2}p . m$, unter M, m die Seitenhöhe der Pyramidendreiecke verstanden. Nun ist aber unter allen Umständen $U < P$ und $> p$, und zugleich $S < M$ und $> m$, folglich $O = \frac{1}{2}U . S$.

Zusatz. Ist der Radius der Grundfläche $= R$, so ist $O = S . R . \pi$.

6. (Fig. 131.) Die krumme Oberfläche eines abgestumpften Kegels wird durch Multiplication des Umfangs $(U + u)$ seiner beiden Endflächen mit der halben Seitenhöhe $(S - s)$ gefunden.

Denn es ist (nach 5.) (1) $O = \frac{1}{2}(U . S - u . s)$, und da $U : u = S : s$, also (2) $S = \frac{U}{u} s$ und (3) $\frac{S - s}{U - u} = \frac{s}{u}$, so hat man (4) $O = \frac{1}{2} . \frac{s}{u} (U^2 - u^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{S - s}{U - u}\right)(U^2 - u^2) = \frac{1}{2}(S - s)(U + u)$.

Zusatz I. Ist der Radius der Grundfläche $GC = R$, derjenige der Gegenfläche $KM = r$, so ist $O = (S - s)(R + r)\pi$.

Zusatz II. Da der, aus dem Halbirungspunkte P von MC gezogene Radius $PR = \frac{1}{2}(GC + KM) = \frac{1}{2}(R + r)$ ist, so hat man auch $O = GK . 2PR . \pi$.

Zusatz III. Demnach ist die Oberfläche O (nach L. 1.) derjenigen eines Cylinders gleich, dessen Durchmesser $= RQ$ und dessen Höhe GK ist.

7. (Fig. 132.) Die gekrümmte Oberfläche eines Körpers, welcher durch Umdrehung eines regulären Polygons ABCGF um seine Achse AF erzeugt wird, findet man durch Multiplication dieser Achse mit dem Umfange des eingeschriebenen Kreises.

Denn zieht man aus dem Centrum auf die Mitte einer Seite BC den Radius MN, und aus B, N, C die Senkrechten BL, NP, CM, BO, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $BC : BO = MN : NP$, also $BC . NP = BO . MN$ und $BC . 2NP . \pi = BO . 2MN . \pi$; d. h. man findet (nach L. 6, Zusatz II.) die Oberfläche des abgestumpften Kegels, welchen BCML beschreibt, durch Multiplication seiner Höhe BO mit dem Umfange des eingeschriebenen Kreises; folglich die Oberfläche des ganzen, aus solchen Kegelstücken bestehenden Körpers durch Multiplication der Summe $(AL + LM + MK + KF)$, d. i. seiner Achse mit jenem Kreisumfange.

Zusatz I. Ist das Polygon von gerader Seitenzahl und die Verbindungslinie zweier Ecken, CE, zur Achse gewählt, so giebt das Product $CE . 2MN . \pi$ die ganze Oberfläche des Körpers.

Zusatz II. Wählt man hingegen die Verbindungslinie zweier Seiten, AF, zur Achse, so giebt $AF . 2MN . \pi$ nur den gekrümm-

ten Theil der Oberfläche, welcher für alle, um den nämlichen Kreis construirten Polygone, wie groß auch immer die Anzahl ihrer Seiten sein mag, gleich bleiben muß. Um die ganze Oberfläche zu erhalten, müßte man noch die beiden kreisförmigen Endflächen zu AF . 2MN . π addiren.

8. (Fig. 132.) Die Oberfläche der Kugel findet man durch Multiplication ihres Durchmessers mit dem Umfange eines größten Kreises.

Denn denkt man sich um einen größten Kugelkreis ANF reguläre Polygone von gerader Seitenzahl beschrieben und um eine gemeinschaftliche Achse AF gedreht, so entstehen gekrümmte Oberflächen, welche nach dem vorstehenden Zusatze um so weniger von einander verschieden sein werden, je kleiner die Endflächen in A und F sind. Die Gränze aller solcher Polygone ist aber der eingeschriebene Kreis, und die von ihm erzeugte Kugelfläche, wofür die Endflächen verschwinden, wird gleich jeder andern von QBCGS beschriebenen Oberfläche ausgedrückt durch AF . 2MN . π.

Zusatz. I. Die Oberfläche der Kugel ist das Vierfache ihres größten Kreises, weil AF . 2MN . π = 2AM . 2AM . π = $4R^2 . \pi$.

Zusatz II. (Fig. 131.) Die Oberfläche der Kugel ist (L. 2.) der gekrümmten Oberfläche eines umschriebenen Cylinders gleich.

Zusatz III. Die Oberfläche eines sphärischen Dreiecks ist (nach §. 306, L. 15.) $D = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ}{720^\circ}\right) 4R^2 . \pi$.

9. (Fig. 133.) Die Oberfläche einer Kugelzone Z findet man durch Multiplication ihrer Höhe mit dem Umfange eines größten Kreises.

Denn denkt man um den Bogen AB, durch dessen Drehung um CN die Kugelzone Z erzeugt werden mag, das Stück BQPRA irgend eines berührenden Polygons construirt, so erzeugt dasselbe (nach L. 7.) eine Oberfläche = FG . 2CNπ, wie groß auch die Anzahl der Seiten sein mag. Da nun der Bogen AB die Gränze aller möglichen Polygonstücke BQ . . . . A ist, so muß ebenfalls Z = FG . 2CN . π sein.

Zusatz. Zonen von verschiedener Höhe auf derselben Kugel verhalten sich wie die Höhen zu einander.

10. Den Inhalt einer Kugel K findet man durch Multiplication ihrer Oberfläche O mit dem dritten Theile des Radius AM.

Denn denkt man sich um die Kugel irgend ein berührendes Polyeder construirt, dessen Oberfläche = Q, so ist sein Inhalt (nach §. 318, L. 10, Zus.) = $\frac{1}{3}$Q . AM, wie groß immerhin die Anzahl der einschließenden Seiten angenommen werde. Da nun die Kugeloberfläche O die Gränze aller möglichen berührenden Polyeder-

flächen ist, so muß auch $K = \frac{1}{3}O \,.\, AM$ oder (nach L. 8, Zusatz I.) $\frac{1}{3}(AM^2 \,.\, \pi) \,.\, AM$ sein.

Zusatz I. Ist der Radius der Kugel $= R$, so ist (nach L. 8, Zus. I.) $K = 4R^2\pi \,.\, \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}R^3\pi$.

Zusatz II. Zwei Kugeln verhalten sich wie die Cuben ihrer Radien.

Zusatz III. (Fig. 131.) Der Inhalt einer Kugel beträgt das Doppelte eines gleich hohen Kegels, welcher ihren größten Kreis zur Basis hat, weil $K = \frac{4}{3}AM^3 \,.\, \pi = 2AM^2 \,.\, \pi \left(\frac{2\,AM}{3}\right)$.

Zusatz IV. Da (L. 3.) ein Cylinder derselben Basis und Höhe das Dreifache des Kegels beträgt, so verhalten sich Kegel, Kugel und Cylinder, wie die Zahlen 1 : 2 : 3.

11. (Fig. 118.) Den Inhalt eines Kugelsectors R, dessen Basis ein sphärisches Dreieck D ist, findet man durch Multiplication seines Flächeninhalts mit dem dritten Theile des Radius.

Denn denkt man sich um die Seiten AB, BC, CA des sphärischen Dreiecks Stücke von berührenden Polygonen und über der Dreiecksfläche D das Stück F irgend eines die Kugel berührenden Polyeders construirt, so ist der Inhalt des polyedrischen Sectors MABC (nach §. 318, L. 10, Zus.) $= \frac{1}{3}AM \,.\, F$, und da F sich bei fortgesetzter Vermehrung der Berührungsflächen der Dreiecksfläche D als Gränze unendlich nähert, auch $S = \frac{1}{3}AM \,.\, D$.

Zusatz. Da ein Kugelsector, dessen Basis ein sphärisches Polygon P ist, sich in dreiseitige Sectoren zerlegen läßt, so findet man seinen Inhalt ebenfalls $= \frac{1}{3}AM \,.\, P$.

12. Den Inhalt eines Kugelsectors k mit kreisförmiger Basis B findet man durch Multiplication derselben mit dem dritten Theile des Radius.

Denn bezeichnen p und P (als in und um B beschriebene sphärische Polygone) die Grundflächen zweier Kugelsectoren s, S, so ist $k < S$ und $> s$, d. h. $< \frac{1}{3}AM \,.\, P$ und $> \frac{1}{3}AM \,.\, p$. Da nun B stets $< P$ und $> p$, so kann auch k nur $= \frac{1}{3}AM \,.\, B$ sein.

§. 320. Behandlung von Aufgaben über die Bestimmung der Oberflächen und des Inhalts der Körper.

1. Die Oberfläche O eines regulären sechseckigen Prisma's zu finden, dessen größter Durchmesser $= 2r$ und dessen Höhe $= h$ ist.

Die beiden Grundflächen betragen $3r^2 \sqrt{3}$ und die sechs Seitenflächen $6 \,.\, r \,.\, h$, also die ganze Oberfläche $O = 3r\,(r\sqrt{3} + 2h)$.

2. (Fig. 107.) Die Oberfläche O einer regulären sechsseitigen Pyramide zu finden, deren Basis-Durchmesser $= 2r$ und deren Höhe $= h$ ist.

Die Grundfläche ist $= \frac{3}{2} . r^2 \sqrt{3}$ und jede Seitenfläche $= \frac{1}{2} r \sqrt{(\frac{3}{4} r^2 + h^2)}$, also $O = 3r . [\frac{1}{2} r . \sqrt{3} + \sqrt{(\frac{3}{4} r^2 + h^2)}]$.

3. (Fig. 135.) Die Oberfläche O eines Kugelsegments MNF zu finden, wenn dessen Höhe $FG = h$ und der Radius der Kugel $CF = r$ gesetzt wird.

Die gekrümmte Oberfläche ist $= 2r . \pi . h$, der Durchschnittskreis des Segments $= (2rh - h^2) . \pi$, also $O = (4rh - h^2) \pi$.

4. (Fig. 135.) Die Oberfläche eines Kugelsectors MCNF zu finden, wenn dessen Durchschnittssehne $MN = s$ und der Radius der Kugel $CN = r$ gesetzt wird.

Die sphär. Oberfläche des Kugelsectors ist $= 2r . \pi [r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)}]$ und die conische $= s . \pi . \frac{1}{2} r$, also $O = 2r\pi [r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)} + \frac{1}{4} s]$.

5. (Fig. 110.) Den Inhalt eines Tetraeders T zu finden, wenn eine Kante AB desselben gegeben ist.

Da $AP = \frac{2}{3} AQ$ und $AQ = \sqrt{AB^2 - BQ^2}$, so hat man

$AP = \frac{2}{3} \sqrt{AB^2 - \frac{1}{4} AB^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} AB$, und daraus die Höhe:

$DP = \frac{2}{3} \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{1}{3} AB^2} = AB . \sqrt{\frac{2}{3}}$, folglich $T = ABC . \frac{1}{3} DP = (AB^2 . \sqrt{\frac{3}{16}}) (\frac{1}{3} . AB . \sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{6} AB^3 . \sqrt{\frac{1}{2}}$.

6. (Fig. 111.) Den Inhalt eines Oktaeders O zu finden, wenn eine Kante AB desselben gegeben ist.

Aus $AB^2 = AP^2 + BP^2 = 2BP^2$, oder $BP = AB \sqrt{\frac{1}{2}}$, folgt, daß das halbe Octaeder $\frac{1}{2} O = ACED . \frac{1}{3} BP = AB^2 (\frac{1}{3} AB \sqrt{\frac{1}{2}})$, also $O = AB^3 . \frac{\sqrt{2}}{3}$ ist.

7. (Fig. 134. 1.) Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher durch Drehung des Dreiecks ABC um eine durch seine Spitze C beliebig gezogene Linie CD erzeugt wird.

Verlängert man AB und CD bis zum Durchschneiden und zieht die Senkrechten AF, BG, so ist (nach §. 319, L. 3.) der durch Rotation von CAD entstandene Körper: Rot. $(CAD) = \frac{1}{3} (AF^2 . \pi) CD$. Eben so ist Rot. $(CBD) = \frac{1}{3} (BG^2 . \pi) CD$, folglich Rot. $(CAB) = \frac{1}{3} \pi (AF^2 - BG^2) CD$.

Wird aus dem Halbirungspunkte H der Seite AB die Linie HE senkrecht auf CD und BK senkrecht auf AF gezogen, so hat man:

$$AF^2 - BG^2 = (AF + BG) (AF - BG) = 2 . EH . AK$$

folglich Rot. $(CAB) = \frac{2}{3} \pi EH . AK . CD$. Verlängert man endlich noch DA, und fällt die Senkrechte CL, so ist

$$AK : AB = CL : CD \text{ oder } AK . CD = AB . CL = 2ABC,$$

mithin Rot. $(CAB) = \frac{2}{3} EH . 2\pi ABC$; d. h. der Inhalt des durch Rotation von CAB erzeugten Körpers wird gefunden, in=

dem man den Flächenraum des Dreiecks mit $\frac{2}{3}$ des, von dem Punkte H beschriebenen, Kreisumfangs, multiplicirt.

Zusatz. (Fig. 134. II.) Ist das Dreieck ein gleichschenkliges, also $CB = CA$, so hat man $ABC = \frac{1}{2}AB \,.\, CH$, also $Rot.\,(CAB) = \frac{2}{3}EH \,.\, \pi \,.\, AB \,.\, CH$; und da $CH : HE = AB : BK$, oder $CH \,.\, BK = HE \,.\, AB$ ist, $Rot.\,(CAB) = \frac{2}{3}CH^2 \,.\, BK \,.\, \pi = \frac{2}{3}CH^2 \,.\, GF \,.\, \pi$.

8. (Fig. 133.) Den Inhalt eines Körpers zu finden, der durch Umdrehung des Kreissectors ABC um die Achse CN erzeugt wird.

Der durch Rotation des Kreissectors BCN erzeugte Kugelsector ist das Product aus der vom Bogen BAN beschriebenen Kugelzone und $\frac{1}{3}$ AC, d. i. $S = \frac{2}{3}AC^2 \,.\, \pi \,.\, NG$. Eben so findet man den durch Umdrehung des Kreissectors ACN entstehenden Kugelsector $s = \frac{2}{3}AC^2 \,.\, \pi \,.\, NF$; folglich $S - s$ oder $Rot.\,(ABC) = \frac{2}{3}AC^2 \,.\, \pi \,.\, FG$.

9. (Fig. 133.) Den Inhalt eines Körpers zu finden, der durch Umdrehung des Kreissegments ABPA um die Achse CN erzeugt wird.

Nach A. 7. Z. ist $Rot.\,(ABC) = \frac{2}{3}CH^2 \,.\, FG \,.\, \pi$, und nach A. 8. $Rot.\,(APBC) = \frac{2}{3}AC^2 \,.\, FG \,.\, \pi$; folglich der durch Umdrehung des Kreissegments ABPA erzeugte Körper $= \frac{2}{3}FG \,.\, \pi\,(AC^2 - CH^2) = \frac{2}{3}FG \,.\, \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \,.\, FG \,.\, AB^2 \,.\, \pi$.

10. (Fig. 135.) Den Inhalt eines Körpers zu finden, welcher entsteht, wenn man von einem Cylinder ABLK das Kugelsegment ABNM abzieht.

Man findet nach A. 8. den Inhalt des durch Umdrehung des Kreissectors ACM beschriebenen Körpers $= \frac{2}{3}AC^2 \,.\, \pi CG$, und den des Kegels $MCN = \frac{1}{3}GN^2 \,.\, \pi \,.\, CG$, folglich den Inhalt des Kugelsegments $ABNM = (\frac{2}{3}AC + \frac{1}{3}GN^2)\, GC \,.\, \pi$. Wird dieser Werth nun von dem des Cylinders $ABLK = AC^2 \,.\, \pi \,.\, GC$ abgezogen, so erhält man $Rot.\,(AMK) = (\frac{1}{3}AC^2\,\pi - \frac{1}{3}GN^2 \,.\, \pi)\, GC = \frac{1}{3}(GC^2 \,.\, \pi)\, GC = \frac{1}{3}(GP^2 \,.\, \pi)\, GC$; d. i. der Inhalt des Kegels OCP, welcher durch Umdrehung der Linie CD entsteht.

Anmerkung. Ein großer Theil stereometrischer Aufgaben erfordert die Anwendung der sphärischen Trigonometrie, insofern gefordert wird, den Zusammenhang zwischen Flächen- und Kantenwinkeln körperlicher Ecken durch Rechnung auszudrücken. Die Auflösung derartiger Aufgaben beruht daher auf den Untersuchungen des folgenden Capitels.

§. 321. Aufgaben.

1. Inhalt und Oberfläche eines 16 Zoll hohen senkrechten Parallelepipedons zu finden, in dessen Grundfläche zwei Kanten = 14 und 23 Zoll unter dem Winkel von 42°16′ zusammenstoßen.

2. Höhe und Oberfläche eines regulären sechsseitigen Prisma's zu finden, dessen größter Basisdurchmesser = 18 und dessen Inhalt dem eines regulären dreiseitigen Prisma's gleich sei, worin die Basiskante = 8 und die Höhe = 20.
3. In einem vierseitigen und einem sechsseitigen regulären Prisma ist die Basiskante = 7, die Höhe = 13. Wie verhalten sich Inhalt und Oberfläche beider Körper zu einander?
4. Die Höhe einer regulären vierseitigen Pyramide zu bestimmen, wenn ihre Basiskante = 28,7 und ihr Inhalt dem eines rechtwinkligen Parallelepipedons gleich ist, dessen Kanten = 13, 17, 23 sind.
5. Die homologen Kanten zwei ähnlicher Polyeder verhalten sich, wie 5 : 7. Daraus das Verhältniß ihres Inhalts und ihrer Oberfläche zu bestimmen.
6. Aus dem Verhältniß des Inhalts = 14 : 29 zwei ähnlicher Polyeder dasjenige zwei homologer Kanten ab, AB zu finden, Fig. 121.
7. Wie verhalten sich die Oberflächen zwei regulärer Pyramiden, wovon die eine drei- und die andere zehnseitig ist, wenn in beiden die Basis = 24, die Höhe = 7?
8. Ein Tetraeder, dessen Kante = 15, werde im Abstande von einem Drittel seiner Höhe durch eine, der Basis parallele, Ebene geschnitten. Den Inhalt des abgestumpften Körpers zu finden.
9. Eben so dessen Oberfläche.
10. Um eine Kugel von 16 Zoll Radius sei ein berührendes Polyeder beschrieben, dessen Inhalt = 20800 Cubikzoll betrage. Wie groß ist dessen Oberfläche?
11. Unter welchen Winkeln müssen die Kanten MA, MB, MC einer dreiseitigen Pyramide zusammenstoßen, um den Inhalt zu einem Größten zu machen?
12. An einem Würfel, einem Tetraeder und einem Octaeder ist jede der Kanten = 10. Wie groß ist die Kante eines Würfels, der ihnen zusammen an Inhalt gleich sei?
13. Für einen Cylinder und einen Kegel sei der Radius der Grundfläche = 14 und 8, die Höhe = 6 und 9. Das Verhältniß ihres Inhalts und ihrer Oberflächen zu finden.
14. Die Radien der Endflächen eines abgestumpften Kegels seien = 17 und 11, seine Höhe = 8,74. Inhalt und Oberfläche desselben zu bestimmen.
15. Ein Rechteck, dessen Seiten = 23 und 8 sind, nebst zwei über den kleinen Seiten beschriebenen gleichseitigen Dreiecken, werde um deren Spitzen gedreht. Inhalt und Oberfläche des dadurch entstehenden Körpers zu finden.

16. Wie groß ist der Radius einer Kugel, einem Würfel gleich, dessen Diagonale = 17,22 sei?
17. Eben so einem Octaeder gleich, dessen Diagonale = 31,5?
18. Die gekrümmte Oberfläche eines um seinen Durchmesser gedrehten reguläres Zwölfecks zu berechnen, wenn AF = 36. Fig. 132.
19. Eben so für ein reguläres Zehneck, wenn AF = 100. Fig. 132.
20. Den Radius einer, dem Tetraeder eingeschriebenen Kugel zu finden, wenn dessen Kante = a ist.
21. Eben so für das Octaeder.
22. Das Verhältniß der Oberflächen eines Tetraeders und der eingeschriebenen Kugel zu bestimmen.
23. Eben so für das Octaeder und die eingeschriebene Kugel.
24. Wie verhält sich der Radius einer Halbkugel zur Höhe eines inhaltsgleichen Kegels derselben Basis?
25. Das Verhältniß der durch Drehung von ABC und AEFC entstehenden Körper zu finden, wenn DB = 2AE ist. Fig. 78.
26. Eben so der durch Drehung von CDE, DENM und CKL um die Achse AB entstehenden Körper, wenn W. DCE = 35° ist. Fig. 80.
27. Den Inhalt eines Kugelabschnitts MFN zu finden, wenn der Radius CM = 5,86 und der Centriwinkel MCN = 162° 14′ ist. Fig. 135.
28. Das Verhältniß der gekrümmten Oberflächen eines quadratischen Cylinders nebst Kegel und Kugel, die ihm eingeschrieben sind, zu finden. Fig. 131.
29. Eben so ihrer Gesammt-Oberflächen.
30. Den Inhalt für ein, seiner Achse nach cylindrisch durchbohrtes reguläres sechsseitiges Prisma zu finden, wenn dessen größter Durchmesser = 12, die Höhe = 8 und der Durchmesser der Oeffnung = 2,7 ist.
31. Eben so für einen Cylinder, wenn dessen Durchmesser = 23 Zoll, die Höhe = 5 Fuß 3 Zoll und der Radius der Höhlung = $4\frac{3}{4}$ Zoll ist.
32. Desgleichen für eine Kugel von 5 Zoll Radius, wenn der Durchmesser der Oeffnung 2,36 Zoll beträgt.

Sechstes Capitel.

Die sphärische Trigonometrie.

§. 322. Gegenstand der sphärischen Trigonometrie. Den Lehrsätzen über die gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks (§. 306) gemäß findet unter diesen Bestandtheilen ein eben so bestimmter Zusammenhang, wie unter den Seiten und Winkeln des gradlinigen Dreiecks Statt, und da jeder sphärische Winkel durch denjenigen zweier Tangenten der Kugel, die Seiten des sphärischen Dreiecks aber durch die Winkel, welche zwei Radien derselben am Centrum bilden, gemessen werden, so lassen sich die Begriffe, Bezeichnungen und Formeln, welche nur für geradlinige Winkel aufgestellt und abgeleitet wurden, auch auf sphärische Winkel und Seiten übertragen. Es ist nun das Geschäft der sphärischen Trigonometrie, den Zusammenhang unter diesen Bestandtheilen eines sphärischen Dreiecks, welcher geometrisch nur im Allgemeinen ausgesprochen werden konnte, arithmetisch vermöge der goniometrischen Functionen in bestimmten Gleichungen oder Formeln darzustellen, in welchen jede einzelne Größe durch die übrigen bestimmt wird. Man hat es dabei allein mit Winkelgrößen zu thun, da die Seiten hier nicht in Hinsicht auf ihre Länge, sondern nur als winkelmessende Kreisbogen betrachtet werden, als deren Radius immer die Einheit gilt.

§. 323. Trigonometrische Lehrsätze für rechtwinklige sphärische Dreiecke. (Fig. 136.) Wenn man die Eckpunkte A, B, C eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks mit dem Kugelmittelpunkte M durch gerade Linien zu einer dreiseitigen Ecke verbindet, aus A auf die Kanten MB, MC die Senkrechten AD, AE, und die auf AM senkrecht stehenden Tangenten AF, AG nebst den Verbindungslinien DE, FG zieht, so entstehen die rechtwinkligen geradlinigen Dreiecke AMD, AME, AMF, AMG; DME, FMG, ADE, AFG; (die Ebenen AFG, MFG stehen beide senkrecht auf AFM, also auch ihr Durchschnitt FG). Durch Anwendung der trigon. Sätze (§. 280) erhält man für den Zusammenhang der Seiten und Winkel im rechtwinkl. sphär. Dreiecke ABC, die eben so, wie die des geradlinigen Dreiecks ABC, durch a, b, c; α, β, γ bezeichnet werden mögen, folgende Lehrsätze.

1. (Fig. 136.) Der Sinus der Hypotenuse ist dem Sinus einer Cathete, dividirt durch den Sinus des gegenüberliegenden Winkels gleich $\left(\sin b = \frac{\sin c}{\sin \gamma}\right.$ oder $\left.\sin b = \frac{\sin a}{\sin \alpha}\right)$.

Denn es ist AD = AM . sin AMD = AE . sin AED, und AE = AM . sin AME.

2. (Fig. 136.) Der Cosinus der Hypotenuse ist dem Producte der Cosinus beider Catheten gleich (cos b = cos a . cos c).

Denn es ist EM = AM . cos AME = MD . cos DME, und MD = AM . cos AMD.

3. (Fig. 136.) Der Cosinus eines Winkels ist der Tangente der anliegenden Cathete, dividirt durch die Tangente der Hypotenuse, gleich $\left(\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b} \text{ oder } \cos\gamma = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b}\right)$.

Denn es ist AF = AM . tg AMF = AG . cos FAG, und AG = AM . tg AMG.

4. (Fig. 136.) Der Sinus einer Cathete ist der Tangente der andern Cathete, dividirt durch die Tangente des dieser gegenüberliegenden Winkels, gleich.

$$\left(\sin c = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ oder } \sin a = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} \gamma}\right).$$

Denn es ist FG = FM . tg FMG = AF . tg FAG, und FM = AM . sec c $= \frac{AM}{\cos c}$, AF = AM . tg c $= AM . \frac{\sin c}{\cos c}$.

5. (Fig. 136.) Der Cosinus der Hypotenuse ist dem Producte der Cotangenten beider anliegenden Winkel gleich

$$(\cos b = \cot\alpha . \cot\gamma).$$

Denn es ist AD = DE . tg AED = AM . sin AMF, und DE = EM . tg DME; also $\cos b . \operatorname{tg} a . \operatorname{tg}\gamma = \sin c$, und wenn man (aus L. 4) $\sin c = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}\alpha}$ einführt: $\cos b . \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\gamma = 1$.

6. (Fig. 136.) Der Sinus eines Winkels ist dem Cosinus des andern Winkels, dividirt durch den Cosinus der diesem gegenüberliegenden Cathete, gleich.

$$\left(\sin\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos a} \text{ oder } \sin\alpha = \frac{\cos\gamma}{\cos c}\right)$$

Denn es ist AD = AF . sin AFD = AE . sin AED, und AF = AG . cos FAG; AE = AM . sin AME. Also hat man $\operatorname{tg} b . \cos\alpha . \cos c = \sin b . \sin\gamma$ oder $\cos\alpha \frac{\cos c}{\cos b} = \sin\gamma$, worin nach L. 2 $\frac{\cos c}{\cos b} = \frac{1}{\cos a}$ gesetzt werden muß.

§. 324. Allgemeine trigonometrische Lehrsätze für sphärische Dreiecke.

1. (Fig. 136.) Es verhalten sich die Sinus zweier Seiten zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Denn fällt man aus einem Winkelpunkte C den senkrechten Bogen

CI auf die gegenüberliegende Seite c, so ist (nach §. 323, L. 1) $\sin CI = \sin b \sin \alpha = \sin a \sin \beta$, oder:

$$(1)\ \sin b : \sin a = \sin \beta : \sin \alpha.$$

Anmerkung. Der Beweis bleibt der nämliche, wenn das Dr. ABC in B stumpfwinklich ist, also der senkrechte Bogen CI auf die Verlängerung von AB fallen sollte.

2. (Fig. 136.) Der Cosinus einer beliebigen Seite ist dem Producte der Cosinus der beiden andern nebst demjenigen der Sinus dieser Seiten in den Cosinus des gegenüberliegenden Winkels gleich.

Denn verlängert man die Kanten MB, MC der Ecke MABC und zieht die Tangenten AF, AG nebst der Verbindungslinie FG, so entstehen die geradlinigen Dreiecke AFG, MFG, worin in Beziehung auf AM als Einheit:

$AF = tg\ c$, $AG = tg\ b$, $MF = \sec c$. $MG = \sec b$.

Folglich $FG^2 = \sec b^2 + \sec c^2 - 2 \sec b . \sec c . \cos a$.

und auch $FG^2 = tg\ b^2 + tg\ c^2 - 2\ tg\ b . tg\ c . \cos \alpha$,

und hieraus, indem man $\sec^2 - tg^2 = 1$ setzen darf:

$$1 + tg\ b . tg\ c . \cos \alpha = \sec b . \sec c . \cos a,$$

oder da $tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ist:

$$(2)\ \cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos \alpha.$$

Anmerkung. Zur Verallgemeinerung des vorstehenden Beweises nehme man an:

I. daß im Dreieck KBC (Fig. 118) zugleich KC oder $b' > 90°$ und KB oder $c' > 90°$ sei; dann ist im sphärischen Dreieck ABC sowohl AB, als $AC < 90°$, also $BC = a = a'$, W. $\alpha = \alpha'$, und

$$\cos a = \cos (180° - b') . \cos (180° - c') + \sin (180° - b') . \sin (180° - c') . \cos \alpha,$$

d. i. $\cos a' = \cos b' . \cos c' + \sin b' . \sin c' . \cos \alpha'$.

II. daß im Dreieck ABH (Fig. 118) AB oder $c' < 90°$, aber AH oder $b' > 90°$, und W. $BAH = \alpha'$ sei, so ist im Dr. ABC sowohl AB, als $AC < 90°$, also:

$$\cos (180° - a') = \cos (180° - b') . \cos c' + \sin (180° - b') . \sin c' . \cos (180° - \alpha'),$$

d. i. $\cos a' = \cos b' . \cos c' + \sin b' . \sin c' . \cos \alpha'$.

3. (Fig. 136.) Das Product der Cotangente einer beliebigen Seite in den Sinus einer zweiten ist gleich dem Producte aus deren Cosinus in den Cosinus des, von beiden eingeschlossenen, Winkels nebst demjenigen aus dem Sinus dieses Winkels in die Cotangente dessen, welcher der ersten Seite gegenüber liegt.

Denn es ist nach (1) $\sin b = \frac{\sin a \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha}$, und nach (2) $\cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos\beta$.

Wenn man diese beiden Werthe in die Gleichung (2) im L. 2 substituirt, so wird sie $\cos a = \cos a \,.\, \cos c^2 + \sin a \,.\, \sin \,.\, c \,.\, \cos c \,.\, \cos\beta + \left(\frac{\sin a \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha}\right) \sin c \,.\, \cos\alpha$,

d. i. zusammengezogen:

$\cos a\,(1 - \cos c^2) = \sin a \,.\, \sin c\,(\cos c \,.\, \cos\beta + \sin\beta \,.\, \cot\alpha)$,

oder (3) $\cot a \,.\, \sin c = \cos c \,.\, \cos\beta + \sin\beta \,.\, \cot\alpha$.

4. Der Cosinus eines beliebigen Winkels ist gleich dem Producte aus den Sinus der beiden andern Winkel in den Cosinus der gegenüberliegenden Seite weniger dem Producte der Cosinus jener beiden Winkel.

Denkt man sich zu dem gegebenen sphärischen Dreiecke ABC das Polardreieck PQR (Fig. 119) construirt, so ist $RQ = 180° - \alpha$, $PR = 180° - \beta$, $PQ = 180° - \gamma$, W. $P = HB + BG = 90° + (90° - a) = 180° - a$; also nach L. 2: $\cos RQ = \cos PR \,.\, \cos PQ + \sin PR \,.\, \sin PQ \,.\, \cos P$, d. i. nach Substitution vorstehender Werthe:

$$(4)\ \cos\alpha = \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a - \cos\beta \,.\, \cos\gamma.$$

§. 325. Umformung der sphärischen trigonometrischen Grundformeln. Von den vorstehenden vier Grundformeln der sphärischen Trigonometrie ist für die logarithmische Berechnung (sofern man nicht etwa die Gaußischen Logarithmen für Summen und Differenzen nach §. 132 anwenden will) nur die erste unmittelbar zu gebrauchen. Die drei anderen müssen zu diesem Zwecke erst dergestalt umgeformt werden, daß ihre Zweitheiligkeit verschwinde, und nur Factoren oder Divisoren in ihnen vorkommen. Je nachdem nun die eine oder andere Größe durch die übrigen bestimmt werden soll, muß dieselbe Formel auf verschiedene Art umgestaltet werden. Man wendet dazu entweder einige bekannte goniometrische Formeln oder einen sogenannten Hülfswinkel an, wie aus Folgendem hervorgeht.

1) Bestimmung eines Winkels durch die drei Seiten.

Wenn man zu beiden Seiten der Gleichung (2) unter der Form

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}$$

die Einheit addirt, und die Formel $\cos(b + c) = \cos b \,.\, \cos c - \sin b \,.\, \sin c$ anwendet, so findet man:

$$1 + \cos\alpha = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \,.\, \sin c}$$

Nun ist nach §. 276:

$\cos\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - 1$, oder $1 + \cos\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\alpha^2$ . . . (18)

$\cos a - \cos m = 2\sin\frac{1}{2}(m + a) . \sin\frac{1}{2}(m - a)$ . . . . . . (21)

und wenn diese Werthe substituirt werden:

$$\text{I. (A)} \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c+a) . \sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b . \sin c}}$$

Zieht man hingegen, um den Winkel α durch die Function des Sinus zu bestimmen, beide Seiten der Gleichung von der Einheit ab, und wendet die Formel $\cos(b - c) = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c$ an, so erhält man:

$$1 - \cos\alpha = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b . \sin c}.$$

Nun ist nach §. 276:

$\cos\alpha = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$, oder $1 - \cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$ . . . (18)

$\cos m - \cos a = 2\sin\frac{1}{2}(a + m) . \sin\frac{1}{2}(a - m)$ . . . . . (21)

und nach Substitution dieser Werthe:

$$\text{I. (B)} \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c) \sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b . \sin c}}.$$

2) Bestimmung einer Seite durch die beiden andern und den gegenüberliegenden Winkel.

Man setze, um die Formel $m . \cos(b - \varphi) = m . (\cos b . \cos\varphi + \sin b . \sin\varphi)$ auf die Gleichung (1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b . \sin c . \cos\alpha$ anzuwenden, $\cos c = m . \cos\varphi$ und $\sin c . \cos\alpha = m . \sin\varphi$. Dadurch wird sie:

$$\cos a = m . \cos(b - \varphi),$$

und wenn $m = \frac{\cos c}{\cos\varphi}$ substituirt wird, zur Gleichung:

$$\text{II. } \cos a = \frac{\cos c}{\cos\varphi}\cos(b - \varphi),$$

für deren Anwendung der Hülfswinkel φ nach dem Ausdrucke $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m . \sin\varphi}{m . \cos\varphi} = \operatorname{tg} c . \cos\alpha$ vermittelst der Function der Tangente berechnet werden muß.

3) Bestimmung einer Seite durch die beiden andern und einen anliegenden Winkel.

Durch Transposition folgt aus II.:

$$\text{III. } \cos(b - \varphi) = \frac{\cos a . \cos\varphi}{\cos c}, \text{ wenn } \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} c . \cos\alpha.$$

4) Bestimmung eines Winkels durch beide anliegende Seiten und einen zweiten Winkel.

Benutzt man die Formel $m . \sin(\beta + \varphi) = m . (\sin\beta . \cos\varphi$

$+ \sin\varphi \cos\beta$) zur Umgestaltung von (3) $\cot a . \sin c = \cos c . \cos\beta + \sin\beta . \cot\alpha$, indem man $\cos c = m . \sin\varphi$ und $\cot\alpha = m . \cos\varphi$ setzt, so wird:

$$\cot a . \sin c = m . \sin(\beta + \varphi)$$

und nach Substitution von $\frac{\cos c}{\sin\varphi}$ für m:

$$\cot . a \sin c = \frac{\cos c}{\sin\varphi} \sin(\beta + \varphi), \text{ oder}$$

$$\text{IV. } \sin(\beta + \varphi) = \frac{\text{tg } c}{\text{tg } a} \sin\varphi, \text{ wenn tg } \varphi = \cos c . \text{tg } \alpha.$$

5. Bestimmung einer Seite durch beide anliegende Winkel und eine zweite Seite.

Durch Anwendung der Formel $m . \sin(c - \varphi) = m(\sin c . \cos\varphi - \sin\varphi \cos c)$ auf die Gleichung (3) unter der Gestalt

$$\sin\beta . \cot\alpha = \sin c . \cot a - \cos c . \cos\beta$$

erhält man $\cot a = m . \cos\varphi$ und $\cos\beta = m . \sin\varphi$ setzend:

$$\sin\beta . \cot\alpha = m . \sin(c - \varphi),$$

und wenn $m = \frac{\cos\beta}{\sin\varphi}$ substituirt wird:

$$\sin\beta . \cot\alpha = \frac{\cos\beta}{\sin\varphi} \sin(c - \varphi), \text{ oder}$$

$$\text{V. } \sin(c - \varphi) = \frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} . \sin\varphi, \text{ wenn tg}\varphi = \cos\beta . \text{tg } a.$$

6) Bestimmung eines Winkels durch die beiden anderen und die gegenüberliegende Seite.

Die Gleichung (4) $\cos\alpha = \sin\beta \sin\gamma . \cos a - \cos\beta . \cos\gamma$ wird, wenn man die Formel $m . \sin(\beta - \varphi) = m(\sin\beta \cos\varphi - \sin\varphi \cos\beta)$ gebraucht, und $\sin\gamma . \cos a = m . \cos\varphi$, $\cos\gamma = m . \sin\varphi$ setzt:

$$\cos\alpha = m . \sin(\beta - \varphi),$$

und wenn man $m = \frac{\cos\gamma}{\sin\varphi}$ substituirt:

$$\text{VI. } \cos\alpha = \frac{\cos\gamma}{\sin\varphi} . \sin(\beta - \varphi), \text{ wenn tg } \varphi = \frac{\cot\gamma}{\cos a}.$$

7) Bestimmung eines Winkels durch die beiden anderen und eine anliegende Seite.

Durch Transposition der Gleichung VI. erhält man:

$$\text{VII. } \sin(\beta - \varphi) = \frac{\sin\varphi . \cos\alpha}{\cos\gamma}, \text{ wenn tg } \varphi = \frac{\cot\gamma}{\cos a}.$$

8) Bestimmung einer Seite durch die drei Winkel.

Wenn man beide Seiten der Gleichung (4) unter der Form

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta . \cos \gamma}{\sin \beta . \sin \gamma}$$

zur Einheit addirt, und $\cos (\beta - \gamma) = \cos \beta . \cos \gamma + \sin \beta . \sin \gamma$ anwendet, so erhält man:

$$1 + \cos a = \frac{\cos (\beta - \gamma) + \cos \alpha}{\sin \beta . \sin \gamma}$$

Nun ist aber nach §. 276:

$\cos a = 2 \cos \frac{1}{2} a^2 - 1$ oder $1 + \cos a = 2 \cos \frac{1}{2} a^2$ . . . (18)

$\cos m + \cos \alpha = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + m) . \cos \frac{1}{2} (\alpha - m)$ . . . . (22)

und wenn diese Werthe substituirt werden:

$$\text{VIII. (A)} \quad \cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma)}{\sin \beta . \sin \gamma}}.$$

Zieht man hingegen, um a durch die Function des Sinus zu erhalten, beide Seiten der Gleichung von 1 ab, so ist mit Anwendung der Formel $\cos (\beta + \gamma) = \cos \beta . \cos \gamma - \sin \beta . \sin \gamma$:

$$1 - \cos a = \frac{-(\cos (\beta + \gamma) + \cos \alpha)}{\sin \beta . \sin \gamma},$$

und nach §. 276, vermöge der Formeln:

$\cos a = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} a^2$ oder $1 - \cos a = 2 \sin \frac{1}{2} a^2$ . . . (18)

$\cos \alpha + \cos m = 2 \cos \frac{1}{2} (m + \alpha) . \cos \frac{1}{2} (m - \alpha)$ . . . . (22)

$$\text{VIII. (B)} \quad \sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{- \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma + \alpha) . \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha)}{\sin \beta . \sin \gamma}}.$$

§. 326. Umfassendere Formeln der sphärischen Trigonometrie. Die sämmtlichen, im Vorhergehenden entwickelten Formeln der sphärischen Trigonometrie drücken eine Beziehung zwischen je vier verschiedenen Stücken des Dreiecks aus, so daß immer eines derselben durch die drei andern bestimmt erscheint. Es lassen sich aber aus einigen dieser Formeln auch solche ableiten, welche den Zusammenhang von fünf oder allen sechs Bestandtheilen des Dreiecks auf eine zur Berechnung sehr geeignete Weise darstellen, man hat nämlich nach §. 325, I.:

$$\text{(A)} \begin{cases} (1) \cos \frac{1}{2} \alpha^2 = \dfrac{\sin \frac{1}{2} (b + c + a) \sin \frac{1}{2} (b + c - a)}{\sin b . \sin c} \\ (2) \cos \frac{1}{2} \beta^2 = \dfrac{\sin \frac{1}{2} (a + c + b) \sin \frac{1}{2} (a + c - b)}{\sin a . \sin c} \\ (3) \cos \frac{1}{2} \gamma^2 = \dfrac{\sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (a + b - c)}{\sin a . \sin b} \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\begin{cases}(4)\ \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b\,.\,\sin c}\\[2ex](5)\ \sin\tfrac{1}{2}\beta^2=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\,.\,\sin c}\\[2ex](6)\ \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a\,.\,\sin b}\end{cases}$$

Durch Multiplication je zweier dieser Formeln und Division ihres Products durch eine dritte findet man:

$$\begin{cases}\text{aus } \dfrac{(2)\times(3)}{(4)} \text{ die Form } \dfrac{\cos\frac{1}{2}\beta\,.\,\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin a}\\[2ex]\text{aus } \dfrac{(5)\times(6)}{(4)} \ \ldots\ldots \ \dfrac{\sin\frac{1}{2}\beta\,.\,\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin a}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{aus } \dfrac{(2)\times(6)}{(1)} \text{ die Form } \dfrac{\cos\frac{1}{2}\beta\,.\,\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a}\\[2ex]\text{aus } \dfrac{(3)\times(5)}{(1)} \ \ldots\ldots \ \dfrac{\sin\frac{1}{2}\beta\,.\,\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a}\end{cases}$$

und indem man diese Gleichungen paarweise subtrahirt oder addirt durch Anwendung der goniometrischen Grundformeln (§. 275):

$$\text{I.}\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}.$$

$$\text{II.}\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

$$\text{III.}\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}.$$

$$\text{IV.}\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

Diese vier Gleichungen (welche auf gleiche Weise aus den Formeln für $\cos\frac{1}{2}a$ und $\sin\frac{1}{2}a$ in VIII. (A) und (B) §. 325. abgeleitet werden konnten) sind unter dem Namen der Gaußischen bekannt. Durch Division derselben ergeben sich die, nur fünf Stücke des sphärischen Dreiecks enthaltenen Neperschen Analogien:

$$\text{V.}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}.$$

$$\text{VI.}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}.$$

$$\text{VII. } \cot g \tfrac{1}{2} a \,.\, \tan g \tfrac{1}{2} (b+c) = \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta-\gamma)}{\cos \frac{1}{2} (\beta+\gamma)}.$$

$$\text{VIII. } \cot g \tfrac{1}{2} a \,.\, \tan g \tfrac{1}{2} (b-c) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta-\gamma)}{\sin \frac{1}{2} (\beta+\gamma)}.$$

§. 327. Behandlung von Aufgaben der sphärischen Trigonometrie.

1. Die Catheten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC zu finden, wenn dessen Hypotenuse nebst einem anliegenden Winkel gegeben ist.

Sei $b = 50°44'$ und $\gamma = 46°58'$, so ist (nach §. 323, L. 1):

$$\log.\sin c = \begin{cases} \log.\sin b = 9.88886 \\ +\log.\sin \gamma = 9.86389 \end{cases}$$
$$9.75275 = \text{l.}\sin 34°28'.$$

Ferner hat man (nach §. 323, L. 3):

$$\log.\text{tg}\, a = \begin{cases} \log\ \text{tg}\ b = 10.08750 \\ +\log \cos \gamma = \ \ 9.83405 \end{cases}$$
$$9.92155 = \text{l.}\,\text{tg}\, 39°51'.$$

2. Aus den, der Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC anliegenden Winkeln α, γ die Seiten desselben zu berechnen.

Sei $\alpha = 153°26'$, $\gamma = 105°28'$ so ist, indem man die Logarithmen der negativen Cosinus und Cotangenten durch ein angehängtes n bezeichnet, um aus der geraden oder ungeraden Anzahl der negativen Factoren und Divisoren auf die Art des gesuchten Winkels zu schließen (nach §. 323, L. 5):

$$\log.\cos b = \begin{cases} \log.\cot \alpha = 10.30100\,.\,n \\ +\log.\cot \gamma = \ \ 9.44200\,.\,n \end{cases}$$
$$9.74300 = \log \cos 56°24'.$$

Ferner erhält man (nach §. 323, L. 6):

$$1)\ \log.\ \cos\ a = \begin{cases} \log.\cos \alpha = 9.95154\,.\,n \\ -\log.\ \sin\ \gamma = 9.98399 \end{cases}$$
$$9.96755\,.\,n$$
$$= \log\ \cos\ 158°8'.$$

$$2)\ \log.\ \cos\ c = \begin{cases} \log.\cos \gamma = 9.42599\,.\,n \\ -\log.\ \sin\ \alpha = 9.65054 \end{cases}$$
$$9.77545\,.\,n$$
$$= \log.\ \cos\ 126°36'.$$

Die Richtigkeit der Rechnung kann man leicht nach §. 323, L. 2. prüfen.

3. Den Winkel γ eines sphärischen Dreiecks zu berechnen, dessen drei Seiten gegeben sind.

Sei $a = 34^\circ 16' 52''$, $b = 46^\circ 20' 40''$, $c = 26^\circ 32' 18''$, so ist (§. 325, I. B.)

$$\log.\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \left\{\begin{array}{rl} \log.\sin\frac{1}{2}(c+b-a) = & 9.5192084 \\ +\log.\sin\frac{1}{2}(c-b+a) = & 9.1003102 \\ \hline & +8.6195186 \\ -\log.\sin b = & 9.8594403 \\ -\log.\sin a = & 9.7507040 \\ \hline & -9.6101443 \\ \hline & 9.0093743 \\ & :2 \\ \hline & 9.5046871 \\ & = \text{l. sin } 18^\circ 38' 32'' \end{array}\right.$$

4. Aus zwei Seiten a, b eines sphärischen Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu berechnen.

Sei $a = 34^\circ 16' 52''$, $b = 46^\circ 20' 40''$, $\gamma = 37^\circ 17' 4''$, so ist (§. 325, II.):

$$\log.\text{tg}.\varphi = \left\{\begin{array}{rl} \log.\text{tg } a = & 9.8335747 \\ +\log.\cos\gamma = & 9.9007155 \\ \hline & 9.7342902 \end{array}\right.$$

$$= \log.\text{tang } 28^\circ 28' 25''$$

$$\log.\cos c = \left\{\begin{array}{rl} \log.\cos a = & 9.9171294 \\ +\text{l.}\cos(b-\varphi) = & 9.9785232 \\ \hline & 9.8956526 \\ -\log.\cos\varphi = & 9.9440071 \\ \hline & 9.9516455 \\ & = \log.\cos 26^\circ 32' 18'' \end{array}\right.$$

5. Aus zwei Seiten a, c eines sphärischen Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel β einen der beiden anderen Winkel und die dritte Seite zu berechnen.

Sei $a = 73^\circ 58' 54''$, $c = 38^\circ 45'$, $\beta = 46^\circ 33' 41''$, so ist (§. 325, V.)

$$\log.\text{tg } \varphi = \left\{\begin{array}{rl} \log.\cos\beta = & 9.8373223 \\ +\log.\text{tg } a = & 10.5419795 \\ \hline & 10.3793018 \end{array}\right.$$

$$= \log\text{ tang } 67^\circ 20' 15''.$$

$$\log.\text{tg } \alpha = \left\{\begin{array}{rl} \log.\text{tg }\beta = & 10.0236820 \\ +\log\sin\varphi = & 9.9651031 \\ \hline & 19.9887851 \\ -\text{l.}\sin(c-\varphi) = & 9.6798823.\text{n} \\ \hline & 10.3089028.\text{n} \end{array}\right.$$

$$= \log.\text{tang } 116^\circ 9' 7''.$$

Um die dritte Seite zu berechnen, wähle man nun die Formel aus §. 325, L. 1:

$$\log.\ \sin b = \left\{\begin{array}{r} \log.\ \sin a = 9.9828011 \\ + \log.\ \sin\beta = 9.8610033 \\ \hline 9.8438044 \\ - \log.\ \sin\alpha = 9.9530966 \\ \hline 9.8907078 \end{array}\right.$$
$$= \log.\ \sin 51^\circ 2'$$

6. Der Winkel β des sphärischen Dreiecks ABC werde durch beide anliegende Seiten a, c und einen zweiten Winkel α bestimmt.

Sei $a = 88^\circ 50'$, $c = 58^\circ 26'$, $\alpha = 75^\circ 46'$, so ist (§. 325, IV.):

$$\log.\ \mathrm{tg}\ \varphi = \left\{\begin{array}{r} \log.\ \cos c = 9.7189086 \\ + \log.\ \mathrm{tg}\ \alpha = 10.5957514 \\ \hline 10.3146600 \end{array}\right.$$
$$= \log.\ \mathrm{tang}\ 64^\circ 9'.$$

$$\log.\sin(\beta + \varphi) = \left\{\begin{array}{r} \log.\ \mathrm{tg}\ c = 10.2115471 \\ + \log.\ \sin\varphi = 9.9542129 \\ \hline 10.1657600 \\ - \log.\ \mathrm{tg}\ a = 11.6911158 \\ \hline 8.4746442 \end{array}\right.$$
$$= \log.\ \sin 1^\circ 42' 30''.$$

Da aber diesem Logar. auch der stumpfe Winkel $178^\circ 17' 30''$ entspricht und $\varphi = 64^\circ 9'$ abgezogen werden soll, um β zu gewinnen, so setze man $\beta + \varphi = 178^\circ 17' 30''$, woraus $\beta = 114^\circ 8' 30''$ folgt.

7. Es werde ein Winkel α des sphärischen Dreiecks ABC bestimmt, wenn die beiden andern nebst der gegenüberliegenden Seite a gegeben sind.

Sei $\beta = 94^\circ 30'$, $\gamma = 96^\circ 20'$, $a = 100^\circ 16'$ so ist (§. 325. VI.):

$$\log.\ \mathrm{tg}\ \varphi = \left\{\begin{array}{r} \log.\ \cot\gamma = 9.04528.\mathrm{n} \\ - \log.\ \cos a = 9.25098.\mathrm{n} \\ \hline 9.79430 \end{array}\right.$$
$$= \log.\ \mathrm{tg}\ 31^\circ 55'$$

$$\log\ \cos\alpha = \left\{\begin{array}{r} \log.\ \cos\gamma = 9.04262.\mathrm{n} \\ + \mathrm{l.}\sin(\beta - \varphi) = 9.94826. \\ \hline 9.99088.\mathrm{n} \\ - \log\ \sin\varphi = 9.72320 \\ \hline 9.26768.\mathrm{n} \end{array}\right.$$
$$= \log.\ \cos 100^\circ 40'.$$

8. Aus den drei gegebenen Winkeln eines sphärischen Dreiecks ABC soll eine Seite a bestimmt werden.

Sei $\alpha = 100^\circ 40'$, $\beta = 94^\circ 30'$, $\gamma = 96^\circ 20'$, so ist (§. 325, VIII):

$$
\log.\sin\tfrac{1}{2}a = \left\{
\begin{array}{rl}
\log.\left(-\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma+\alpha)\right) = & 9.91729 \\
+\log\ \cos\ \tfrac{1}{2}\ (\beta+\gamma-\alpha) = & 9.84885 \\
+ & 9.76614 \\
-\log.\sin\gamma = & 9.99734 \\
-\log.\sin\beta = & 9.99866 \\
- & 9.99600 \\
 & 9.77014 \\
 & :2 \\
 & 9.88507 \\
 & = \mathrm{l.}\sin 50^\circ 8'.
\end{array}
\right.
$$

9. Mit Hülfe der Neperschen Analogien aus zwei Seiten b, c eines sphärischen Dreiecks und einem anliegenden Winkel γ den Winkel α zu finden.

Sei $b = 45^\circ 10'$, $c = 38^\circ 4'$, $\gamma = 19^\circ 46'$, so findet man zunächst (nach §. 324, L. 1) $\beta = 22^\circ 54'$, und dann (nach §. 326, Formel V.):

$$
\log.\ \mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\ \alpha = \left\{
\begin{array}{rl}
\log.\cos\tfrac{1}{2}(b-c) = & 9.99917 \\
\log.\cos\tfrac{1}{2}(b+c) = & 9.87367 \\
+\ \log\ \mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\ (\beta+\gamma) = & 9.59168 \\
- & 9.46535 \\
 & 10.53382 \\
 & = \log.\ \mathrm{tang}\ 73^\circ 42'.
\end{array}
\right.
$$

10. Durch die Neperschen Analogien aus einer Seite a und den anliegenden Winkeln β, γ eines sphärischen Dreiecks die beiden andern Seiten zu berechnen.

Sei $a = 114^\circ 8'$, $\beta = 65^\circ 18'$, $\gamma = 47^\circ 34'$, so hat man nach §. 326, Formel VII. und VIII.:

$$
\log.\ \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(b+c) = \left\{
\begin{array}{rl}
\log.\ \cos\ \tfrac{1}{2}\ (\beta-\gamma) = & 9.99478 \\
\log.\ \cos\ \tfrac{1}{2}\ (\beta+\gamma) = & 9.74265 \\
+\ \log.\ \mathrm{cotang}\ \tfrac{1}{2}a = & 9.81141 \\
- & 9.55406 \\
 & 10.44072 \\
 & = \log.\ \mathrm{tang}\ 70^\circ 4'
\end{array}
\right.
$$

$$
\log.\mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\ (b-c) = \left\{
\begin{array}{rl}
\log.\ \sin\ \tfrac{1}{2}\ (\beta-\gamma) = & 9.18790 \\
\log.\ \sin\ \tfrac{1}{2}\ (\beta+\gamma) = & 9.92077 \\
+\ \log\ \mathrm{cotang}\ \tfrac{1}{2}a = & 9.81141 \\
- & 9.73218 \\
 & 9.45572. \\
 & = \log.\ \mathrm{tang}\ 15^\circ 56'
\end{array}
\right.
$$

Aus der halben Summe und Differenz der gesuchten Seiten $\frac{1}{2}(b+c) = 70^\circ 4'$, $\frac{1}{2}(b-c) = 15^\circ 56'$, ergeben sich diese nun als $b = 86^\circ$ und $c = 54^\circ 8'$.

§. 328. Aufgaben.

Vorbemerkung. Die acht ersten der nachstehenden Aufgaben beziehen sich auf Fig. 114, wenn **ACKH** den Mittagskreis, **IDE** den Horizont des Beobachters, also **A** das Zenith, **C** den Pol, **B** irgend einen Stern und **PRQ** den Aequator der Himmelskugel bezeichnen. Demnach ist:

(1) **BC** $= a$ die Polardistanz des Sterns.
(2) **BR** $= a' = (90^\circ - a)$ seine Declination.
(3) **AC** $= b$ die Zenithdistanz des Pols.
(4) **EC** $= b' = (90^\circ - b)$ die Polhöhe.
(5) **AB** $= c$ die Zenithdistanz des Sterns.
(6) **BD** $= c' = (90^\circ - c)$ seine Höhe.
(7) **ABC** $= \alpha =$ **DE** das Azimuth desselben.
(8) **ACB** $= \beta$ der parallaktische Winkel.
(9) **ACB** $= \gamma$ der Stundenwinkel.
(10) **VR** $=$ die Rectascension des Sterns.

---

1. Aus der Polhöhe eines Orts und der Declination der Sonne für einen bestimmten Tag ihre Höhe um 6 Uhr Morgens zu finden.
   Geg. $b' = 54^\circ 32'$; $a' = 16^\circ 8'$; $\gamma = 90^\circ$.
2. Aus der Declination der Sonne und ihrer um 6 Uhr beobachteten Höhe die Polhöhe zu bestimmen.
   Geg. $a' = 20^\circ 24'$; $c' = 5^\circ 16'$; $\gamma = 90^\circ$.
3. Aus der Polardistanz des Arcturs, seiner Zenithdistanz und dem Stundenwinkel die Polhöhe zu finden.
   Geg. $a = 69^\circ 52' 30''$; $c = 73^\circ 24' 10''$; $\gamma = 98^\circ 6'$.
4. Aus der Polardistanz des Sterns μ im Perseus, der Polhöhe für Palermo und dem Stundenwinkel die Höhe jenes Sterns zu finden.
   Geg. $a = 40^\circ 47' 20''$; $b' = 39^\circ 6' 44''$; $\gamma = 30^\circ$.
5. Aus der Polhöhe von London, der Polardistanz der Capella und ihrer Zenithdistanz das Azimuth zu bestimmen.
   Geg. $b' = 51^\circ 31'$; $a = 44^\circ 11' 50''$; $c = 73^\circ 4'$.
6. Aus der Polardistanz, der beobachteten Höhe und dem Azimuth des Sirius die Polhöhe zu bestimmen.
   Geg. $a = 106^\circ 28' 50''$; $c' = 28^\circ 4' 40''$; $\alpha = 47^\circ 14' 8''$.
7. Aus der Polhöhe von Berlin, der Declination der Sonne (am 4. Juni 1825) und ihrer beobachteten Höhe den Stundenwinkel (mithin die Zeit) zu bestimmen.
   Geg. $b' = 52^\circ 31' 46''$; $a' = 22^\circ 26' 10''$; $c' = 49^\circ 54'$.
8. Aus der Polhöhe von Wien, der Polardistanz des Regulus und dem Stundenwinkel Höhe und Azimuth zu finden.
   Geg. $b' = 48^\circ 12' 36''$; $a = 77^\circ 9' 24''$; $\gamma = 140^\circ 53'$.

9. Aus der geographischen Breite (Polhöhe) von Berlin, **RB** = 52°31′46″, und Archangel, **PA** = 64°33′36″ und dem Längenunterschiede beider Oerter, **PR** = 25°38′10″ ihre Entfernung auf der Erdoberfläche zu berechnen.
10. Eben so von Berlin und Madrid, wenn der Längenunterschied beider = 17°3′20″ und die Polhöhe von Madrid = 40°25′18″ ist.
11. Aus den gegebenen Kanten p, q, r und Kantenwinkeln a, b, c, eines Parallelepipedons den Inhalt desselben zu finden.
12. Eben so für eine dreiseitige Pyramide.
13. Eben so die Flächenwinkel an den Kanten p, q, r.
14. Den Inhalt einer dreiseitigen Pyramide aus ihren sechs Kanten zu bestimmen.
15. Aus der Kante k eines Rhomboeders und einem seiner Kantenwinkel a die Flächenwinkel des Körpers zu bestimmen.
16. Eben so den Inhalt desselben.

Drittes Buch.

Anfangsgründe der höheren Geometrie.

§. 329. Krumme Linien und Flächen. Den Betrachtungen der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes lag fast durchgängig die ursprüngliche Vorstellung von gerader Linie und ebener Fläche zum Grunde. Von den unzähligen krummen Linien wurde als die einfachste und regelmäßigste nach Begriff und Form nur die Kreislinie aufgenommen, und auch die Betrachtungen über sie oder die durch Umdrehung erzeugten Oberflächen konnten jener Grundvorstellungen von gerader Linie und ebener Fläche nicht entbehren. Dagegen wurden die krummen Linien oder Curven im Allgemeinen wegen der Unbestimmtheit ihres Begriffs (als nicht gerade Linien) und eben so die gekrümmten Flächen (als Nicht-Ebenen) von jenen Betrachtungen ausgeschlossen und eigenthümlichen späteren Untersuchungen vorbehalten, die man unter dem Namen der höheren Geometrie jenen elementaren gegenüberstellen kann.

§. 330. Beziehungs-Linien und Ebenen. Die Beziehung auf eine gerade Linie, welche schon im negativen Begriffe der Curve liegt, findet nothwendig auch in der Darstellung derselben Statt, in sofern eine deutliche Vorstellung ihrer eigenthümlichen Gestalt nur dadurch gewonnen werden kann, daß man die stetige Aenderung durch den veränderlichen Abstand ihrer einzelnen Punkte von einer gegebenen Geraden bemerklich macht. Diese Bestimmungsart der Richtung und Lage vermöge des veränderlichen Abstandes von einer gegebenen geraden Beziehungslinie ist eben sowohl auf gerade, als auf krumme Linien, also ganz allgemein, anwendbar und enthält die Grundansicht der höheren Geometrie. Ihr gemäß kann man

eine Curve auch dadurch als entstehend sich vorstellen, daß auf einer geraden Linie eine andere veränderliche (gewissermaßen fließende), bald zu-, bald abnehmende, in immer paralleler Lage sich fortbewege, wobei ihr Endpunkt einen zusammenhängenden Zug bilden muß.

Auf eine ähnliche Weise wird jede krumme Fläche, wie in ihrem Begriffe, so auch in der Darstellung auf eine Ebene bezogen, indem man sie durch Angabe des veränderlichen Abstandes ihrer Punkte von derselben zu bestimmen sucht. Offenbar kann diese Methode der räumlichen Bestimmung nicht minder auf ebene, als auf krumme Flächen angewendet werden, und ist wegen dieser Allgemeinheit für die höhere Geometrie ein Mittel, jede Lage, Gestalt und Krümmung einer Fläche anzugeben.

§. 331. Analytische Geometrie. Der Begriff von veränderlichen Größen — die eigentliche Grundlage für die Betrachtungsweise der höheren Geometrie — fordert zur Unterscheidung von der Vorstellung constanter oder unveränderlicher Größen, wofür man schon in der elementaren Geometrie die Bezeichnung durch Buchstaben zu gebrauchen pflegt, eine eigenthümliche Andeutung. Man hat dazu die letzten Buchstaben des Alphabets gewählt, die also hier nicht (wie in der Algebra) das Unbekannte, sondern das Veränderliche bezeichnen, während die übrigen das Räumlich-Unveränderliche arithmetisch darstellen. Diese Darstellungsart bringt Arithmetik und Geometrie in die engste Verbindung, indem sie uns gestattet, aus dem Zusammenhange der Zeichen auf denjenigen der durch sie dargestellten Raumformen und die Eigenschaften der krummen Linien und Flächen, worauf sie sich beziehen, zu schließen. Die hieraus hervorgehende analytische Betrachtungsweise erklärt den Namen analytische Geometrie, womit die allgemeine Untersuchung der Curven und krummen Flächen ebenfalls belegt zu werden pflegt.

Erstes Capitel.

Die geraden Linien und Winkel.

§. 332. Coordinaten. (Fig. 137.) Um die Lage irgend eines Punktes **M** in der Ebene **MFm** zu bestimmen, denke man willkürlich die Gerade **FX** gezogen, nehme einen beliebigen Punkt **A** in derselben an und fälle die Senkrechte **MP** auf **AX**. Diese Linie heißt dann Ordinate, das von ihr abgeschnittene Stück **AP** Abs-

cisse des Punktes M, und beide Linien bestimmen seine Lage in Beziehung auf die gewählte Linie AX und den Anfangspunkt A. In sofern man noch unzählige andere Punkte M′, M″ . . . . durch Ordinaten auf FX bezogen denken kann, giebt man dieser gemeinschaftlichen Beziehungslinie den Namen Abscissenachse und versteht unter Ordinatenachse eine senkrecht durch den Anfangspunkt gezogene AB. Die Linien, wodurch nach dieser Vorstellung die Lage beliebiger Punkte der Ebene YAX bestimmt wird, bezeichnet man, als paarweise zusammengehörend, auch mit dem gemeinschaftlichen Namen Coordinaten und hat es als ganz gleichgültig anzusehen, auf welche der beiden Achsen, als Abscissenachse, der gegebene Punkt M zu beziehen sei, ob auf AY durch die Ordinate MB oder auf AX durch die Ordinate MP, weil in beiden Fällen die Lage des Punktes durch Coordinaten der nämlichen Länge bestimmt wird, und der ganze Unterschied in der Verwechselung des Namens besteht.

Obgleich die Wahl rechtwinkliger Coordinaten ihre Vorzüge hat, so ist sie doch keineswegs nothwendig, sondern eben sowohl die Anwendung von Coordinaten zulässig, die einander unter irgend einem andern Winkel treffen. So kann z. B. M sowohl durch MF als durch MP auf die Abscissenachse AX bezogen werden, wenn man AN als Ordinatenachse annimmt. Man gebraucht zur Andeutung der Coordinaten, als veränderlicher, einer stetigen Zu- oder Abnahme fähiger Größen, allgemein die letzten Buchstaben des Alphabets (t, u, v, w, x, y, z) und zwar gewöhnlich x und y, durch x die Abscissen durch y die Ordinaten bezeichnend; so ist $MP = y$, $AP = x$. Daß Coordinaten einem bestimmten Punkte angehören, also bestimmte Linien (oder Zahlen) sein sollen, pflegt man durch beigefügte Accente (x', y', x'', y'' . . . .) anzudeuten. Um aber neben dem Zahlenwerthe auch die Lage der Coordinaten bemerklich zu machen, muß man (nach §. 231.) die für Abscissen und Ordinaten als ursprünglich angenommene Richtung als positiv, die ihr entgegengesetzte als negativ ansehen und demgemäß durch + und — bezeichnen Rechnet man z. B. anfangs die Abscissen von A nach X, die Ordinaten von A nach Y, so ist $AP = + x'$, $AF = - x'$, und $AD = + y'$, $AC = - y'$. (Fig. 137.)

Für den Anfangspunkt A ist augenscheinlich $x = o$ und $y = o$, für alle in der Achse der x liegenden Punkte $y = o$, und für sämmtliche Punkte der Ordinatenachse $x = o$. Jeder andere, nicht in die Achsen fallende Punkt hat hingegen zwei reelle Coordinaten, deren Richtung durch das positive und negative Vorzeichen bestimmt wird. So hat man (durch x', y', x'', y'' bestimmte, absolute Zahlen andeutend) als Werthe der Abscisse und Ordinate:

$$(1)\ \text{für } M' \begin{cases} x = +x' \\ y = +y' \end{cases} \qquad (3)\ \text{für } m' \begin{cases} x = +x' \\ y = -y' \end{cases}$$

$$(2)\ \text{für } M'' \begin{cases} x = -x'' \\ y = +y'' \end{cases} \qquad (4)\ \text{für } m'' \begin{cases} x = -x'' \\ y = -y'' \end{cases}$$

Anmerkung. Die vorstehende Bezeichnungsweise, welche sich nach §. 231 als nothwendig ergiebt, darf nicht zu einer Differenzform verleiten, wo zwei Abscissen oder Ordinaten von entgegengesetzter Lage zu einer Summe zu verbinden sind. So ist z. B. AP″ + AP′ nicht $= x' - x''$, sondern $= x' + x''$.

§. 333. Gleichung der geraden Linie. Durch die Fällung von (rechtwinkl. oder schiefwinkl.) Ordinaten aus beliebigen Punkten N, N′ .... einer durch den Anfangspunkt A gezogenen geraden Linie entstehen die ähnlichen Dreiecke NAP, N′AP′ (Fig. 137), worin die Ordinaten zu den Abscissen in einem, sich immer gleich bleibenden (constanten) Verhältnisse stehen, dessen Zahlenwerth durch a bezeichnet werden mag; also

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} \ldots\ldots = a.$$

Der allgemeine, d. h. für alle Punkte der Geraden AN gültige Zusammenhang ihrer Coordinaten ist also ausgesprochen durch die Gleichung

$$\frac{y}{x} = a \text{ oder } y = ax,$$

welche man als arithmetische Darstellung einer geraden Linie betrachten kann, indem man den unbestimmten Zahlen x und y die Bedeutung veränderlicher Coordinaten ertheilt. Daß diese gerade Linie durch deren Anfangspunkt gehen müsse, erkennt man aus dem gleichzeitigen Nullwerden von x und y.

Werde nun aber allgemeiner die Lage FM für die gerade Linie angenommen, so findet man, wenn DE mit AX parallel gezogen und AD = b gesetzt wird:

$$\frac{MN}{ND} = \frac{M'K}{KD} \ldots = \frac{AD}{AF}$$

$$\text{oder } \frac{y-b}{x'} = \frac{y'-b}{x'} \ \ldots = a$$

$$\text{und daraus } y = ax + b$$

als die allgemeinste Gleichung einer geraden Linie, welche nicht durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt ist.

§. 334. Ausdruck des Winkels. (Fig. 137.) Man kann bekanntlich jeden spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreiecke vermöge der Catheten in Function seiner Tangente ausdrücken, und diese Be=

stimmungsart, angewendet auf den Winkel α, welchen eine gerade Linie AN oder FM mit der Abscissenachse einschließt, giebt:

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{MP}{FP} = \frac{AD}{AF} = \frac{MN}{DN} = \frac{y-b}{x} = a.$$

Dieser Zahlenwerth, der Coefficient von x in der Gleichung $y = ax + b$, ist also Tangente des gesuchten Winkels. Das Verhältniß AD : AF gestattet offenbar die mannigfaltigsten, gebrochenen und ganzen Werthe von 0 bis ins Unendliche (∞). Der Annahme, daß $a = \text{tg}\ \alpha = 0$, also $y = b$, entspricht die parallele, der Voraussetzung, daß $a = \text{tg}\ \alpha = \infty$, die senkrechte Lage der MF.

Wird die Linie MF auf schiefwinklige Coordinatachsen bezogen oder Winkel yAx allgemein $= \beta$ angenommen, so hat man in dem schiefwinkligen Dreiecke DMN, worin Winkel DMN = Winkel DAN = $\beta - \alpha$ ist:

$$\frac{MN}{DN}, \text{ d. i. } \frac{y-b}{x} = \frac{\sin\ \alpha}{\sin\ (\beta - \alpha)}$$

und als Gleichung der geraden Linie:

$$y = \frac{\sin\ \alpha}{\sin\ (\beta - \alpha)}\ x + b,$$

welches mithin ihr allgemeinster Ausdruck ist.

§. 335. Coordinaten-Transformation. Es können Umstände eintreten, die es rathsam oder nöthig machen, eine der Coordinatenachsen oder auch beide zugleich mit anderen, vielleicht für die Beziehung bequemer liegenden, zu verwechseln, wodurch begreiflich die Werthe der vorigen Coordinaten, x und y, eine durchgängige Umgestaltung erleiden müssen.

I. Am einfachsten ist eine solche Transformation, wenn man den Anfangspunkt, nicht aber die Richtung der Coordinaten ändert, also die neuen Achsen mit den vorigen parallel annimmt. Denke man sich z. B. die Lage des neuen Anfangspunktes A (Fig. 138) gegen den vorigen H so, daß $AF = f$, und $AG = g$ sei, so werden die neuen Coordinaten t und u des Punktes M gefunden aus den Gleichungen:

$$FP = AP + FA \qquad MO = MP + OP,$$
$$\text{d. i. (1) } x = t + f. \qquad \text{(2) } y = u + g.$$

Die Bezeichnung der constanten Werthe f und g ändert sich nothwendig mit der Lage des Anfangspunktes in Beziehung auf die früheren Achsen; waren diese z. B. DX und LY, also der bisherige Anfangspunkt in K, so hat man:

$$KR = AP - AE \qquad MR = MP - RP,$$
$$\text{d. i. (1) } x = t - f \qquad \text{(2) } y = u - g.$$

Soll nur eine der Coordinatenachsen verlegt werden, so ist f oder g $= 0$, also $x = t$ oder $y = u$.

II. Denkt man ferner eine Drehung beider Coordinatenachsen um den Winkel α vorgenommen, so daß sie in anderer Lage AU und AT (Fig. 139.) wiederum einen rechten Winkel am Anfangspunkt A einschließen, so ist

$$AQ = AS - QS. \qquad MQ = RQ + MR.$$

d. i. (1) $t = x \,.\, \cos\alpha - y \,.\, \sin\alpha$. (2) $u = x \,.\, \sin\alpha + y \,.\, \cos\alpha$.

Wird außerdem der Anfangspunkt der Coordinaten von H nach A verlegt, so hat man in den vorstehenden Ausdrücken $x - f$ für x, und $y - g$ für y zu substituiren, weil $AP = FP - AF$ und $MP = MO - AG$. Es ist also in diesem Falle:

$$(1)\ t = (x - f) \cos\alpha - (y - g) \sin\alpha.$$

$$(2)\ u = (x - f) \sin\alpha + (y - g) \cos\alpha.$$

III. (Fig. 140.) Wählt man statt des bisherigen rechtwinkligen ein schiefwinkliges Coordinatensystem, so daß die neue Abscissenachse mit der vorigen den Winkel α und die der Ordinaten mit ihr den W. β einschließe, so ist $AQ = t$, $MQ = u$, und

$$AP = AS + SP, \qquad MP = RP + MR,$$

d. i. (1) $x = t \,.\, \cos\alpha + u \,.\, \cos\beta$. (2) $y = t \,.\, \sin\alpha + u \,.\, \sin\beta$.

Hieraus ergeben sich, nachdem man (1) mit $\sin\beta$ und (2) mit $\cos\beta$ multiplicirt, und beide Gleichungen von einander abgezogen hat:

$$(1)\ t = \frac{x \,.\, \sin\beta - y \,.\, \cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}. \quad (2)\ u = \frac{y \,.\, \cos\alpha - x \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Wird außerdem der Anfangspunkt der Coordinaten von H nach A verlegt, so hat man in den vorstehenden Ausdrücken nur $x - f$ für x, und $y - g$ für y zu substituiren, weil $AP = FP - AF$ und $MP = MO - OP$ ist.

§. 336. Aufgaben.

1. (Fig. 141.) Die Entfernung zweier Punkte M′, M″ vermöge ihrer Coordinaten anzugeben.

Man ziehe M′O parallel AX, so ist

$$M'M'' = \sqrt{M'O^2 + M''O^2} = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

2. (Fig. 141.) Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, die durch zwei Punkte M′, M″ gehe, deren Coordinaten gegeben sind.

Um in der gesuchten Gleichung, die (nach §. 333) von der Form $y = ax + b$ sein muß, die unbekannten Coefficienten a und b zu bestimmen, setze man für x und y die gegebenen Werthe x′, y′ und x″, y″. Dann ist

$$(1)\ y'' = ax'' + b,$$

$$(2)\ y' = ax' + b,$$

also $y'' - y' = a\,(x'' - x')$.

Hieraus findet man $a = \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'}\right)$, und

$$b = y' - ax' = \left(\frac{x' y' - y'' x'}{x'' - x'}\right).$$

Anmerkung. Ist $y'' - y' = 0$, so ist auch $a = 0$, d. h. die gesuchte Linie ist der Abscissenachse parallel. Für $x'' - x' = 0$ hingegen wird $a = \infty$ oder die Lage der Linie senkrecht zu AX.

3. (Fig. 141.) Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche einer gegebenen LL' parallel sei und durch einen gegebenen Punkt M' gehe.

Sei $y = a'x + b'$ die Gleichnng der gegebenen Geraden und $y = ax + b$ die der gesuchten parallelen, so ist (nach §. 334) nothwendig $a = a' = \operatorname{tg} \alpha$; ferner hat man für den Punkt M' den Werth $y' = ax' + b$, also $b = y' - ax'$, wodurch die Coefficienten der gesuchten Gleichung bestimmt sind.

4. (Fig. 141.) Den Winkel β zwei gerader Linien LL' und ll' zu finden, deren Gleichungen gegeben sind.

Sei die Gleichung der ersten $y = ax + b$,
der zweiten $y = a'x + b'$,
so ist $a = \operatorname{tg} \alpha$ und $a' = \operatorname{tg} \alpha'$, unter α und α' diejenigen Winkel verstanden, welche LL' und ll' mit AX einschließen. Also ist $\beta = \alpha - \alpha'$, und zu berechnen durch den Ausdruck:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\alpha - \alpha') = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{1 + \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \alpha'} = \frac{a - a}{1 + aa'}.$$

Anmerkung. Findet man $a - a' = 0$, so ist $\beta = 0$, also die eine der andern Geraden parallel; ist aber $1 + aa' = 0$, oder

$a' = -\frac{1}{a}$, so wird $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{0} = \infty$, also $\beta = 90^{\circ}$.

5. (Fig. 141.) Die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier geraden Linien LL' und ll' zu finden, deren Gleichungen gegeben sind.

Sei die Gleichung der ersten $y = ax + b$,
der zweiten $y = a'x + b'$,
so müssen für den Durchschnittspunkt K die Coordinaten y und x die nämlichen sein, und man findet durch Elimination:

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \qquad y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

6. (Fig. 141.) Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt M auf eine andere gegebene Linie M'K senkrecht gezogen sei.

Sei die Gleichung der ersten $y = ax + b$,
der zweiten $y = a'x + b'$,
so hat man für den Punkt M' in MM': $y' = ax' + b$, also durch Subtraction: $y - y' = a (x - x')$, oder $y = ax + (y' - ax')$

Nun muß aber, damit MM' auf KM' senkrecht stehe (nach A. 4, Anm.),

$$1 + aa' = 0 \text{ oder } a = -\frac{1}{a'}$$

sein, mithin $y = -\frac{1}{a'}x + \left(y' + \frac{x'}{a'}\right)$.

Anmerkung. Mit der allgemeinen Auflösung der vorstehenden Aufgaben ist auch die besondere an numerischen Beispielen zu verbinden, wobei man stets einen willkürlichen Maßstab für die Coordinaten zu Grunde zu legen hat, sofern diese construirt werden sollen.

Zweites Capitel.

Die krummen Linien.

§. 337. Erklärungen. Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit der krummen Linien läßt sich eine auf ihre Gestalt gegründete Eintheilung nur nach ganz allgemeinen Merkmalen vornehmen. Man kann sich also vorstellen, daß eine Curve in sich selbst zurücklaufe und dadurch eine geschlossene Figur bilde, wie die Kreislinie; oder daß sie nach Art der Geraden bis in's Unendliche sich verlängern lasse, ohne einen Flächenraum einzuschließen; endlich noch, daß sie beide Eigenschaften mit einander verbinde, wie ein Kreis mit der an ihm gezogenen Tangente. Es lassen sich also überhaupt geschlossene, unbegränzte und gemischte Curven denken. Zu den letzten gehört die Linie BCKILH (Fig. 142.) Den von irgend einem Punkte nach derselben Seite liegenden Theil einer Curve, BGC, kann man einen Zweig, und den Durchschnittspunkt N, worin zwei ihrer Zweige einander durchschlingen, einen Knoten derselben nennen. Als Hülfslinien für die Bestimmung ihres Laufs dienen die Tangente (GD), d. h. eine Gerade, welche mit der Curve einen Punkt (G) gemein hat und so liegt, daß aus diesem Punkte keine Gerade zwischen ihr und der Curve gezogen werden kann: die senkrecht auf dieser stehende Normale (GF), die Subtangente (DE), und endlich die Subnormale (EF). In Beziehung auf eine ihrer Achsen, AX, heißt ein Stück BGC der Curve concav, wenn es innerhalb des spitzen Winkels fällt, der von einer beliebigen Tangente GD mit der Achse gebildet wird; convex hingegen, wenn es außerhalb jenes Winkels liegt. Diejenigen Punkte, in denen Parallelen der Achsen die Curve berühren, wie C, I, L, K, H, werden — weil in ihnen die Curve wieder den Achsen sich zuwendet — Wendepunkte derselben genannt.

§. 338. Gleichungen der Curven. Der Umstand, daß eine jede gerade Linie, welches auch ihre Lage gegen die Coordinatenachsen sein möge, sich durch eine Gleichung des ersten Grades darstellen läßt, giebt zu erkennen, daß die krummen Linien, wenn sie überhaupt einer ähnlichen analytischen Darstellung fähig sind, nur durch Gleichungen von höheren Graden, als dem ersten sich werden ausdrücken lassen, so wie daß solche Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen nur Curven entsprechen können. Denkt man sich in der That eine höhere Gleichung der Form $y = f(x)$ durch Bestimmung mehrfacher Coordinaten wirklich construirt, so muß der, durch die Endpunkte der Ordinaten gehende Zug nothwendig eine Curve darstellen; denn angenommen, es wäre eine gerade Linie MF (Fig. 137.), so hätte man für jeden beliebigen Punkt M derselben die Gleichung:

$$\frac{MN}{DN} = \frac{AD}{AF} \quad \text{oder} \quad \frac{y-b}{x} = \frac{a}{1},$$

also $y = ax + b$, gegen die Voraussetzung, wonach die gegebene Gleichung von einem höhern, als dem ersten, Grade sein sollte. Da aber die Menge der Formen höherer Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen augenscheinlich unbegränzt ist, so pflegt man sich bei ihrer anfänglichen Betrachtung auf die sogenannten algebraischen zu beschränken, worin nur gegebene rationale Exponenten von x und y vorkommen, die transscendenten Gleichungen (und Curven) hingegen, worin irrationale Exponenten oder auch logarithmische und trigonometrische Functionen von x und y erscheinen (wie z. B. $\log y = ax^2 + b$, $y = a . \cos x - b . \tang x$), unbeachtet zu lassen.

§. 339. Intersection der Curven. Sei $y = f(x)$ die Andeutung einer beliebigen algebraischen Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen, so erhält man, $y = 0$ setzend, in $f(x) = 0$ den besondern Zustand der Gleichung, worin sämmtliche Wurzeln oder auflösenden Werthe von x Abscissen derjenigen Punkte der Achse darstellen, in welchen dieselbe von der Curve geschnitten wird. Die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ hängt aber (nach §. 188.) von dem Grade derselben ab; ist sie vom nten Grade, so sind der Wurzeln auch n, worunter sich freilich (nach §. 191.) imaginäre, jedoch nur paarweise, befinden können. Man darf daraus schließen, daß eine Curve, die das Resultat der Construction einer Gleichung vom nten Grade ist, in nicht mehr, als n Punkten von der Abscissenachse durchschnitten werden kann, wohl aber in wenigeren, sofern unter den Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ auch gleiche Wurzeln enthalten sein können oder neben den reellen auch etwa imaginäre vorkommen, die begreiflich nicht durch Abscissen von bestimmter Länge, wie die reellen Wurzeln, dargestellt werden können. Demnach bieten die verschiedenen Grade der algebraischen Glei-

chungen das bequemste Mittel dar, die Curven in Ordnungen einzutheilen, deren Grad mit dem der Gleichungen, also auch mit der Anzahl der höchstens möglichen Intersectionen der Curve und einer Geraden (die nicht eben die angenommene Abscissenlinie zu sein braucht) genau übereinstimmt.

Die einfache Beziehung zwischen algebraischen Gleichungen höherer Grade und ihrer Construction durch Abscissen und Ordinaten gewährt ein sehr taugliches Mittel, die Gränzen der Wurzeln (§. 193.) dadurch zu bestimmen, daß man die gegebene Gleichung f (x) = 0 als f (x) = X betrachtet, für x die Reihe der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . . positiv und negativ genommen (nöthigenfalls auch gebrochene Zahlen) substituirt, und die daraus entspringenden Werthe X_1, X_2, X_3 . . . . als Ordinaten auf einer eingetheilten Abscissenlinie in paralleler Lage und der gehörigen Richtung abträgt, um die Endpunkte derselben durch einen continuirlichen Zug zu verbinden. Denn da, wo zwei successive Ordinaten, QN und RL (Fig. 142.) nach verschiedenen Richtungen abgetragen sind, weil die Substitution benachbarter Zahlen verschieden bezeichnete Werthe für y gab, ist offenbar der eine Werth von x zu hoch, der andere zu niedrig angenommen, und derjenige, welcher y annulliren würde (eine reelle Wurzel) zwischen beiden enthalten. Es können sogar mehre Wurzeln zwischen zwei solchen Gränzen, z. B. den zu QN und IH gehörigen Abscissen, liegen, aber jedenfalls nur in ungerader Anzahl. Denn ein zwischen den Endpunkten N und H zwei entgegengesetzter Ordinaten mehrfach gebogener Zug kann im Allgemeinen eine gerade AX nur in 1, 3, 5, 7 . . . . Punkten, nicht aber in 2, 4, 6 . . . . durchschneiden. Sollte eine Biegung die Gerade wie in S nur berühren, so stellt die Abscisse AS zwei gleiche Wurzeln der Gleichung dar; und bleibt gar ein Abstand zwischen beiden, wie PM, so ist das ein Merkmal von der Anwesenheit imaginärer Wurzeln. Wo dergleichen vorhanden sind, kann sogar binnen gewissen Gränzwerthen von x die Curve gänzlich aufhören und in getrennten Zügen zum Vorschein kommen.

Sollte eine algebraische Gleichung F (x, y) = 0 durch Multiplication anderer f (x, y) = 0, φ (x, y) = 0 . . . . entstanden oder in dieselben zerlegbar sein, so stellt sie keine zusammenhängende Curve, sondern vielmehr getrennte Linien dar, wovon jede einzelne einer der erzeugenden Gleichungen angehört.

§. 340. Anwendungen. I. Sei, um die vorstehende allgemeine Betrachtung durch Beispiele zu erläutern, zunächst zur Construction einer Curve der zweiten Ordnung die Gleichung $(y-3)^2+(x-2)^2=16$, oder $y=3\pm\sqrt{16-(x-2)^2}$ gegeben, so hat man bei verschiedenen Substitutionen für x folgende correspondirende Werthe.

$x = -3$;	$y = 3 \pm 3\sqrt{-1}$,	also $=$ i	und i.
-2;	$\ldots 3 \pm 0$	$\ldots + 3{,}00$	$\ldots + 3{,}00$
-1;	$\ldots 3 \pm \sqrt{7}$	$\ldots + 5{,}64$	$\ldots + 0{,}36$
0;	$\ldots 3 \pm \sqrt{12}$	$\ldots + 6{,}46$	$\ldots - 0{,}46$
$+1$;	$\ldots 3 \pm \sqrt{15}$	$\ldots + 6{,}87$	$\ldots - 0{,}87$
$+2$;	$\ldots 3 \pm 4$	$\ldots + 7{,}00$	$\ldots - 1{,}00$
$+3$;	$\ldots 3 \pm \sqrt{15}$	$\ldots + 6{,}87$	$\ldots - 0{,}87$
$+4$;	$\ldots 3 \pm \sqrt{12}$	$\ldots + 6{,}46$	$\ldots - 0{,}46$
$+5$;	$\ldots 3 \pm \sqrt{7}$	$\ldots + 5{,}64$	$\ldots + 0{,}36$
$+6$;	$\ldots 3 \pm 0$	$\ldots + 3{,}00$	$\ldots + 3{,}00$
$+7$;	$\ldots 3 \pm 3\sqrt{-1}$,	$\ldots$ i	$\ldots$ i.

Die entgegengesetzten Zeichen der benachbarten Ordinaten für $x = 0$ und -1, sowie für $x = 4$ und 5 geben zu erkennen, daß zwischen den Gränzen, worin die zwei Wurzeln von $3 \pm \sqrt{16 - (x-2)^2} = 0$ enthalten sind, also etwa in Q, O (Fig. 143.) die Curve von der Abscissenlinie geschnitten wird. Der Ordinaten sind zwei für jede Abscisse vorhanden, und augenscheinlich entsprechen die für $x = -2$ und $+6$ zwei Wendepunkten K, L, jenseits welcher für niedrigere und höhere Werthe von x nur imaginäre Werthe für **M** gefunden werden. Das Maximum erreichen die Ordinaten, wenn $x = +2$, und da sie von hier nach beiden Wendepunkten gleichmäßig abnehmen, muß die Curve nothwendig symmetrisch und geschlossen sein. In der That ist die gegebene Gleichung nur ein besonderer Fall der allgemeinen Form $(y - a)^2 + (x - b)^2 = r^2$ (nach der Zeichnung: $MN^2 + CN^2 = CM^2$), wodurch die Kreislinie algebraisch dargestellt wird.

II. Als zweites Beispiel diene die Construction einer Curve der dritten Ordnung nach der Gleichung $y^2 - 4xy = x^3 - 4x^2 - 10x - 8$, welche sich in

$$(y - 2x)^2 = x^3 - 10x - 8 \text{ oder } y = 2x \pm \sqrt{x^3 - 10x - 8}$$

umgestalten läßt. Hier erhält man die correspondirenden Werthe:

$x = -3$;	$y = $ i		
-2;	$\ldots - 4 \pm \sqrt{4}$	d. i. $= - 2{,}00$	und $- 6{,}00$
-1;	$\ldots - 2 \pm \sqrt{1}$,	$\ldots - 1{,}00$	und $- 3{,}00$
$\pm 0, +1, +2, +3$;	$y = $ i.		
$+4$;	$\ldots + 8 \pm \sqrt{16}$,	$\ldots + 12{,}00$	$\ldots + 4{,}00$
$+5$;	$\ldots + 10 \pm \sqrt{67}$,	$\ldots + 18{,}18$	$\ldots + 1{,}82$
$+6$;	$\ldots + 12 \pm \sqrt{148}$,	$\ldots + 24{,}16$	$\ldots - 0{,}16$

(Fig. 144.) Es ergiebt sich hier nur eine einzige Intersection der Curve mit der Abscissenlinie zwischen $x = 5$ und 6, also auch nur eine reelle Wurzel der cubischen Gleichung

$$2x + \sqrt{x^3 - 10x - 8} = 0 \text{ oder } x^3 - 4x^2 - 10x - 8 = 0;$$

den beiden imaginären entspricht das nicht geschnittene Stück **CD** der Curve, deren anderer Theil **MS** in's Unendliche sich erstreckt. Drei Intersectionen würde man durch ein paralleles Verschieben der Abscissenachse um —2 erhalten, wodurch sie die Lage **BT** annimmt. Führt man dieser Vorstellung gemäß neue Ordinaten u in die Gleichung ein, indem man $y = u - 2$ setzt, so wird sie:

$$u = 2x + 2 \pm \sqrt{x^3 - 10x - 8},$$

also jeder der obigen Ordinatenwerthe um 2 erhöhet, wodurch sich sogleich $x = -2$ als Wurzel ergiebt; die beiden andern fallen zwischen $x = (0$ und $-1)$ und $x = (6$ und $7)$. Diesen Werthen entsprechen die Punkte **C**, **E**, **S**.

III. Ferner möge eine Curve der vierten Ordnung nach der Gleichung $y^4 - 96y^2 - x^4 + 100x^2 = 0$ construirt werden, welche nach der Auflösung quadratischer Gleichungen folgende vier Wurzeln giebt:

$$(1)\ y = +\sqrt{48 + \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)}}$$
$$(2)\ y = +\sqrt{48 - \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)}}$$
$$(3)\ y = -\sqrt{48 + \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)}}$$
$$(4)\ y = -\sqrt{48 - \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)}}.$$

Durch Substitution der gewöhnlichen Zahlenfolge erhält man hierdurch folgende correspondirende Werthe der Coordinaten:

x = 0;	y = (1) + 9,79	(2) 0,00	(3) — 9,79	(4) 0,00
± 1;	+ 9,74	+ 1,02	— 9,74	— 1,02
± 2;	+ 9,58	+ 2,04	— 9,58	— 2,04
± 3;	+ 9,30	+ 3,07	— 9,30	— 3,07
± 4;	+ 8,88	+ 4,12	— 8,88	— 4,12
± 5;	+ 8,28	+ 5,22	— 8,28	— 5,22
± 6;	+ 6,92	+ 6,92	— 6,92	— 6,92
± 7;	i	i	i	i
± 8;	+ 6,92	+ 6,92	— 6,92	— 6,92
± 9;	+ 8,69	+ 4,51	— 8,69	— 4,51
± 10;	+ 9,79	0	— 9,79	0
± 11;	+ 10,84	i	— 10,84	i
± 12;	+ 11,85	i	— 11,85	i

Die vier reellen Wurzeln der Gleichung ergeben sich aus den Intersectionen für $x = 0$ und ± 10 als 0, +10, 0 und —10. Für $x = \pm 6$ und ± 8 erhält man doppelte (gleiche) Ordinaten (Fig. 145.), also Wendepunkte der Curve, welche zwischen diesen Gränzen ganz aufhört; übrigens aber wegen ihrer entgegengesetzten gleichen Ordinaten zu beiden Seiten der Abscissenlinie einen völlig symmetrischen Lauf nehmen muß. Die ausgeführte Construction zeigt, daß sie aus drei getrennten Stücken besteht: einer geschlossenen Curve **AML**, deren Zweige in sich zurücklaufen und im Anfangspunkte **A** einen

Knoten bilden, und zwei Stücken, CB und NR, die ihre Zweige in's Unendliche ausdehnen. Diese Symmetrie im Laufe der Curve ließ sich nach der Form der Gleichung, welche ihr zum Grunde liegt, schon voraussehen.

IV. Zum Schlusse mag noch die Gleichung

$$y^4 + (4 + x)y^3 - 6xy^2 - 2(4x - x^2)y + 8x^2 = 0,$$

welcher eine Curve des vierten Grades anzugehören scheint, ein Beispiel jener complexen Curven geben, die aus mehren Linien zusammengesetzt sind. Die vorstehende Gleichung ist nämlich die Entwickelung der einfacheren

$$(y^2 - 2x)\ (y - x)\ (y + 4) = 0,$$

welcher die vier Wurzeln $y = x$, -4, $+\sqrt{2x}$ und $-\sqrt{2x}$ genügen. Nun stellt aber $y - x = n$ eine gerade Linie AL (Fig. 146.) dar, die den Anfangspunkt der Coordinaten durchschneidet und mit der Abscissenlinie einen Winkel $\alpha = \frac{1}{2}R$ bildet, ferner $y = -4$ eine mit dieser parallele Gerade IH, und $y = \pm\sqrt{2x}$ eine Curve AM, die von dem Anfangspunkte nach der positiven Seite der Abscissen zwei unendliche Zweige ober- und unterhalb ausbreitet, so daß die gegebene Gleichung drei unzusammenhängende Linien, zwei der ersten und eine der zweiten Ordnung in sich vereinigt.

§. 341. Curven zweiter Ordnung. Die allgemeinste Form einer algebraischen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen, also der umfassende Ausdruck aller Curven der zweiten Ordnung ist:

$$Au^2 + But + Ct^2 + Du + Et + F = 0 \quad \ldots\ (1)$$

oder, auf die Gestalt $u = f(t)$ gebracht: $u = -\left(\frac{Bt + D}{2A}\right)$

$$\pm\sqrt{\left[\left(\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right)t^2 + \left(\frac{BD - 2AE}{2A^2}\right)t + \left(\frac{D^2 - 4AF}{4A^2}\right)\right]}$$

in kürzerer Andeutung.

$$u = (at + b) \pm \sqrt{(pt^2 + qt + r)} \quad \ldots\ldots\ (2)$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks von u stellt (nach §. 333.) die Ordinaten einer geraden Linie dar, zu deren beiden Seiten nach Andeutung des zweiten Theils Ordinaten von gleicher Länge abgetragen werden sollen, deren Endpunkte der Curve angehören. Mithin bestimmt der erste Theil nur die Lage gegen die Abscissenachse, der zweite Theil aber ihre Gestalt. Da nun für die Untersuchung der Curve diese allein von Wichtigkeit ist und jene dabei nur in sofern in Betracht kommt, als man zu ihrer Erleichterung die einfachste und bequemste Lage vorzuziehen hat, so erscheint es im vorliegenden Falle sehr zweckmäßig, die durch die Ordinaten $(at + b) = PT$ dargestellte gerade Linie RP (Fig. 147.) als Abscissenachse zu betrachten. Die Frage, in welchen Punkten diese Linie etwa von der Curve ge-

schnitten werde, beantwortet sich dadurch, daß wir den Wurzelausdruck in diesem besondern Falle als verschwindend ansehen, oder $pt^2 + qt + r = 0$ setzen, woraus sich im Allgemeinen ein doppelter Werth für t ergiebt. Demnach findet man zwei Punkte **A** und **D** (oder **X**) auf der Linie **RP**, die als Scheitelpunkte der Curve angesehen werden dürfen. Nimmt man nun statt **C** den neuen Anfangspunkt der Coordinaten in einem dieser Punkte, z. B. in **A** an, und bezeichnet den Abstand **AG** durch n, so hat man zur Umgestaltung des Ausdrucks (2) die Gleichungen;

$$MT - PT = MP, \text{ d. i. } u - (at + b) = y.$$

$$CQ : CT = \sin CTQ : \sin CQT \text{ (oder } QCU),$$

$$\text{d. i. } (x + n) : t = \sin \beta : \sin (\beta - \alpha).$$

$$\text{Also } t = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \beta} (x + n) \text{ oder } = k\ (x + n).$$

Durch Einführung dieser Werthe erhält man:

$$y = \sqrt{pk^2\ (x + n)^2 + qk\,(x + n) + r} \quad \ldots . \; (3)$$

oder einfacher, wenn man nach x ordnet und erwägt, daß bei der Beziehung auf den Scheitelpunkt **A**, wofür x und y zugleich verschwinden, das von x freie Glied unter dem Wurzelzeichen = 0 sein muß:

$$y = \sqrt{(gx^2 + fx)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \; (4)$$

worin die Coefficienten g, f, als abhängig von denen des allgemeinen Ausdrucks (1) und den Winkeln α und β, jedes beliebigen Werthes fähig, also positive und negative Zahlen, oder auch Null sein können.

§. 342. Arten der Curven zweiter Ordnung. In der vorstehenden Gleichung, als der einfachsten allgemeinen Darstellung der Curven zweiter Ordnung, erkennt man bei näherer Betrachtung dreierlei Arten derselben, die durch ihre Charaktere sich wesentlich von einander unterscheiden.

I. Es sei zunächst $g = 0$, so reducirt sich die Gleichung auf $y = \sqrt{fx}$ nnd stellt eine krumme Linie dar, die (wie **MAm**) mit zwei symmetrischen Zweigen auf der positiven Seite der Abscissen sich in's Unendliche erstreckt, während für negative Abscissen die Ordinaten unmöglich werden. Hierin besteht der Charakter der ersten Curven-Art zweiter Ordnung.

II. Werde ferner g negativ angenommen, so deutet die Gleichung $y = \sqrt{(fx - gx^2)}$ auf eine Curve, deren nach der positiven Abscissenseite symmetrisch fortlaufende Schenkel sich dann schließen, wenn bei dem zunehmenden Werthe von x endlich $fx - gx^2 = 0$ oder $x = \frac{f}{g}$ geworden ist. Da für größere und für negative Werthe von x diejenigen von y imaginär werden, so bildet die Curve

eine geschlossene Figur zwischen dem Anfangspunkt der Coordinaten und einem zweiten Punkt der Abscissenlinie, welcher von jenem um die Abscisse $+\frac{f}{g}$ entfernt ist, wie ANX. Diese Eigenschaft charakterisirt im Allgemeinen die zweite Art der Curven zweiter Ordnung.

III. Sei endlich g eine positive Zahl, so giebt der Ausdruck $y = \sqrt{(fx + gx^2)}$ zu erkennen, daß die Curve sowohl für negative, als auch für positive Werthe von x vorhanden sei und die Abscissenlinie außer in dem Anfangspunkte noch da in einem zweiten Punkte durchschneide, wo $x = -\frac{f}{g}$ geworden, d. h. auf der negativen Seite. Für solche negative Werthe von x, wobei fx das Glied gx^2 übersteigt, findet man nur imaginäre Werthe von y, also keine Ordinaten der Curve. Diese erstreckt sich folglich von den beiden Durchschnittspunkten aus nach entgegengesetzten Seiten, und zwar (wegen der mit x unaufhörlich wachsenden Ordinaten) mit unbegränzten Zweigen, so daß sie aus zwei getrennten Stücken besteht, wie AM und DE; und hierin finden wir das wesentliche Merkmal der dritten Art von Curven zweiter Ordnung.

Das nachfolgende Capitel wird zeigen, wie man durch rein geometrische Vorstellungen zu den hier algebraisch abgeleiteten und nur im Allgemeinen charakterisirten drei Arten von Curven gelangt, und die Eigenthümlichkeiten jeder einzelnen näher entwickeln.

§. 343. Aufgaben.

1. Eine Curve nach der Gleichung $y = 7x^3 - 5x^2 + 3x - 10$ zu construiren.
2. Desgl. nach der Gleichung $y = x^4 - 3x^3 + 8x - 18$.
3. Die Durchschnittspunkte der Abscissenachse und einer Curve zu bestimmen, wenn die Gleichung $y = x^4 - 2x^3 - 49x^2 - 22x + 240$ ist.
4. Desgl. für eine Curve von der Gleichung $y = x^6 + 6x^3 + 20x - 50$.
5. Desgl. für eine Curve von der Gleichung
$$y = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 20x - 1.$$
6. Man construire eine Curve von der Gleichung
$$(2y - x)(y + 3x)(4y^2 - 3x) = 0.$$
7. Eben so von der Gleichung $y^2 - 16x = 0$.
8. Eben so von der Gleichung $y^2 = 10x = 2x^2$.
9. Eben so von der Gleichung $y^2 - 8x^2 = 48x$.
10. Eben so von der Gleichung $y = \frac{2}{3}x + 4 \pm \sqrt{20x}$.
11. Die Durchschnittspunkte eines Kreises und einer geraden Linie analytisch zu bestimmen, wenn deren Gleichungen folgende sind:

$$(1)\ x^2 + y^2 = r^2; \qquad (2)\ y = ax + b.$$

Substituirt man den Werth von y^2 aus (2) in die Gleichung (1), so erhält man durch Auflösung derselben folgenden Ausdruck:

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{r^2\,(1+a^2) - b^2}}{1+a^2},$$

also im Allgemeinen zwei verschiedene Abscissen, deren zugehörige Ordinaten aus (2) sich ergeben. Sollte $r^2\,(1+a^2) - b^2 = 0$ sein, d. h. $r : b = b : \sqrt{(1+a^2)}$, so ist nur eine Abscisse, also nur ein gemeinschaftlicher Punkt des Kreises und der Geraden vorhanden, d. h. sie berühren einander. Falls endlich $b^2 > r^2\,(1+a^2)$, so wird der Ausdruck der Coordinaten x, y imaginär oder beide Linien treffen einander nicht.

12. Die Gleichung für die gemeinschaftliche Secante zweier Kreise zu finden, ausgedrückt durch:

$$(1)\ (y-p)^2 + (x-q)^2 = r^2:$$
$$(2)\ (y-p')^2 + (x-q')^2 = r'^2.$$

Durch Subtraction der Entwicklung beider Gleichungen findet man:

$$2(p'-p)y + 2(q'-q)x + (p^2 - p'^2) + (q^2 - q'^2) = r^2 - r'^2,$$

also $y = \left(\frac{q'-q}{p-p'}\right) x + \left(\frac{r'^2 - r^2 + p^2 - p'^2 + q^2 - q'^2}{2\,(p-p')}\right)$

als Gleichung der gesuchten geraden Linie, welche indessen unzulässig erscheint, wenn man $p = p'$ und $q = q'$, d. h. die Kreise concentrisch annimmt.

Drittes Capitel.

Die Kegelschnitte.

§. 344. Erklärungen. Denkt man sich die Oberfläche eines Kegels KCD (Fig. 148.) durch Drehung einer unbegränzten geraden Linie KD um eine andere KO unter dem constanten Winkel DKO gebildet und die Achse KO von einer beliebigen Ebene geschnitten, so sind folgende Fälle möglich:

I. Die Ebene schneide die Achse des Kegels in dessen Scheitel K und zwar:

1) unter einem Winkel > DKO, so haben Ebene und Kegelfläche nur den Punkt K gemein;
2) unter einem Winkel = DKO, so berührt die Ebene diese Oberfläche in einer geraden Linie;

3) unter einem Winkel $<$ DKO, so bildet der Schnitt der Kegeloberfläche zwei gerade Linien.

II. Die Ebene schneide die Achse des Kegels außer dessen Scheitel K und zwar:

1) unter einem Winkel $>$ DKO, so bildet der Durchschnitt eine Ellipse AMBm, oder falls die Ebene des Kegels Achse rechtwinklig durchschneiden sollte (nach §. 305, L. 1.) einen Kreis CMDm (Fig. 152.);

2) unter einem Winkel $=$ DKO, so entsteht die Figur der Parabel MAm (Fig. 148.);

3) unter einem Winkel $<$ DKO, so wird die Kegelfläche (mit Einschluß ihrer Erweiterung über den Scheitel hinaus) in einer doppelten Curve, der Hyperbel, geschnitten. (Fig. 155.)

§. 345. Gleichung der Parabel. Um vermöge der Beziehung rechtwinkliger Coordinaten die Parabel in einer Gleichung zwischen x und y darzustellen, denke man sich die Durchschnittsebene AMm (Fig 148.) von einer senkrechten CKD, und beide wiederum von einer, zur Achse des Kegels senkrechten, Ebene CMD geschnitten. Der Durchschnitt der letzten ist (nach §. 305, L. 1.) ein Kreis und die Linie Mm (nach §. 291, L. 4) eine Senkrechte auf AP und CD. Folglich hat man:

$$(1)\ CP : PM = PM : PD \text{ oder } CP \,.\, PD = PM^2.$$

$$(2)\ AP : CP = KB : AB \text{ oder } AP \,.\, AB = CP \,.\, KB.$$

und hieraus (3) $PM^2 = \frac{AB\ .\ PD}{KB} \,.\, AP = \frac{AB^2}{AK} \,.\, AP$

d. i. wenn $AP = x$, $PM = y$ und $\frac{AB^2}{AK} = p$ gesetzt wird:

$$(4)\ y^2 = px \text{ oder } y = \sqrt{px},$$

worin wir den Ausdruck der einfachsten Art von Curven der zweiten Ordnung (§. 342, I.) erkennen. Der als dritte Proportionale zu AK und AB, von der Größe des Scheitelwinkels AKB und dem Abstande AK des Scheitelpunkts der Curve von der Spitze des Kegels abhängige, constante Werth wird der Parameter der Parabel genannt, und kann leicht als Linie construirt werden. In Function des Winkels $AKB = \alpha$ findet man:

$$p = \frac{AB^2}{AK} = 4 \,.\, AK \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

§. 346. Allgemeine Eigenschaften der Parabel. Die geometrische Deutung der oben entwickelten Gleichung $y = \sqrt{px}$ läßt uns folgende Eigenschaften der Parabel erkennen.

1. (Fig. 149.) Da der Parameter p in Folge der Proportion $p : AB = AB : AK$, worin AB, AK die Werthe zweier Linien

(Fig. 148.) bezeichnen, nothwendig eine positive Zahl ist, so sind negative Werthe der Abscissen x nicht zulässig, also alle Punkte der Curve nur auf der positiven Seite vom Anfangspunkte A vorhanden.

2. Mit den Abscissen AP, AP' . . . . wachsen auch die Ordinaten PM, P'M' . . . . in's Unendliche, folglich gehört die Parabel zu den unbegränzten Curven.

3. Die Ordinaten wachsen, wie die Quadratwurzeln der Abscissen, also immer unbedeutender, je größer man die Werthe von x annimmt. Die Schenkel der Parabel AMR, ANS biegen sich mithin unaufhörlich gegen die Abscissenachse AX.

4. Für jede positive Abscisse AP sind zwei Ordinaten PM und PN von gleicher Länge aber entgegengesetzter Lage vorhanden, wonach die Parabel sich zu beiden Seiten der Achse völlig symmetrisch erstreckt, also von dieser halbirt wird.

5. Für die Abscisse $AF = \frac{1}{4}p$ ist die Ordinate $FD = \frac{1}{2}p$ also ihre doppelte Länge DE der Parameter.

Anmerkung. Dieser Punkt F der Achse heißt der Brennpunkt der Parabel, und jede von ihm nach dem Umfange der Curve gezogene Gerade FM Radius vector oder Brennstrahl.

6. Der Brennstrahl $z = FM$ in irgend einem Punkte M der Parabel ist der, um $\frac{1}{4}p$ vermehrten Abscisse desselben gleich. Denn aus $z^2 = y^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2 = px + (x - \frac{1}{4}p)^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ folgt $z = x + \frac{1}{4}p$.

§. 347. Coordinaten-Transformation.

I. (Fig. 138.) Wählt man statt der anfänglichen rechtwinkligen Coordinatenachsen HX, HY andere denselben parallele AT, AU, und den neuen Anfangspunkt A der Coordinaten ebenfalls in der Parabel, so ist (nach §. 335, I.):

$$(1)\; x = t + f; \qquad (2)\; y = u + g.$$

Die Substitution dieser Werthe giebt der Gleichung der Parabel, $y^2 = px$, die Gestalt $(u + g)^2 = p\,(t + f)$, welche sich, wenn man in der Entwickelung $pf - g^2 = 0$ setzt, weil die Parabel durch den neuen Anfangspunkt A gehen soll, also für $t = 0$ auch $u = 0$ werden muß, noch vereinfacht auf:

$$t = \frac{2gu + u^2}{p},$$

II. (Fig. 140.) Denkt man sich hingegen die rechtwinkligen Coordinaten in schiefwinklige verwandelt, so daß die neuen Coordinatenachsen mit der bisherigen Abscissenlinie die Winkel α und β bilden, und verlegt zugleich den Anfangspunkt von dem Scheitel H nach irgend einem Punkte A der Parabel, so ist (nach §. 335, III.)

$$(1)\; x = t \cos\alpha + u \cos\beta + f; \;(2)\; y = t \sin\alpha + u \sin\beta + g,$$

und nach Substitution dieser Werthe in $y^2 = px$ die neue Gleichung der Curve:

$$\left.\begin{array}{l} u^2 \sin\beta^2 + 2ut \sin\alpha \sin\beta + t^2 \sin\alpha^2 + g^2 - fp \\ + (2g \sin\beta - p\cos\beta)\, u + (2g \sin\alpha - p \cos\alpha)\, t \end{array}\right\} = 0.$$

Damit nun die neue Abscissenlinie AT, wie die vorige, die Parabel so durchschneide, daß zu beiden Seiten derselben gleiche Ordinaten liegen oder AT ein Durchmesser derselben sei, dürfen wir nur die vorliegende Gleichung auf die einfache Form $u = \pm\sqrt{kt}$ bringen.

Dies geschieht dadurch, daß man

$$(1)\ \sin\alpha . \sin\beta = 0,\ (2)\ \sin\alpha^2 = 0,\ (3)\ g^2 - pf = 0$$
$$\text{und } (4)\ 2g \sin\beta - p\cos\beta = 0$$

setzt, weil dann alle Mittelglieder verschwinden, $\alpha = 0$ und $\cos\alpha = 1$ wird, also nur

$$u^2 = \frac{p}{\sin\beta^2} t$$

als neue Gleichung übrig bleibt. Aus der Bedingungsgleichung $\alpha = 0$, die sich aus (1) und (2) ergiebt, folgt nun zunächst, daß jener sogenannte Durchmesser AT der Parabel ihrer Achse HX parallel sein müsse; die Gleichung (3) bestimmt die Lage des neuen Anfangspunktes A für die Abscisse f oder Ordinate g und aus (4) $\operatorname{tg}\beta = \frac{p}{2g}$ ergiebt sich der Winkel, um welchen die neuen Ordinaten gegen die Achse HX oder den Durchmesser AT geneigt sein müssen, wenn sie zu beiden Seiten gleiche Länge erhalten sollen. Auf ein solches schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen, erscheint die Parabel in Fig. 150, wo AQ oder DO als Durchmesser der Curve gewählt sind.

§. 348. Gleichung der Ellipse. (Fig. 152.) Um die Ellipse vermittelst rechtwinkliger Coordinaten durch x und y auszudrücken, denke man sich die Durchschnittsebene AMB von der senkrechten Ebene GKB, und beide wiederum von einer, zur Achse des Kegels senkrechten Ebene CMD geschnitten. Der dadurch entstehende Kreis und AMB schneiden einander in der auf AB senkrecht stehenden Linie MP. Nun ist aber

$$(1)\ CP : PM = PM : PD \text{ oder } CP . PD = PM^2;$$

$$(2)\ AP : PC = AB : BG \text{ oder } PC = \frac{AP . BG}{AB};$$

$$(3)\ BP : PD = AB : AF, \text{ oder } PD = \frac{BP . AF}{AB};$$

also $(4)\ PM^2 = \left(\frac{AP . BG}{AB}\right)\left(\frac{BP . AF}{AB}\right) = \left(\frac{AF . BG}{AB}\right)\left(\frac{AP . BP}{AB}\right)$

Wird aber $AB = 2a$, $AP = x$, $PM = y$, und $\left(\frac{AF . BG}{AB}\right) = p$ gesetzt, so erhält man

$$(5)\ y^2 = p \cdot \frac{x\,(2a - x)}{2a} = px - \frac{p}{2a}x^2,$$

also eine Gleichung von derjenigen Form, wodurch überhaupt die zweite Art der Curven zweiter Ordnung (nach §. 342, II.) charakterisirt wird. Der als vierte Proportionale zu AB, BG und AF von dem Scheitelwinkel GKB und der Länge der beiden Schenkel KA, KB abhängige Werth p wird der Parameter der Ellipse genannt. Man kann ihn entweder als Linie construiren oder berechnen nach der Gleichung:

$$p = \frac{BG \,.\, AF}{AB} = \frac{AK \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, BK \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha}{AB}$$

$$= \frac{4 \,.\, AK \,.\, BK}{AB} \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

§. 349. Allgemeine Eigenschaften der Ellipse. Aus der Bedeutung der Veränderlichen x und y in der Gleichung der Ellipse $y = \sqrt{\left(px - \frac{p}{2a}x^2\right)}$ ergeben sich folgende Eigenschaften dieser Curve:

1. (Fig. 153.) Da der Parameter p in Folge der Proportion $p : AF = BG : AB$ (Fig. 152.) eine positive Zahl ist, so sind negative Abscissen x unzulässig, also sämmtliche Punkte der Curve nur auf der positiven Seite vorhanden.

2. Mit den Abscissen $x = AV$, AK . . . . entstehen und ändern sich auch die Ordinaten VH, KO . . . ., verschwinden aber wiederum, wenn $x = 2a$, d. i. $= AB$ geworden ist, weil für $px - \frac{p}{2a}x^2 = 0$ sowohl $x = 0$, als $x = 2a$ sein kann. Die Ellipse ist mithin eine geschlossene Curve.

3. Denkt man sich den Durchmesser AB der Ellipse in's Unendliche wachsend, so nähert sich der Bruch $\frac{p}{2a}$ immer mehr dem Werthe Null und y^2 dem Werthe px, die Gestalt der Ellipse mithin (nach §. 345.) derjenigen der Parabel.

4. Für jede positive Abscisse AP giebt es zwei Ordinaten PM, Pm, von gleicher Länge, aber entgegengesetzter Lage, wonach die Ellipse zu beiden Seiten der Achse einen symmetrischen Lauf nimmt, also von dieser halbirt wird.

Anmerkung. Der Mittelpunkt der Achse AB ist auch Mittelpunkt der Ellipse und jede durch ihn gezogene gerade Linie LM ein Durchmesser derselben. Der senkrecht durch C gezogene Durchmesser DE heißt zur Unterscheidung von der Hauptachse AB die Nebenachse der Ellipse. Werde diese mit 2b bezeichnet, so findet man durch Substitution von $x = AC = a$ und $y = CD = b$ in der Gleichung der Ellipse $b^2 = \frac{1}{2}ap$ oder $a : b = b : \frac{1}{2}p$, wodurch sich dieselbe in $y^2 =$

$\frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ umformen läßt und dann statt des Parameters die Nebenachse enthält.

5. Man erhält eine dem halben Parameter gleiche Ordinate FN, wenn man die Länge AC oder CB aus D auf der Hauptachse AB abträgt; denn da (nach der vorstehenden Anmerkung) $p = \frac{2b^2}{a}$ so wird durch Substitution dieses Werthes die Gleichung der Ellipse für die Ordinate $y = \frac{1}{2}p$:

$$y^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2 = \frac{b^4}{a^2} = px - \frac{p}{2a}x^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

woraus sich der Werth $x = a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}$, d. i.

$$= AC \pm \sqrt{(DF^2 - CD^2)},$$ oder $x = AF$ und $= AG$ ergiebt.

Anmerkung. Die beiden Punkte F und G heißen Brennpunkte, jede von ihnen nach einem Punkte des Umfangs geführte Gerade FM oder GM ein Brennstrahl (Radius vector) und der Abstand CF = CG der Brennpunkte vom Mittelpunkte die Excentricität der Ellipse.

6. Die Ellipse geht in den Kreis über, sobald die Nebenachse der Hauptachse gleich angenommen wird. Denn es ist alsdann:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) = 2ax - x^2, \text{ oder } x : y = y : 2a - x,$$

worin man die Eigenschaft der Kreislinie erkennt.

§. 350. Coordinaten-Transformation.

1. (Fig. 153.) Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Ellipse, so ist die Abscisse $AP = AC + CP$ oder $x = a + t$, während die Ordinaten unverändert bleiben, also wird die Gleichung der Curve:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}[2a(a + t) - (a + t)^2] = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - t^2),$$

$$\text{oder } a^2y^2 + b^2t^2 = a^2b^2.$$

Aus dieser einfachen Form ihrer Gleichung läßt sich nun die wichtige Eigenschaft der Ellipse nachweisen; daß die Summe zwei zusammengehöriger Brennstrahlen (FM + MG) stets der Hauptachse AB gleich ist. Man hat nämlich:

$$(1)\ FM^2 = y^2 + PF^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - t^2) + (\sqrt{a^2 - b^2} - t)^2;$$

$$(2)\ GM^2 = y^2 + PG^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - t^2) + (\sqrt{a^2 - b^2} + t)^2;$$

und daraus

$$(3)\ FM = \sqrt{a^2 - 2\sqrt{(a^2 - b^2)}\,t + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)t^2}$$

$$= a - \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)}\,t;$$

$$(4)\ GM = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{(a^2 - b^2)}\,t + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)t^2}$$
$$= a + \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)}\,t;$$
also $FM + GM = 2a = AB$.

II. (Fig. 154.) Denkt man sich die rechtwinkligen Coordinaten der Ellipse in schiefwinklige übergehend, aber den Mittelpunkt wiederum als Anfangspunkt derselben, so sind (nach §. 335, III.) die Werthe

$$x = t \cos\alpha + u \cos\beta \text{ und } y = t \sin\alpha + u \sin\beta$$

in $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ oder $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ zu substituiren, und diese Gleichung wird dadurch:

$$\left\{\begin{matrix} (a^2 \sin\beta^2 + b^2 \cos\beta^2)u^2 + (a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2)t^2 \\ + 2(a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha\cos\beta)ut \end{matrix}\right\} = a^2 b^2.$$

Sollen nun die neuen Coordinaten eben so, wie die vorigen, einander gegenseitig halbiren und dadurch ebenfalls zu Durchmessern der Ellipse werden, so muß auch die vorstehende Gleichung eine solche Gestalt annehmen, daß man allgemein $u = \pm\sqrt{f(t)}$ und $t = \pm\sqrt{f(u)}$ finde. Dies kann aber nur geschehen, wenn der Coefficient von $ut = 0$ ist, eine Bedingung, welcher sich durch unzählige Annahmen für α und β genügen läßt, indem jeder beliebige Werth der einen Größe den zugehörigen der andern bestimmt. Es giebt also auch eine unbegränzte Menge von Coordinaten-Systemen solcher zusammengehöriger oder conjugirter Durchmesser der Ellipse, von welchen das rechtwinklige (wofür $\alpha = 0$ und $\beta = R$) nur als ein spezieller Fall anzusehen ist. Zieht man durch das Centrum der Ellipse eine willkürliche Gerade LM, so wird nach Obigem die Lage des conjugirten Durchmessers HK gegen CB durch die Gleichung

$$\tang\beta = -\frac{b^2}{a^2}\cot g\,\alpha \text{ bestimmt.}$$

§. 351. Gleichung der Hyperbel. (Fig. 155.) Denkt man sich durch die Achse KO eines Kegels DKC eine Durchschnittsebene MAm unter einem Winkel $<$ DKO und eine andere DMC senkrecht gelegt, beide aber von einer, auf ihrem Durchschnitt Mm senkrechten Ebene DKC geschnitten, so ist, weil hiernach die gemeinschaftliche Sehne der Hyperbel und des Kreises Mm, senkrecht auf AP und DC steht:

$$(1)\ CP : PM = PM : PD \text{ oder } CP \,.\, PD = PM^2.$$

$$(2)\ AP : PC = AB : BG \text{ oder } PC = \frac{AP \,.\, BG}{AB}.$$

also (4) $PM^2 = \left(\frac{AP \cdot BG}{AB}\right)\left(\frac{BP \cdot AF}{AB}\right) =$
$$\left(\frac{AF \cdot BG}{AB}\right)\left(\frac{AP \cdot BP}{AB}\right).$$

Setzt man $AB = 2a$, $AP = x$, $PM = y$ und $\frac{AF \cdot BG}{AB} = p$, so erhält man

$$(5)\ y^2 = p \cdot \frac{x(2a + x)}{2a} = px + \frac{p}{2a}x^2$$

als analytischen Ausdruck der Hyperbel. Diese Gleichung unterscheidet sich von derjenigen der Ellipse nur durch das Zeichen des zweiten Gliedes und stellt, (nach §. 342, III.) die dritte Art von Curven der zweiten Ordnung dar. Den constanten Werth p, Parameter der Hyperbel genannt, findet man geometrisch oder arithmetisch auf die nämliche Weise, wie bei der Ellipse (§. 348).

§. 352. Allgemeine Eigenschaften der Hyperbel. Die Gleichung $y = \pm\sqrt{\left(px + \frac{p}{2a}x^2\right)}$ giebt folgende Eigenschaften der Curve zu erkennen.

1. (Fig. 156.) Da a und p positive Zahlen sind, so giebt es für alle positive Abscissen AP auch reelle Ordinaten PM, für negative hingegen so lange nicht, als $\frac{p}{2a}x^2 < px$ oder $x < 2a$ angenommen wird. Ueberwiegt aber das Glied $\frac{p}{2a}x^2$, so erscheinen wieder für negative Abscissen AG reelle Ordinaten GN, wie groß man jene auch annehmen möge. Folglich besteht die Curve aus zwei getrennten Zweigen MAm und NBn.

2. Da mit positiven und negativen Werthen von x auch die zugehörigen der Ordinaten unaufhörlich wachsen, so bilden beide Zweige unbegränzte Curven.

Nimmt man die Linie $2a = AB$ unendlich groß an, so nähert sich $\frac{p}{2a}$ dem Werthe 0 und die Gleichung der Hyperbel (nach §. 345.) derjenigen der Parabel.

3. Die Ordinaten sind stets paarweise von gleicher Länge vorhanden, z. B. PM und Pm, GN und Gn; also nimmt die Curve zu beiden Seiten der Abscissenlinie einen symmetrischen Lauf.

Anmerkung. Man nennt die Linie AB die Hauptachse und ihren Mittelpunkt das Centrum der Hyperbel. Denkt man sich mit $AB = 2a$ und dem Parameter p eine Ellipse construirt, so darf jede Ordinate derselben in Bezug auf die Hyperbel als imaginär angesehen und die

halbe Nebenachse $CD = b\sqrt{-1}$ gesetzt werden. Für diesen Werth wird $x = -a$ und die Gleichung der Hyperbel: $-b^2 = -\frac{1}{2}ap$ oder $a : b = b : \frac{1}{2}p$; also allgemein, wenn man b für p einführt:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

5. Trägt man, wie in der Ellipse die Länge $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, wegen des Werthes $CD = b\sqrt{-1}$ hier die Länge $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ aus dem Centrum zu beiden Seiten ab, so sind die Ordinaten aus F und $G = \frac{1}{2}p$, wie sich ergiebt, wenn man $y^2 = (\frac{1}{2}p)^2 = \frac{b^4}{a^2} = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$ setzt, weil dann $x = -a \pm \sqrt{(a^2 + b^2)}$ gefunden wird.

Anmerkung. Die beiden Punkte F und G heißen auch hier Brennpunkte, und jede von ihnen nach einem Curvenpunkte gezogene Linie FM oder GM ein Brennstrahl (Radius vector).

6. Werden beide Achsen 2a und 2b gleich angenommen, so erhält man in $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) = 2ax + x^2$ die Gleichung der sogenannten gleichseitigen Hyperbel.

§. 353. Coordinaten-Transformation.

1. (Fig. 156.) Soll die Hyperbel auf ihr Centrum bezogen werden, so setze man $AP = CP - AC$ oder $x = t - a$, und es wird:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}[2a(t-a) + (t-a)^2] = \frac{b^2}{a^2}(t^2 - a^2),$$

$$\text{oder } a^2y^2 - b^2t^2 = a^2b^2.$$

Aus dieser Gleichung folgt die Eigenschaft der Hyperbel, daß der Unterschied zwei zusammengehöriger Brennstrahlen derselben stets ihrer Hauptachse gleich ist, durch die nämliche Ableitung der Werthe von FM und GM, wie in §. 350, I.

II. Für eine andere Coordinatenbeziehung der Hyperbel wählt man ihre Asymptoten zu Achsen. Werden nämlich in den Endpunkten der Hauptachse AB die Senkrechten AK, BH = b errichtet und CK und CH gezogen, so ist für eine beliebige Abscisse CP:

$$PR = \frac{b}{a}.x;\ PM = y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)},$$

$$\text{also } PR^2 - PM^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = b^2,$$

oder $(PR - PM)(PR + PM) = b^2$, und hieraus $MR = \frac{b^2}{Mr}$.

Da nun b eine constante, Mr hingegen eine veränderliche Größe ist, so nimmt bei fortgesetztem Wachsen der Abscissen der Abstand RM der Geraden von der Curve unaufhörlich ab, ohne jedoch jemals völlig verschwinden zu können; weil demnach CR nie die Hyperbel treffen kann, wird sie Asymptote derselben genannt.

Soll nun die Curve auf ihre Asymptoten CR und CU bezogen werden, so ist $MV = u$, $VC = t$ und

$OM : RM = CL : KL$, d. i. $t : RM = \sqrt{(a^2 + b^2)} : 2b$.

$VM : rM = CK : KL$, d. i. $u : rM = \sqrt{(a^2 + b^2)} : 2b$.

Folglich erhält der Ausdruck $MR . Mr = b^2$ die Gestalt

$$b^2 = \frac{2b . t}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \cdot \frac{2b . u}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{4b^2 . tu}{a^2 + b^2}$$

und die Gleichung der Hyperbel, auf ihre Asymptoten, bezogen ist:

$$u = \left(\frac{a^2 + b^2}{4t}\right).$$

§. 354. Aufgaben.

1. (Fig. 149.) Eine Parabel zu construiren, wenn ihr Parameter p gegeben ist.

I. Nach der Gleichung $y^2 = px$ oder $x : y = y : p$ schneide man eine beliebige Menge von Abscissen AP, AP' .... auf der beliebigen Geraden AX ab, errichte die Senkrechten PM, P'M'.... und beschreibe über jeder, um p vermehrten Abscisse (als Durchmesser) einen Kreis, so ist $AP : PM = PM : p$, also M ein Punkt der Parabel.

II. Man verlängere die Abscissenlinie AX um $AG = \frac{1}{4} p$, mache $AF = \frac{1}{4} p$ und beschreibe mit $GP = FM$ Kreisbogen aus dem Brennpunkte F, welche die Senkrechte PM in den Punkten M, N schneiden, so sind diese Punkte der Parabel. (§. 346, 6.).

2. (Fig. 151.) Zu zwei gegebenen Geraden p, q zwei mittlere Proportionalen zu construiren.

Aus der Gleichung $p : y = y : x = x : q$ folgen (1) $y^2 = px$ und (2) $x^2 = qy$ als Ausdrücke zweier Parabeln, die man aus einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte A auf den rechtwinkligen Coordinatenachsen AX und AY (nach Aufg .1) zu construiren hat. Dann ist für ihren Durchschnittspunkt M: (1) $PM^2 = p . AP$ und (2) $MQ^2 = q . AQ$. also $y = AQ$ und $x = AP$.

3. (Fig. 153.) Eine Ellipse zu construiren, wenn deren Achsen (2a, 2b) gegeben sind.

I. Zufolge der Gleichung $y = \frac{b}{a} \sqrt{(2ax - x^2)}$ beschreibe man über der Hauptachse AB einen Kreis, ziehe beliebige Ordinaten

VH′, KO′, PM′ . . . . und theile eine jede im Verhältniß b : a so sind H, O, M . . . . Punkte der Ellipse.

II. Man schneide eine Gerade AT durch eine Senkrechte DE mache CA und CB = a, CD und CE = b, und beschreibe aus D mit dem Radius a einen Kreisbogen, wodurch die Brennpunkte F, G gefunden werden. Dann zerlege man AB beliebig in zwei Stücke und construire mit diesen, als Seiten, über FG ein Dreieck FMG oder FmG, so sind M und m Punkte der Ellipse. (§. 350.)

4. (Fig. 156.) Eine Hyperbel zu construiren, wenn ihre beiden Achsen (2a, 2b) gegeben sind.

Man lege eine Gerade DE rechtwinklig durch eine andere GF, mache CA und CB = a, CD und CE = b, und trage den Abstand DA von C nach F und G ab, wodurch man die Brennpunkte erhält. Dann beschreibe man mit einer beliebigen Geraden FM = k aus F und mit einer andern GM = k + AB aus G Kreisbogen, so sind die Durchschnittspunkte M und m Punkte der Hyperbel. (§. 353t)

5. Eine Hyperbel zu construiren, wenn ihre Asymptoten und irgend ein Punkt M der Curve gegeben sind.

Man halbire den Asymptotenwinkel durch CP, ziehe durch M auf CP die Senkrechte Rr, und bestimme die Nebenachse b, so daß (nach §. 353, II.) MR : b = b : Mr sei. Dadurch findet man das Rechteck KLIH, also auch die Hauptachse AB = 2a, und demzufolge (nach Aufgabe 4) beliebig viele Punkte der Hyperbel.

6. Die Gleichung $y^2 = 20x$ einer bestimmten Parabel so umzuformen, daß die neuen Coordinaten u, t den Winkel von 45° mit einander bilden. (§. 347, II.)

7. Eben so die auf das Centrum bezogene Gleichung $y^2 = 24 - 38x^2$ einer bestimmten Ellipse, so daß die neue Abscissenachse mit der vorigen den Winkel von 30° bilde. (§. 350, II.)

8. Die Gleichung einer Ellipse, $y = \sqrt{(18x - 8x^2)}$, welche auf ihren Scheitelpunkt A bezogen ist, auf den Mittelpunkt C der Curve zu reduciren. (Fig. 153.)

9. Eben so die auf den Scheitelpunkt A bezogene Gleichung der Hyperbel: $y = \sqrt{(6x + 18x^2)}$. (Fig. 156.)

10. Aus der, auf ihren Scheitelpunkt bezogenen Gleichung der Hyperbel, $y^2 = 6x + 6x^2$ diejenigen zwischen ihren Asymptoten-Coordinaten abzuleiten.

11. Aus den Gleichungen einer Parabel und einer Geraden:

$$(1)\ y^2 = 18x \qquad \text{und}\ (2)\ y = -\tfrac{2}{3}x + 7$$

die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte zu finden.

12. Eben so aus den Gleichungen einer Ellipse und einer Geraden:

$$(1)\ y^2 = 5x - 2x^2 \qquad \text{und}\ (2)\ y = 0{,}34x - 1.$$

13. Eben so aus den Gleichungen einer Hyperbel und einer Geraden:

$$(1)\ y^2 = 16x + 20x^2 \text{ und } (2)\ y = -\tfrac{1}{8}x - 4.$$

14. Der Anfangspunkt einer Parabel, deren Gleichung $y = \sqrt{(12x)}$ ist, soll in einen Punkt der Curve verlegt werden, wofür die Coordinaten $y = 6$, $x = 3$ sind. Welchen Winkel werden die neuen Ordinaten mit dem Durchmesser der Parabel bilden? (§. 347, II.).

15. Welche Form nimmt die Gleichung der Parabel nach vorstehender Voraussetzung an?

16. Für eine Ellipse, deren auf das Centrum bezogene Gleichung $y^2 = 100 - \frac{3}{4}x^2$ ist, soll ein schiefwinkliges Coordinatensystem gewählt werden, dessen Abscissenachse mit der Hauptachse einen Winkel $\alpha = 12^\circ$ bilde; welchen Winkel β bilden die neuen Ordinaten mit ihr? (§. 350, II.)

17. Welche Gestalt erhält die Gleichung der Ellipse nach Einführung der Werthe von α und β aus voriger Aufgabe?

18. Die Coordinaten eines Punktes **M** zu bestimmen, in welchem eine Geschützkugel, die in **A** unter dem Elevationswinkel β und mit der Geschwindigkeit c abgeschossen worden, sich nach t Secunden befindet, wenn man vom Widerstande der Luft absieht. (Fig. 140.)

19. Die Beschaffenheit der von der Kugel beschriebenen Bahn nach dem Ausdrucke ihrer Ordinaten zu beurtheilen. (§. 347, II.)

20. Den Ausdruck der Wurfweite auf der Abscissenlinie aus dem der Coordinaten abzuleiten.

21. Die Aufgabe 18 unter der Annahme zu lösen, daß Winkel $\beta = 26^\circ 30'$ und die Geschwindigkeit der abgeschossenen Kugel = 600 Fuß sein.

22. Eben so Aufgabe 20, wenn W. $\beta = 30^\circ$ und die Geschwindigkeit = 850 Fuß angenommen wird.

Viertes Capitel.

Die ebenen und krummen Flächen.

§. 355. Analytische Darstellung der Flächen. Auf die nämliche Weise, wie krumme Linien vermöge des Abstandes ihrer Punkte von einer gegebenen Geraden, können auch Flächen aller Art durch den Abstand ihrer einzelnen Punkte von einer gegebenen Ebene bestimmt, und wenn man einen gesetzlichen Zusammenhang

der Coordinaten dieser Punkte angeben kann, ebenfalls durch eine Gleichung dargestellt werden. Man denke sich nämlich von einem beliebigen Punkte L (Fig. 158.) der Oberfläche auf die gewählte Ebene AXY die Senkrechte LM, und von dem Punkte M eine andere MP auf die in dieser Ebene gewählte Abscissenlinie AX gefällt, so ist der Punkt L durch die Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, $ML = z$, völlig bestimmt. Dasselbe würde von beliebigen anderen Punkten der nämlichen Fläche gelten, welcher L angehört, weshalb eine allgemein zwischen x, y, z Statt habende Beziehung als Gleichung der ganzen Fläche angesehen werden kann. So ist, wenn wir einen Punkt L der Kugel auf ihren Mittelpunkt beziehen $AL^2 = AM^2 + ML^2 = AP^2 + PM^2 + ML^2$ oder $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$ die Gleichung der Kugelfläche, weil dieser Ausdruck von einem jeden ihrer Punkte gilt.

Dieses Beispiel reicht hin, zu zeigen, daß, so wie eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Zahlen angedeutet durch $F(x, y) = 0$ oder $y = f(x)$, als arithmetischer Ausdruck einer (geraden oder krummen) Linie betrachtet werden konnte, auch eine Gleichung mit drei veränderlichen Zahlen, also begriffen unter der allgemeinen Andeutung $F(x, y, z) = 0$ oder $z = f(x, y)$, als Ausdruck einer (ebenen oder gekrümmten) Fläche angesehen werden dürfe, deren Beschaffenheit sich ebenfalls aus dem arithmetischen Zusammenhange der constanten und veränderlichen Zahlen wird erkennen lassen, wie es bei den Curven der Fall war. Sollen Punkte der Fläche nach einer solchen Gleichung bestimmt werden, so hat man zwei Coordinaten ihrer Lage und Größe nach willkürlich anzunehmen und den zugehörigen Werth der dritten zu berechnen, wie bei den Curven für willkürliche Werthe der Abscissen correspondirende für die Ordinaten gefunden wurden. So ist die Gleichung einer Kugelfläche, deren Radius $= 29$ sei:

$$z^2 + y^2 + x^2 = 841 \text{ oder } z = \sqrt{841 - (x^2 + y^2)},$$

und wenn für einen bestimmten Punkt $x = 12$, $y = 16$ gesetzt wird:

$$z = \sqrt{841 - 400} = \sqrt{441} = \pm 21.$$

Das doppelte Zeichen für z zeigt an, daß die Senkrechte aus M in verschiedenen Richtungen genommen werden soll. Bei Anwendung der arithmetischen Zeichensprache darf man nämlich auch hier nicht unterlassen, die Lage der einzelnen Punkte in Beziehung auf den gewählten Anfangspunkt durch $\pm(x, y, z)$ zu bezeichnen, indem zu den früheren Bestimmungen über $\pm(x, y)$ noch die neue hinzukommt, daß die auf der einen Seite der Ebene ABC liegenden Senkrechten als die positiven, die auf der andern Seite aber als die negativen angesehen werden müssen. Denkt man sich durch den Punkt A, wo die Coordinatenachsen AX, AY einander durchkreuzen, noch die

dritte AZ senkrecht auf der Ebene XAY, und durch je zwei dieser Achsen Ebenen gelegt, so ist es gleichgültig, welche von denselben zur Beziehungsebene gewählt wird, indem man z. B. den Punkt L durch eine Senkrechte LM = z auf die Ebene AXY oder auch durch die Senkrechte LN = x auf AZY projiciren, und dann M durch MP = y und AP = x, oder N durch NQ = y und AQ = z bestimmen kann. Stellt man sich vor, daß der Punkt L auf der gegebenen Oberfläche irgend eine Linie BLE durchlaufe, so wird der Fußpunkt M der Ordinate LM ebenfalls in der Ebene AXY eine Linie BMC beschreiben, welche (nach §. 308, Anm.) die Projection von BLE ist. Offenbar sind zwei solcher Projectionen in irgend zwei der drei Beziehungs-Ebenen erforderlich, um eine Linie im Raume völlig zu bestimmen. Die gegenseitig senkrechte Stellung der Ebenen ist, wenn auch die einfachste und bequemste, doch keineswegs nothwendig, sondern jede beliebige Lage derselben gegeneinander gestattet.

§. 356. Intersection der Flächen. Wird in der gegebenen Gleichung einer Fläche F (x, y, z) = 0, eine der veränderlichen Zahlen z. B. z = 0 gesetzt, also die Dimension der Höhe willkürlich aufgehoben, so erhält man in dem Ausdruck F (x, y) = 0 den Zusammenhang der beiden Coordinaten x und y in der Ebene AXY d. h. die Gleichung derjenigen Linie, in welcher die Fläche von dieser Ebene geschnitten wird. Eben so findet sich der analytische Ausdruck des Durchschnitts der Fläche und der Ebene AYZ, wenn x = 0, und derjenige für den Durchschnitt mit der Ebene AXZ, wenn y = 0 gesetzt wird. Auf diese Weise erhält man die sogenannten drei Hauptschnitte der Oberfläche, woraus sich ihre Beschaffenheit im Allgemeinen bereits beurtheilen läßt. Um diese aber näher zu erforschen, setze man x, y, z, statt sie zu annulliren, den constanten Zahlen p, q, r gleich, wodurch man beliebig viele Durchschnitte der Fläche erhält. So wird z. B., wenn man für x den Werth p = AP substituirt. die Gleichung F (p, y, z) = 0, worin nur die veränderlichen Zahlen y, z geblieben sind, zur Gleichung der Curve BLC, d. h. des Durchschnittes der Fläche und einer, in dem Abstande p der AZY parallel gelegten Ebene. Wäre hingegen z = q = AQ gesetzt, so erhielt man in F (q, x, y) = 0 den Ausdruck des Durchschnitts DLE, durch eine der AXY parallele Ebene erzeugt.

Denkt man sich die Fläche, deren Gleichung F (x, y, z) = 0 ist, nicht etwa durch eine solche Parallel-Ebene, sondern durch eine andere (ebene oder krumme) Fläche geschnitten, die allgemein durch φ (x, y, z) = 0 ausgedrückt werden mag, so müssen alle Punkte ihres Durchschnitts, als beiden Flächen gemeinschaftlich, die nämlichen Coordinaten haben, oder es müssen die veränderlichen

Zahlen in beiden Gleichungen für diesen besondern Umstand als gleichbedeutend angesehen werden. Eliminirt man alsdann eine derselben, z. B. z, so enthält die neue Gleichung nur die beiden andern, x und y, und ist somit Ausdruck einer Linie, welche in der Ebene AXY von der Projection des Flächendurchschnitts gebildet wird. Die Elimination von x würde auf gleiche Weise eine Gleichung zwischen y und z, also den Ausdruck einer zweiten Projection jenes Durchschnitts, in der Ebene AZY, liefern und eben dadurch jene Linie im Raume bestimmen.

§. 357. Eintheilung der Flächen. Da man bei der unendlichen Mannigfaltigkeit in der Gestalt krummer Flächen mit dem höchst allgemeinen Unterschiede geschlossener und unbegränzter Flächen keine Eintheilung derselben begründen kann, so nimmt man auch hier, wie bei den Curven, das Princip derselben am zweckmäßigsten von der Beschaffenheit der Gleichungen her, die nach dem Vorhergehenden als ihr analytischer Ausdruck betrachtet werden dürfen. Zunächst unterscheidet man demnach algebraische und transcendente Flächen, je nachdem die Gleichungen zwischen den Coordinaten algebraisch sind, wie z. B. $z = \sqrt{x + y}$, oder transcendental, wie $x \cdot y = \sin z$, von denen jedoch nur die ersten pflegen in Betracht gezogen zu werden. Nach dem Grade, zu welchem sie sich durch die Anzahl der Coordinaten-Factoren in den einzelnen Gliedern erheben, bestimmt man auch die Ordnung der Flächen. So stellt die Gleichung $x^2 + xyz + z^2 = a$ eine Fläche der dritten Ordnung dar, weil eines ihrer Glieder Product aus drei Coordinaten-Factoren ist; die Gleichung $x - 4y^4z^2 = a$ hingegen eine Fläche der sechsten Ordnung, weil $y^4z^2 = y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z$.

§. 358. Flächen der ersten Ordnung. Sei die Gleichung zwischen x, y, z begriffen unter der allgemeinen Form

$$Ax + By + Cz + D + 0,$$

also vom ersten Grade, so ist die von ihr analytisch dargestellte Fläche eine Ebene Denn setzt man in der vorstehenden Gleichung x, y, z nach einander $= 0$ oder auch $= k$, so entstehen die Gleichungen der Form:

$$By + Cz + D = 0; \; Ax + Cz + D = 0; \; Ax + By + D + 0,$$

welche (nach §. 333) Ausdrücke gerader Linien sind, die in den drei Coordinaten-Ebenen oder ihren parallelen Ebenen liegen. Noch allgemeiner kann man den Beweis durch Verbindung der Gleichung (1) $Ax + By + Cz + D = 0$ mit einer andern der nämlichen Form (2) $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ führen; denn indem man (1) durch A' und (2) durch A multiplicirt, erhält man durch Subtraction die Gleichung

$$(3)\; (AB' - AB')\,y + (A'C + AC')\,z + (A'D - AD') = 0,$$

welche Ausdruck einer geraden Linie in der Ebene AYZ ist. Da

nun die Projectionen des Flächendurchschnitts in den Ebenen AXY und AXZ auf gleiche Weise als gerade Linien sich ergeben, so können die durch (1) und (2) ausgedrückten Flächen keine andere, als Ebenen sein.

§. 359. Flächen der zweiten Ordnung. Die allgemeine Form der Gleichungen vom zweiten Grade zwischen x, y, z, wodurch Flächen der zweiten Ordnung ausgedrückt werden, ist:

$$Az^2 + Byz + Cxz + Dy^2 + Exy + Fx^2 + Gz + Hy + Ix + K = 0.$$

Setzt man nun auch hier x, y, z successiv $= 0$, so entstehen die Gleichungen:

$$Az^2 + Byz + Dy^2 + Gz + Hy + K = 0;$$
$$Az^2 + Cxz + Fx^2 + Gz + Ix + K = 0;$$
$$Dy^2 + Exy + Fx^2 + Hy + Ix + K = 0;$$

wodurch (nach §. 341.) drei Curven der zweiten Ordnung dargestellt werden, die in den Ebenen AYZ, AXZ, AXY liegen. Da nun (nach §. 342., vergl. mit dem folgenden Capitel) die Kegelschnitte der Parabel, Ellipse und Hyperbel als die einzigen Curven der zweiten Ordnung erkannt worden sind, so folgt aus den obigen Gleichungen, daß jede Fläche dieser Ordnung auch eine jener drei Curven zum Hauptschnitt haben müsse. In Ansehung der Parallelschnitte folgt das Nämliche, wenn man (nach §. 356.) x, y, z $=$ p, q, r setzt. Sind alle die Intersectionen Ellipsen, so muß die Oberfläche eine geschlossene, sind hingegen darunter Parabeln oder Hyperbeln, so muß sie eine unbegränzte sein.

§. 360. Rotationsflächen. Auf die einfachste Weise läßt man krumme Flächen durch die Vorstellung entstehen, daß eine (gerade oder krumme) Linie in gleichbleibendem Abstande sich um eine, als Achse gegebene Grade drehe, und pflegt, dieser Entstehungsart wegen, die von der drehenden Linie erzeugte Oberfläche eine Rotationsfläche zu nennen, wovon die Erzeugung der Kugel durch den rotirenden Halbkreis das nächste Beispiel liefert. Ist uns die Gleichung der erzeugenden Linie in der Gleichung $y = f(x)$ gegeben, so wird sich diejenige der Rotationsfläche, von der Gestalt $z = \varphi(x, y)$, immer ohne Mühe ableiten lassen, indem jeder auf der Achse senkrecht stehende Parallelschnitt ein Kreis sein muß. Sei L (Fig. 159.) ein beliebiger Punkt der Oberfläche, AB ihrer Achse, und AGK die willkürlich angenommene Ordinaten-Ebene, so entsteht, wenn man durch L eine Durchschnittsebene GLK senkrecht zur Achse legt, der Kreis DGEK, worin die Senkrechte $LM = z$, $MP = y$ und $PG = PL = w$ gesetzt werden mag. Dann ist $z^2 = w^2 - y^2$, und wenn der Ausdruck des, mit jeder Abscisse x veränderlichen Radius $w = f(x)$ gesetzt wird:

$$z^2 = f(x)^2 - y^2 \text{ oder } z^2 + y^2 = f(x)^2.$$

I. (Fig. 159.) Die nächste Anwendung dieses allgemeinen Verfahrens, die Gleichungen der Rotationsflächen zu erhalten, möge die gerade Linie erfahren, deren Gleichung $w = ax + b$ ist, wenn w die Ordinate PG bezeichnet, der Anfangspunkt aber beliebig in A angenommen ist. Durch Substitution dieses Werthes von w erhält man

$$z^2 + y^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

als Ausdruck der, durch Rotation der Linie HG um AB entstehenden Kegelfläche.

II. (Fig. 159.) Eine Cylinderfläche entsteht, wenn die der Achse parallele Linie GF in gleichbleibendem Abstande um dieselbe sich bewegt. Die Gleichung einer solchen Linie ist aber (nach §. 334.) $w = b$, mithin für diesen Fall: $z^2 + y^2 = b^2$.

III. (Fig. 159.) Um die Gleichung der Kugeloberfläche zu erhalten, hat man, wenn A als Anfangspunkt gewählt und der Radius $CG = a$ gesetzt wird, $w^2 = AP \cdot PB = x(2a - x)$ also:

$$(1)\quad z^2 + y^2 = 2ax - x^2 \text{ oder } z^2 + y^2 + x^2 = 2ax;$$

wenn man hingegen die Coordinaten auf den Mittelpunkt C bezieht, so ist $w^2 = a^2 - x^2$, also:

$$(2)\quad z^2 + y^2 = a^2 - x^2 \text{ oder } z^2 + y^2 + x^2 = a^2.$$

IV. (Fig. 160.) Wählt man zu der erzeugenden Curve der Rotationsfläche eine Parabel GAK, wodurch ein sogenanntes Paraboloid entsteht, so ist (nach §. 345.) $w^2 = px$, und nach Einführung dieses Werthes in die allgemeine Gleichung:

$$z^2 + y^2 = px.$$

V. (Fig. 160.) Die Gleichung der Oberfläche eines Ellipsoids zu finden, welches durch Drehung einer Ellipse AgBk um ihre Achse erzeugt wird, setze man in Beziehung auf den Scheitelpunkt A (nach §. 349.) $w^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, also:

$$(1)\quad z^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \text{ oder } a^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = 2ab^2x;$$

und wenn die Coordinaten auf den Mittelpunkt C bezogen werden, (nach §. 350.) $w^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, also:

$$(2)\quad z^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ oder } a^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

VI. (Fig. 160.) Denkt man durch Rotation einer Hyperbel GAK um ihre Achse die Oberfläche eines Hyperboloids erzeugt, so ist in Beziehung auf den Scheitelpunkt A (nach §. 252) $w^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, also;

$$(1)\ z^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) \text{ oder } a^2z^2 + a^2y^2 - b^2x^2 = 2ab^2x;$$

und wenn die Hyperbel auf ihren Mittelpunkt bezogen wird, $w^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, also:

$$(2)\ z^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \text{ oder } a^2z^2 + a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

§. 361. Aufgaben über Linien im Raume, und die Intersection und Berührung der Flächen.

1. Die Projections-Gleichungen einer geraden Linie zu finden, wenn M′, M″ derselben gegeben sind.

Werden die gegebenen Coordinaten dieser Punkte durch x', y', z', x'', y'', z'' bezeichnet, und die gesuchten Gleichungen der Projectionen in den Ebenen **AXY** und **AZX** dargestellt durch $y = ax + b$ und $z = \alpha x + \beta$, so ist

$$y' = ax' + b \text{ und } z' = \alpha x' + \beta;$$
$$y'' = ax'' + b \qquad z'' = \alpha x'' + \beta;$$

also $y' - y'' = a(x' - x'')$ und $z' - z'' = \alpha(x' - x'')$, wodurch a und α bestimmt sind, mithin auch b und β.

2. Die Gleichung einer Ebene zu finden, wenn drei Punkte M′, M″, M‴ derselben gegeben sind.

Sind x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' die Coordinaten der gegebenen Punkte, so werden die Coefficienten der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ dadurch bestimmt, daß man die vorstehenden speciellen Werthe an die Stelle von x, y, z setzt und dann die unbekannten Werthe A', B', C' sucht, nachdem D durch Division entfernt ist.

3. Die Projections-Gleichung des Durchschnitts einer Ebene und einer Kegelfläche zu finden.

Sei die Gleichung des Kegels in Beziehung auf seinen Scheitel als Anfangspunkt (nach §. 360, 1.)

$$z^2 + y^2 = a^2x^2$$

und die der Ebene: $Ax = -(By + Cz + D)$, so erhält man durch Elimination von x:

$$A^2(z^2 + y^2) = a^2(By + Cz + D)^2,$$

also eine Gleichung des zweiten Grades zwischen z und y, welche unter die allgemeine Form solcher Gleichungen fällt und demnach eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel darstellen muß. Hiernach ist die Projection eines Kegelschnitts wiederum ein solcher.

4. Die Projections-Gleichung des Durchschnitts einer Kugel und einer Ebene zu finden.

Die Gleichungen sind (nach §. 358 und 360, III.):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ und } Ax + By + Cz + D = 0,$$

und nach Elimination von z^2 bleibt:

$$C^2R^2 - C^2(x^2 + y^2) = (Ax + By + D)^2,$$

eine Gleichung des zweiten Grades, welche (da x oder y nicht unbestimmt groß werden können) eine geschlossene Curve, also eine Ellipse, darstellt.

5. Die Bedingungen anzugeben, unter denen ein Paraboloid von einem Kegel berührt wird, wenn die Achsen beider zusammenfallen.

Die Gleichung des Kegels ist (nach §. 360, I.):

$$z^2 + y^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

und die Gleichung des Paraboloids (nach §. 360, IV.):

$$z^2 + y^2 = px.$$

Angenommen, daß beide Flächen einander durchschneiden, so hat man für die Intersectionen, deren im Allgemeinen zwei sein werden:

$$px = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

$$\text{oder } x = \left(\frac{p - 2ab}{2a^2}\right) \pm \sqrt{M},$$

wo M eine Function von a, b, p bezeichnet. In dem besonderen Falle aber, wo die krummen Flächen einander nur berühren sollen, kann es keinen zweifachen Werth für x geben, also ist die Bedingung für diesen Fall, daß $M = 0$ und

$$x = \frac{p - 2ab}{2a^2} \text{ oder } ax + b = \frac{p}{2a}.$$

6. Die Bedingungen anzugeben, unter denen ein Paraboloid und eine Kugel einander berühren.

Die Gleichungen sind (nach §. 360, III. und IV.), wenn der Mittelpunkt der Kugel in einem Abstande $= k$ vom Scheitel der Parabel angenommen wird:

$$(1)\ y^2 + z^2 = px;$$

$$(2)\ y^2 + z^2 = a^2 - (x - k)^2.$$

Schneiden beide Oberflächen einander, so hat man für die Intersektionen die Gleichung:

$$px = a^2 - x^2 + 2kx - k^2,$$

$$\text{oder } x = \frac{2k - p}{2} \pm \sqrt{M},$$

unter M eine Function von a, k, p verstanden. Sollen nun die Flächen einander berühren, so kann dieses nur für eine Abscisse geschehen; folglich ist für diesen Fall $M = 0$, und

$$x = k - \tfrac{1}{2}p, \text{ oder } k = x + \tfrac{1}{2}p.$$

Anhang.

Die geometrischen Oerter.

§. 362. Erklärungen. Denkt man sich, daß ein Punkt bei seinem stetigen Fortschreiten im Raume nicht aufhöre bestimmten Bedingungen zu genügen, so nennt man die von ihm beschriebene Linie einen geometrischen Ort. Durch jene Bedingungen wird der veränderliche Punkt, welcher den geometrischen Ort erzeugt, auf unveränderliche oder feste Punkte und Linien bezogen, mit denen er durch Hülfslinien in Verbindung zu setzen ist, um diese Beziehung für einzelne Momente des allmäligen Fortschritts zu veranschaulichen. Wie in der Grundvorstellung der höheren oder analytischen Geometrie (§. 331.) bildet auch hier der Begriff der Veränderlichkeit in der Lage eines Punktes, und somit der Gegensatz zwischen veränderlichen und beständigen oder constanten Linien die Grundlage der geometrischen Betrachtung. Sofern die Linie, welche durch den gesetzlich bedingten Fortschritt eines Punktes entsteht, eine Gerade oder ein Kreis ist, pflegt man sie herkömmlicher Weise einen ebenen Ort zu nennen; vom Kreise verschiedene krumme Linien dagegen werden (nach dem Sprachgebrauch des Alterthums) entweder körperliche oder linearische Oerter genannt, je nachdem sie Durchschnittslinien eines Kegels und einer Ebene, oder durch willkürliche Bedingungen in einer Ebene entstanden, indessen auch von den Kegelschnitten verschieden sind.

Um die Betrachtung der mannigfaltigen Bedingungen, denen zufolge eine gerade oder krumme Linie als Ort des beweglichen Punktes hervorgeht, unter bestimmte Gesichtspunkte zu bringen, erscheint es zweckmäßig, folgende Erklärungen festzustellen:

1. Kann der Scheitel eines Dreiecks über constanter Grundlinie einer gegebenen Bedingung gemäß unbestimmt seine Stellung verändern, so werde die von ihm erzeugte Linie ein Scheitelort des Dreiecks genannt.

2. Die Linie, welche das Centrum eines Kreises unter gegebenen Bedingungen durchläuft, heiße Centralort desselben.

3. Denkt man sich eine Gerade um einen festen Punkt beweglich und zwei veränderliche Punkte auf derselben, in immer gleichen Verhältnissen von dem festen Punkte entfernt, so werden die von den veränderlichen Punkten beschriebenen Linien in Beziehung auf einander Verhältnißörter genannt.

4. Bezeichnet man das Product aus den Zahlenwerthen zweier Abschnitte einer um einen festen Punkt beweglichen Geraden (wenn diese Abschnitte von dem festen Punkt aus gerechnet werden) mit dem Namen Potenz, so mögen die von zwei veränderlichen, aber immer die nämliche Potenz ergebenden Punkten der beweglichen Geraden beschriebenen Linien Potenzörter genannt werden.

5. Schneidet eine um einen festen Punkt bewegliche Gerade zwei Linien, und nimmt man in Beziehung auf beide Durchschnittspunkte und den festen Punkt einen harmonischen Gegenpunkt desselben an, so werde die von diesem veränderlichen Gegenpunkte beschriebene Linie der harmonische Ort in Beziehung auf die unveränderlichen Linien und den festen Punkt genannt.

Denkt man sich den festen Punkt, um welchen eine Gerade von unbestimmter Länge als Strahl beweglich sein soll, in's Unendliche hinausrückend, so nähern sich die von demselben ausgehenden Convergenten immer mehr einer parallelen Richtung, wonach die Betrachtung der geometrischen Oerter von convergirenden auch auf parallele Gerade, als auf einen besonderen Fall, ausgedehnt werden kann, sofern man die parallele Lage als einen Gränzzustand betrachtet, welchem die convergirenden Geraden unaufhörlich näher gebracht werden können.

Man darf die geometrischen Oerter als Auflösungen unbestimmter geometrischer Aufgaben betrachten, indem alle Punkte eines solchen Orts irgend einer gegebenen Bedingung genügen. Verbindet man nun mit dieser einen noch eine zweite Bedingung, welcher ein anderer geometrischer Ort entspricht, so wird die Aufgabe zu einer bestimmten, indem alsdann nur die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Oerter den gegebenen Bedingungen Genüge leisten können. Dieser Umstand macht die geometrischen Oerter zu einem vorzüglichen Hülfsmittel für die Lösung geometrischer Aufgaben.

I.

Die ebenen Oerter.

§. 363. Lehrsätze über Scheitelörter.

1. Der Scheitelort für ein gleichschenkliges Dreieck von constanter Grundlinie ist eine, dieselbe halbirende, Senkrechte.

Beweis aus §. 237, L. 3, Zus. III.

2. Der Scheitelort für ein Dreieck, dessen Grundlinie und Inhalt constant sind, ist eine der Grundlinie parallele Gerade.

Beweis aus §. 262, L. 2.

3. Der Scheitelort für ein Dreieck, worin die Grundlinie und deren Gegenwinkel constant sind, ist ein Kreis.

Beweis aus §. 248, L. 5.

Zusatz. Der Scheitelort für ein rechtwinkliges Dreieck, dessen constante Grundlinie die Hypotenuse ist, ist ein Kreis über dieser als Durchmesser.

4. Der Scheitelort für ein Dreieck, worin die Grundlinie und das Verhältniß der Scheitelseiten constant sind, ist ein Kreis.

Beweis aus §. 258, L. 6.

5. Der Scheitelort für ein Dreieck, worin die Grundlinie und die Differenz der Quadrate beider Scheitelseiten constant sind, ist eine die Grundlinie senkrecht schneidende Gerade.

Beweis aus §. 255, L. 6, Zus. II.

6. Der Scheitelort für ein Dreieck, worin die Grundlinie und die Summen der Quadrate beider Scheitelseiten constant sind, ist ein Kreis.

Beweis aus §. 255, L. 11.

§. 364. Lehrsätze über Centralörter.

1. Der Centralort für einen Kreis, welcher zwei Gerade berührt, ist die Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels.

Beweis aus §. 246, L. 5.

Zusatz. Sind die Geraden parallel, so ist der Centralort eine in ihre Mitte fallende Parallele.

2. Der Centralort für einen Kreis um eine, als Sehne gegebene, constante Gerade ist eine, diese Gerade halbirende Senkrechte.

Beweis aus §. 245, L. 6.

3. Der Centralort für einen Kreis vom Radius r, der einen andern Kreis vom Radius R berühre, ist ein mit diesem concentrischer Kreis vom Radius $R \pm r$.

Beweis aus §. 247, L. 8.

4. (Fig. 161.) Der Centralort eines Kreises (O) vom Radius r, der einen anderen Kreis (M) vom Radius R rechtwinklig schneidet ist ein Kreis vom Radius $MO = \sqrt{(R^2 + r^2)}$.

Beweis aus §. 247, L. 6, und §. 255.

5. (Fig. 161.) Der Centralort für einen Kreis (C) vom Radius r, der einen andern Kreis (M) vom Radius R so schneide, daß sein Durchmesser Sehne in demselben sei, ist ein mit diesem concentrisch beschriebener Kreis vom Radius $MC = \sqrt{(R^2 - r^2)}$.

Beweis aus §. 245, L. 7, und §. 255, L. 6, Zus. I.

6. (Fig. 162.) Der Centralort für einen Kreis, welcher einem Dreieck eingeschrieben sei, worin Grundlinie und Gegenwinkel constant sind, ist ein über der Grundlinie beschriebener Kreisbogen.

Denn da M der gegebenen Bedingung gemäß auf den Halbirungslinien der veränderlichen Winkel A, B, C liegen muß, so ist BP = CP, W. PBC = PAC = PAB, also W. PBM = PBC + CBM = PAB + ABM = W. BMP, und folglich PMB ein gleichschenkliges Dreieck, woraus PB = PM = PC folgt

§. 365. Lehrsätze über Verhältnißörter.

1. (Fig. 163.) Der Verhältnißort für irgend einen Punkt a eines um F beweglichen Strahls, dessen Endpunkt A eine Gerade durchläuft, ist eine derselben parallele Gerade.

Denn ist FA : Fa = FB : Fb, so muß (nach §. 253, L. 2) ab parallel AB sein u. s. f.

2. (Fig. 163.) Der Verhältnißort für irgend einen Punkt a eines zwischen zwei Parallelen liegenden Strahlenabschnitts AA′ ist eine jenen parallele Gerade.

Denn zieht man durch a eine Parallele ad zu den Geraden AD, A′D′, so ist (nach §. 253, L. 1, Zus.) aA : aA′ = bB : bB′ = cC : cC′ u. s. f.

3. (Fig. 164.) Der Verhältnißort für irgend einen Punkt a eines beweglichen Strahls, dessen Endpunkt den Umfang einer beliebigen Figur ABCD . . . . durchläuft, ist eine derselben ähnliche Figur abcd . . . .

Denn da der Strahl in jeder beliebigen Lage in einem constanten Verhältniß (m : n) getheilt wird, dergestalt, daß

FA : Fa = FB : Fb = FC : Fc u. s. f.

so sind die Figuren ABCD . . . . und abcd . . . . (nach §. 322.) einander ähnlich.

Zusatz I. Ist die Figur ABCDE ein Kreis, so muß der Verhältnißort abcde ebenfalls ein solcher sein, der Convergenzpunkt F möge innerhalb oder außerhalb jenes Kreises liegen.

Zusatz II. Der Verhältnißort für irgend einen Punkt einer um den Punkt F einer Kreislinie beweglichen Sehne ist ein Kreis, und zwar für ihren Halbirungspunkt ein Kreis über dem Halbmesser.

4. (Fig. 164.) Der Verhältnißort für den Edpunkt a′ des einen Strahls eines constanten Winkels AFa′, dessen anderer Strahl den Umfang einer Figur ABCDE durchläuft, ist eine derselben ähnliche Figur a′b′c′d′e′.

Denn da W. AFa' = W. BFb', so ist (nach §. 232, L. 6) Winkel AFB = a'Fb'. Folglich lassen sich die Strahlen Fa', Fb', Fc' .... mit andern FA, FB, FC .... zusammenlegen und da alsdann nach Vg. FA : Fa = Fb : FB u. s. f., so sind die Figuren (nach §. 252.) einander ähnlich.

§. 366. Lehrsätze über Potenzörter.

1. (Fig. 165.) Der Potenzort für den Theilpunkt D eines Strahls FA, dessen anderer Theilpunkt A einen Kreis AB durchläuft, ist ebenfalls ein Kreis, sofern F nicht im Umfange von AB liegt.

Der Beweis folgt aus Fig. 66, wo OD : Od = OC : Oc = OE : Oe, also OD . Oe = Od . OE ist. Vgl. §. 257, L. 1 und 2.

2. (Fig. 166.) Der Potenzort für irgend einen Punkt D eines Strahls, der um den Punkt F eines Kreises beweglich ist und dessen Endpunkt diese Linie durchläuft, ist eine auf dem Durchmesser senkrechte Gerade.

Denn aus der Bedingungsgleichung FD . FA = FE . FB folgt FD : FE = FB : FA, wonach der Ort für D eine auf FA in D senkrechte Gerade ist. Dasselbe folgt für den Punkt D'.

Zusatz. Der Satz bleibt auch dann gültig, wenn die beiden potenzbildenden Linien FD'', FA nicht in der nämlichen Geraden liegen, sondern einen constanten Winkel AFD'' bilden, wodurch das dem Dr. ABF ähnliche Dr. FD''E'' entsteht.

3. (Fig. 166.) Der Potenzort für den Punkt A eines Strahls, dessen anderer Theilpunkt D eine Gerade DE durchläuft, ist ein durch den festen Punkt F des Strahls gehender Kreis.

Beweis wie zu L. 2.

4. (Fig. 167.) Der Ort gleicher Potenzen für zwei einander schneidende (oder berührende) Kreise (C) und (O) ist die gemeinschaftliche Secante (oder Tangente) derselben.

Beweis aus §. 257, L. 8.

Zusatz. Die gemeinschaftlichen Secanten drei einander schneidender Kreise treffen einander in dem nämlichen Punkte.

5. (Fig. 167.) Der Ort gleicher Potenzen für zwei, einander nicht schneidende oder berührende Kreise (C) und (c) ist eine auf ihrer Achse senkrechte Gerade PR, welche ihre gemeinschaftlichen Tangenten halbirt.

Beweis aus §. 257, L. 9.

Zusatz I. Werden die Kreise (C) und (c) von einem beliebigen dritten (O) geschnitten, so convergiren die gemeinschaftlichen Secanten in einem Punkte Q der Potenzlinie PR jener Kreise.

Zusatz II. Werden von irgend einem Punkte Q der Potenzlinie zweier Kreise beliebige Secanten QE, Qe gezogen, so liegen

die vier Durchschnittspunkte D, E, d, e immer im Umfang eines Kreises (O).

Zusatz III. Die Potenzlinie PR zweier Kreise (C) und (c) ist der Centralort aller sie rechtwinklig schneidenden Kreise (P).

§. 367. Lehrsätze über harmonische Oerter.

1. (Fig. 168.) Der harmonische Ort in Beziehung auf zwei convergirende Gerade AS, BS und einen beliebig liegenden Punkt O ist eine dritte Convergente QS.

Denn sei auf der beliebigen Durchschnittslinie AQ der Punkt Q harmonischer Gegenpunkt von O, so sind (nach §. 258, L. 1. und 2). SA, SB, SO, SQ harmonische Strahlen, und folglich jeder beliebige Punkt Q' der Geraden SQ harmonischer Gegenpunkt von O.

2. (Fig. 169.) Der harmonische Ort in Beziehung auf ein Dr. ABC und den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt O seiner Transversalen sind die Seiten eines demselben umschriebenen Dreiecks PQR, welche auf den verlängerten Transversalen convergiren.

Denn bezeichnet man den harmonischen Gegenpunkt von O auf AD durch P, auf BE durch R, auf CF durch Q, so ist der harmonische Ort in Beziehung auf AB, AC und O die Gerade QAR, in Beziehung auf BA, BC und O die Linie QBP, und endlich in Beziehung auf CB, CA und O die Gerade PCR (nach L. 1.)

3. (Fig, 170.) Der harmonische Ort in Beziehung auf ein Viereck ABCD und den Durchschnittspunkt O seiner beiden Diagonalen ist die dritte Diagonale des vollständigen Vierecks (§. 239).

Denn bezeichnet man die harmonischen Gegenpunkte von O auf den verlängerten Diag. AC, BD mit Q und P, so schneidet die Gerade PQ (nach L. 1) zugleich die Convergenzpunkte S und R und fällt also mit der dritten Diagonale des vollständigen Vierecks zusammen.

Zusatz I. Die drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks ARCS werden von ihren Durchschnittspunkten und den Eckpunkten des Vierecks harmonisch getheilt in;

(1) A, O, C, Q;
(2) D, O, B, P;
(3) P, R, Q, S;

Zusatz II. Zieht man aus den Convergenzpunkten R, S der Gegenseiten eines Vierecks ABCD Gerade durch den Schnittpunkt O der Diagonalen, so werden die Seiten harmonisch nach R und S getheilt.

Zusatz III. Der harmonische Ort in Beziehung auf zwei Gegenseiten AD, BC eines Vierecks und den Convergenzpunkt R seiner andern Gegenseiten AB, DC ist die Gerade durch den Convergenzpunkt S jener Seiten und den Schnittpunkt der Diag. AC, BD.

Zusatz IV. Durch Verbindung der Durchschnittspunkte H, L, K, M entsteht ein, dem gegebenen eingeschriebenes Viereck HLKM, dessen Seiten in den Schnittpunkten P, Q, der Diagonalen convergiren. Denn es ist z. B. in Beziehung auf den Punkt M und die Geraden OQ und PQ der harm. Ort (welchem K und L als harm. Gegenpunkte von M angehören) eine ebenfalls in Q convergirende Gerade (nach L. 1).

4. (Fig. 171.) Der harmonische Ort in Beziehung auf einen Kreis und einen außerhalb desselben liegenden Punkt R ist die Berührungssehne TU zwischen den aus R gezogenen Tangenten.

Denn zieht man aus R die Secante RA durch den Mittelpunkt und eine andere beliebige RD, so wie die Geraden AD, BC, AC, BD, so entsteht das vollständige Viereck ARCS, worin (nach L. 3, Zus. III.) die Gerade SO harmonischer Ort in Beziehung auf R ist. Da nun aber im Dr. ABS die Geraden AC, BD senkrechte Transversalen sind, so gilt dasselbe (nach §. 238., L. 2) auch von SO, welche den Durchmesser AB in L harm. nach R theilt, und deshalb (nach §. 258, L. 5) mit der Berührungssehne TU zusammenfallen muß.

Zusatz I. Die Convergenzpunkte R, S der Gegenseiten eines im Kreise beschriebenen Vierecks ABCD (Fig. 172.) liegen in den verlängerten Berührungssehnen TU, VW.

Zusatz II. Zieht man aus irgend einem Punkte R zwei Tangenten RT, RU und aus einem Punkte S der verlängerten Berührungssehne TU die Tangenten SV, SW, so trifft die Verlängerung von VW den Punkt R.

Zusatz III. Zieht man aus einem Punkte R zwei Tangenten RT, RU, und eine beliebige Secante RBA, so convergiren die Tangenten an A und B mit der verlängerten Berührungssehne TU.

Zusatz IV. Beschreibt man in einem Kreise ein Viereck ABCD und um denselben ein anderes abcd, welches ihn in den Eckpunkten des ersten berührt, so schneiden die Diagonalen beider einander in demselben Punkte O.

Zusatz V. Der harmonische Ort in Beziehung auf einen Kreis und einen innerhalb desselben liegenden Punkt O ist eine Gerade, wovon man irgend zwei Punkte R, S dadurch bestimmt, daß man durch O zwei beliebige Sehnen AC, BD zieht und deren Endpunkte zu zweien verbindet.

§. 368. Aufgaben.

1. Ein Dreieck zu construiren, dessen Grundlinie $= c$, und dessen Flächeninhalt $= m^2$ sei.
2. Desgleichen ein rechtwinkliges Dreieck über der Hypotenuse c, dessen Höhe $= h$ sei.

3. Ein Dreieck zu bilden aus der Grundlinie c, dem Gegenwinkel γ und dem Flächeninhalt $= m^2$.
4. Desgl. aus der Grundlinie c, dem Gegenwinkel γ und dem Verhältniß der beiden Seiten $a : b = m : n$.
5. Ueber der gegebenen Hypotenuse c ein rechtwinkliges Dreieck, inhaltsgleich einem Rechteck von den Seiten p und q, zu construiren.
6. Ein Dreieck von gegebener Grundlinie c und Höhe h zu construiren, so daß die Differenz der Quadrate beider Scheitelseiten a, $b = m^2$ sei.
7. Desgl., so daß die Summe der Quadrate beider Scheitelseiten $= 2m^2$ sei.
8. Von irgend einem Punkte zu zwei festen Punkten A, B zwei Gerade so zu ziehen, daß das Verhältniß derselben $= p : q$ und die Summe ihrer Quadrate $= 2m^2$ sei.
9. Auf der Seite **BC** eines Dr. **ABC** einen Kreis so zu construiren, daß derselbe die Seiten **AC**, **AB** berühre.
10. Aus den Seiten **AB**, **BC**, **CD** und dem W. **ABC** ein Viereck so zu construiren, daß um dasselbe ein Kreis beschrieben werden könne.
11. Das Centrum eines Kreises zu bestimmen, der die Schenkel eines gegebenen Winkels und einen zwischenliegenden Kreis berühre.
12. Eben so, wenn jener Kreis die Schenkel eines gegebenen Winkels berühren und einen zwischenliegenden Kreis rechtwinklig schneiden soll.
13. Einen Kreis vom Durchmesser a so durch einen andern vom Durchmesser b zu legen, daß er durch einen gegebenen Punkt P gehe, und sein Durchmesser Sehne in dem gegenseitigen Kreise sei.
14. Ein Dreieck zu construiren, wofür außer der Grundlinie c und dem Gegenwinkel γ der Radius des eingeschriebenen Kreises $= r$ gegeben sei.
15. Ueber der Geraden m als Grundlinie ein Dreieck zu beschreiben, wofür der umschriebene und der eingeschriebene Kreis gegeben sei.
16. Den Verhältnißort eines Kreises zu construiren, worin die von einem festen Punkte P ausgehenden Strahlen sich wie die gegebenen Linien m, n verhalten.
17. Es sei ein Kreis, eine Gerade und ein Punkt gegeben. Von diesem dergestalt eine Gerade zum Kreise zu ziehen, daß sie von der gegebenen Geraden halbirt werde.
18. Desgl., daß sie von derselben im Verhältniß $m : n$ geschnitten werde.
19. Zwei Kreise und ein Punkt sind gegeben. Von diesem soll eine

Gerade so gezogen werden, daß sie von den beiden Kreisen im Verhältniß der Linien m, n geschnitten werde.

20. Ein Kreis, eine Gerade und der Scheitelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben. Die Hypotenuse desselben berühre mit ihren Endpunkten jene Linien so, daß das Verhältniß der Catheten = m : n sei.

21. Von zwei gegebenen Geraden m und p, die von einem festen Punkte ausgehen, sei die erste eine Tangente, die andere das äußere Stück einer Secante an einem Kreise, der durch sie bestimmt werden soll.

22. Von einer Geraden, welche außerhalb zweier, einander schneidender, Kreislinien liegt, gleiche Tangenten an die Kreise zu ziehen.

23. Eben so von einem Kreise außerhalb der gegebenen.

24. An zwei gegebene, einander nicht schneidende, Kreise von einem Punkte ihrer Achse gleiche Tangenten zu ziehen.

25. Zwei Punkte der Potenzlinie dieser Kreise zu finden, ohne ihre gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.

26. Irgend einen Punkt einer, außerhalb zweier Kreise gegebenen Geraden als Centrum eines Kreises zu bestimmen, der jene Kreise rechtwinklig schneide.

27. In der Verlängerung einer Geraden AC einen zu ihrem Theilpunkte O harmonischen Gegenpunkt durch Anwendung des vollständigen Vierecks (Fig. 170.) zu bestimmen.

28. In ein gegebenes Viereck ein anderes so einzuschreiben, daß die inneren Diagonalen beider einander in dem nämlichen Punkte durchschneiden, die äußeren aber zusammenfallen.

29. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die mit zwei gegebenen Geraden in einem sehr entfernten Punkt convergire.

30. Aus einem Punkte außerhalb eines Kreises (vermöge des Lineals allein) an denselben Tangenten zu ziehen.

II.

Die Kegelschnitte.

A. Die Parabel.

§. 369. Erklärungen. Der Ort eines Punktes M (Fig. 149.) dessen Abstände von einem festen Punkte F und einer festen Geraden KL einander gleich sind, wird eine Parabel genannt. Jener Punkt F heißt der Brennpunkt, die Gerade KL die

Richtlinie (Directrix) der Parabel, und jede von dem Brennpunkte zur Curve führende Gerade FM ein Brennstrahl (auch Zuglinie, Radius vector) derselben. Eine durch den Brennpunkt senkrecht auf die Richtlinie gezogene Gerade ist die Achse der Parabel, und der (nach obiger Definition) in die Mitte zwischen F und KL fallende Punkt A der Curve ihr Hauptscheitel. Jede der Achse parallele Gerade MO wird ein Durchmesser oder Parallelstrahl und ihr Durchschnittspunkt mit der Parabel der Scheitel dieses Durchmessers genannt*). Die Wörter: Sehne, Secante und Tangente haben für die Parabel die nämliche allgemeine Bedeutung, wie für den Kreis (§. 244.) Unter den Sehnen heißt diejenige, welche die Achse im Brennpunkte senkrecht durchschneidet, der Parameter der Parabel. Abschnitte irgend eines Durchmessers, von seinem Scheitel an gerechnet, wie AP, AP', werden Abscissen, und aus deren Endpunkten zur Curve gezogene Parallelen, wie PM, P'M', werden Ordinaten genannt. Eine im Berührungspunkte zur Tangente senkrecht bis zur Achse gezogene Gerade MW ist eine Normale der Curve, und das zwischen ihr und der Ordinate MP liegende Stück PW der Achse die Subnormale des Punktes M, so wie das zwischen der Tangente MT und Ordinate eingeschlossene Stück PT Subtangente jenes Punktes genannt wird.

§. 370. Lehrsätze über die Parabel.

1. (Fig. 150.) Jede Parabel ist Centralort eines ihren Brennpunkt F und die Richtlinie KL berührenden Kreises (M).

Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

2. (Fig. 149.) Eine beliebige Gerade RS kann die Parabel in nicht mehr, als zwei Punkten, durchschneiden.

Denn angenommen, O wäre ein dritter Durchschnittspunkt, so müßte, wenn man OK senkrecht auf GL zieht, FO = OK = OM + FM sein, welches unmöglich ist.

3. (Fig. 149.) Eine Gerade, welche den Nebenwinkel FMK eines Brennstrahls FM und des Parallelstrahls MO halbirt, ist eine Tangente der Parabel.

Denn angenommen, sie könne außer dem Punkte M noch irgend einen zweiten V mit der Parabel gemein haben, so wäre (1) VH = VF und (2) VF = VK, da Dr. VFM $\cong$ VKM; folglich (3) VH = VK, welches unmöglich ist.

---

*) Warum es zweckmäßig ist, der Geraden MO die doppelte Benennung Durchmesser und Parallelstrahl beizulegen, wird aus der Betrachtung über die Ellipse hervorgehen, als deren Gränzzustand man die Parabel ansehen kann.

Zusatz I. Die Normale MW eines Parabelpunktes M halbirt den, von dem Brennstrahl und dem Parallelstrahl an M gebildeten Winkel. (Daher aus physikalischen Gründen die Benennungen Brennpunkt und Brennstrahl.)

Zusatz II. Die Tangente des Parabelpunktes M schneidet senkrecht die Verbindungslinie des Brennpunktes F mit dem Schnittpunkte K der Richtlinie und des verlängerten Parallelstrahls durch M.

Zusatz III. Durch Verlängerung der Tangente und Achse bis T und Verbindung von T und K entsteht das gleichseitige Parallelogramm FMKT, welches in vier congruente Dreiecke zerfällt.

Zusatz IV. Die aus dem Brennpunkt F einer Parabel auf eine Tangente MT gezogene Senkrechte FC schneidet dieselbe auf einer, im Hauptscheitel errichteten, Senkrechten, da FC : KC = FA : AG.

4. (Fig. 173.) Ein aus dem Convergenzpunkte zweier Parabeltangenten Mm, Nn durch den Brennpunkt der Curve, beschriebener Kreis schneidet die Richtlinie in zwei Punkten K, L, welche in den verlängerten Parallelstrahlen der Berührungspunkte liegen.

Denn zieht man aus M und N die Senkrechten MK = MF und NL = NF auf KL, so ist (nach L. 3) Dr. MKZ ≌ MFZ und Dr. NLZ ≌ NFZ, also KZ = FZ = LZ.

Zusatz I. Zieht man aus einem Punkte Z zwei Tangenten und eine Verbindungslinie zum Brennpunkte der Parabel, so bildet diese Linie mit den Brennstrahlen der Berührungspunkte gleiche Winkel, da W. ZFM = ZKM = ZLN = ZFN.

Zusatz II. Wird zwischen zwei festen Parabeltangenten ZM, ZN eine dritte Tangente mn willkürlich gezogen, so ist ihr Gegenwinkel mFn am Brennpunkte in allen möglichen Lagen constant.

$$\text{Denn da W. } \left.\begin{matrix} \text{MFZ} \\ +\ \text{ZFN} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{W. MFm} + \text{pFm} \\ +\ \text{NFn} + \text{pFn} \end{matrix}\right.$$

so folgt, indem man auf beiden Seiten die Hälfte der paarweise gleichen Winkel nimmt:

$$\text{W. MFZ} = (\text{pFm} + \text{pFn}) = \text{mFn}.$$

Zusatz III. Die aus einem Punkte Z an eine Parabel gezogenen Tangenten ZM, ZN bilden mit einer zum Brennpunkte F gezogenen Geraden und dem Parallelstrahl ZP gleiche Winkel.

Denn zieht man von LZM = LZG + GZM = KZG + GZM die Gleichung FZM = KZM ab, so bleibt LZF = 2GZM, also NZF = MZG.

Zusatz IV. Der Scheitel p eines durch den Convergenzpunkt zweier Parabeltangenten gezogenen Durchmessers pP halbirt eine an ihm gezogene und von jenen begränzte Tangente mn.

Denn da (nach dem Beweise von L. 4), wenn man die Senkrechten

mk und nl zieht, kK = kG, und lG = lL, also Gk = Gl = ¼KL ist, so folgt, daß pm = pn.

Zusatz V. Die Tangenten ZM, ZN werden von der Tangente mn halbirt, da Gk = Kk und km par. KM ist.

5. (Fig. 173.) Alle einer Parabeltangente mn parallel gezogenen Sehnen (MN) werden von dem, durch den Berührungspunkt p gelegten Durchmesser halbirt.

Denn zieht man durch den Berührungspunkt p der Tangente mn den Durchmesser pP, aus einem beliebigen Punkte Z seiner Verlängerung die beiden Tangenten ZM, ZN, und endlich die Sehne MN, so ist (nach L. 4, Zus. IV. und V.):

(1) ZM : Zm = ZN : Zn, also MN der Tang. mn par.;

(2) pm = pn, folglich auch PM = PN.

Zusatz. Die senkrechten Ordinaten der Parabel zu beiden Seiten der Achse sind einander gleich. (Fig. 149.)

6. (Fig. 149.) Die Subtangente PT eines Punktes M der Parabel ist seiner doppelten Abscisse gleich.

Denn da FT = MK = GP, so ist auch GT = FP, und da AG = AF, auch AT = AP oder TP = 2AP.

7. (Fig. 149.) Die Subnormale PW eines Punktes M der Parabel ist dem halben Parameter gleich.

Denn da MP und KG, so wie MW und KF parallel sind, so ist Dr. MPW ≌ KGF, also PW = GF.

8. (Fig. 149.) Die Ordinate PM eines Punktes M der Parabel ist mittlere Proportionale zwischen Abscisse und Parameter.

Denn da TP : PM = PM : PW, so ist (nach L. 6 und 7) PM^2 = TP . PW = 2AP . GF = AP . DE.

Zusatz I. Die Quadrate der Ordinaten PM, P′M′ einer Parabel verhalten sich, wie die zugehörigen Abscissen.

Zusatz II. Wird die Abscisse mit x, die Ordinate mit y und der Parameter mit p angedeutet, so erhält man den Ausdruck $y^2 = px$ als Gleichung der Parabel, übereinstimmend mit derjenigen, welche für den Schnitt eines Kegels CKD (Fig. 148.) und einer, seine Achse KO unter einem Winkel = W. CKD durchschneidenden, Ebene MAm gefunden wird. (§. 345.)

9. (Fig. 149.) Die Tangente TM eines Punktes M der Parabel ist mittlere Proportionale zwischen der doppelten Abscisse und dem doppelten Brennstrahl des Punktes M.

Denn da TW : MT = MT : TP, so ist (nach L. 6) MT^2 = TW . TP = 2KM . 2AP = 2FM . 2AP.

10. (Fig. 150.) Für jeden beliebigen Durchmesser AP der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die zugehörigen Abscissen.

Denn zieht man an den Scheitel A des Durchmessers die Tan-

gente US und ihr parallel eine Sehne MN, beschreibt ferner mit den Brennstrahlen FM und FN aus M und N die einander in F und J schneidenden, so wie die Richtlinie in K und L berührenden Kreise, so liegt der Punkt G, worin KL vom verlängerten Durchmesser (nach L. 5) halbirt wird (nach §. 366, L. 4) zugleich auf der gemeinschaftlichen Secante GI; folglich ist $AP : CB = GA : GC = GF : EF$, oder $AP . EF = CB . GF = \frac{1}{2}GI . GF = \frac{1}{2}GK^2$. Fällt man aus den Punkten M und M' der Parabelsehnen MN, M'N' die Senkrechten MQ, M'Q', so ist

$$(1)\ AP . EF = \tfrac{1}{2}MQ^2;\quad (2)\ AP' . EF = \tfrac{1}{2}M'Q'^2;$$

also $\frac{AP}{AP'} = \frac{MQ^2}{M'Q'^2} = \frac{MP^2}{M'P'^2}$.

Zusatz. Wird durch die Mitte O der Ordinate PM die Gerade OD parallel dem Durchmesser AP gezogen, so beträgt sie drei Viertel der Abscisse AP.

Denn aus der Gleichung $MP^2 : DV^2 = AP : AV$ folgt

$$\frac{MP^2 - DV^2}{DV^2} = \frac{AP - AV}{AV}, \text{ d. i. } \frac{3DV^2}{DV^2} = \frac{VP}{AV},$$

also $DO : AP = 3 : 4$, oder $DO = \frac{3}{4}AP$.

11. (Fig. 150.) Wenn man durch Verbindung der Endpunkte einer Parabelsehne MN mit dem Scheitelpunkte des zugehörigen Durchmessers AP ein Sehnendreieck MNA und auf dessen Seite AM ein anderes solches MAD construirt, so ist jenes achtmal so groß, als dieses.

Denn aus $DO = \frac{3}{4}AP$ und $RO = \frac{1}{2}AP$ folgt $DR : RO = 1 : 2$ oder $DR = \frac{1}{2}RO$. Also ist Dr. $DRM = \frac{1}{2}ROM = \frac{1}{8}AMP$, und da $ARD = MRD$ und $ANP = AMP$, auch Dr. $MDA = \frac{1}{8}MAN$.

12. (Fig. 150.) Der Flächenraum S eines Parabelsegments AMN beträgt zwei Drittel des auf der Sehne MN errichteten, das ganze Segment einschließenden Parallelogramms MNSU.

Denn denkt man sich die Construction der Sehnendreiecke (nach L. 11) unbegränzt fortgesetzt, so erhält man als annähernden Ausdruck für den Flächenraum des Parabelsegments, wenn man das Dr. MNA durch F andeutet, die unendliche Reihe:

$$S = F + 2\left(\frac{1}{8}F\right) + 4\left(\frac{1}{64}F\right) + 8\left(\frac{1}{512}F\right) + \text{ꝛc.}$$

$$= F\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \text{ꝛc.}\right),$$

d. h. (nach §. 137.) $= F\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{4}{3}F$, oder $S = \frac{2}{3}MNSU$.

Zusatz. Eine sehr beachtungswerthe Anwendung findet der vorstehende Satz in Simpson's Regel für Inhaltsberechnungen.

Zerlegt man nämlich die, von einer beliebigen Curve MN . . . . S und den Geraden AM, GS, AG begränzte Fläche (Fig. 150, a) in die Stücke F, F′, F″ . . . ., die AC = CE = EG . . . . zu Grundlinien haben, und halbirt solche in B, D, F . . . ., um aus diesen Punkten Senkrechte zu ziehen, so kann man die Punkte N, P, R . . . ., in denen die Curve davon getroffen wird, als Scheitelpunkte parabolischer Bögen betrachten, die mit den Curvenstücken, MO, OQ, QS fast zusammenfallen. Bezeichnet man die Ordinaten der Reihe nach durch a_1, a_2, a_3 u. s. f. und die gleichen Abstände derselben mit b, so erhält man als Werth von AMNOC:

$$F = 2b \cdot \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) + \tfrac{2}{3}MO \cdot NK.$$

Nun ist aber $NK : NL = MH : MO$ oder $NK \cdot MO = NL \cdot MH$;

ferner $NL = a_2 - \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) = \tfrac{1}{2}(2a_2 - a_1 - a_3)$ und $MH = 2b$,

also $F = b\,(a_1 + a_3) + \tfrac{2}{3}b\,(2a_2 - a_1 - a_3)$

oder kürzer: $F = \tfrac{1}{3}b\,(a_1 + 4a_2 + a_3)$.

Eben so ist $F' = \tfrac{1}{3}b\,(a_3 + 4a_4 + a_5)$,

$F'' = \tfrac{1}{3}b\,(a_5 + 4a_6 + a_7)$,

folglich $F + F' + F'' = \tfrac{1}{3}b\,(a_1 + a_7 + 4\,(a_2 + a_4 + a_6) + 2\,(a_3 + a_5))$.

Angenommen nun, daß die Linie AG statt in 6 allgemein in 2n gleiche Theile zerlegt sei, wird der Ausdruck der sogenannten Simpson'schen Regel allgemein:

$$F = \tfrac{1}{3}b(a_1 + a_{2n+1} + 4(a_2 + a_4 \ldots . + a_{2n}) + 2(a_3 + a_5 \ldots . + a_{2n-1})).$$

B. Die Ellipse.

§. 371. Erklärungen. Der Ort eines Punktes M (Fig. 153), wofür die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F, G unveränderlich ist; oder mit andern Worten: der Scheitelort eines Dreiecks FMG, in welchem die Grundlinie FG und die Summe der Scheitelseiten constant sind, heißt eine Ellipse. Die festen Punkte der Grundlinie werden Brennpunkte und die Scheitelseiten FM, GM Brennstrahlen (auch Zuglinien, Radii vectores) genannt. In dem besonderen Falle, wo dieselben einander gleich sind, entsteht ein gleichschenkliges Dreieck FDG, welches durch die Senkrechte DC in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird. Verlängert man nun die Geraden DC und GF, und macht CA = DG, CB = DF, CE = CD, so wird die Linie AB (d. i. GD + FD = GM + FM) die Hauptachse (große Achse), und DE die Nebenachse (kleine Achse) genannt. Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte, CF oder CG, heißt die Excentricität, und jede durch das Centrum gezogene Gerade ML, welche vom Umfange der Curve begränzt wird,

ein Durchmesser der Ellipse. Einen aus ihrem Mittelpunkt mit der halben Hauptachse CA construirten Kreis nennt man der Ellipse umschrieben, einen solchen, der mit der halben Nebenachse CD beschrieben ist, derselben eingeschrieben. Die Benennungen Sehne, Secante, Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale gelten für die Ellipse im gleichen Sinne, wie für die Parabel (§. 368). Unter Abscissen versteht man Abschnitte der Hauptachse (oder auch der Nebenachse), vom Anfangs- oder Mittelpunkte aus gerechnet, unter Ordinaten Senkrechte von den Endpunkten der Abscissen bis zur Curve. Eine durch den Brennpunkt senkrecht zur Hauptachse gezogene Sehne der Ellipse heißt der Parameter derselben.

§. 372. Lehrsätze über die Ellipse.

1. (Fig. 174.) Jede Ellipse ist Centralort eines Kreises (M), welcher einen ihrer Brennpunkte F und einen aus dem andern Brennpunkte mit der Hauptachse beschriebenen Kreis (G) berührt.

Denn da GI = AB, d. h. GM + MI = GM + MF, also MI = MF, so ist M Mittelpunkt eines F und den Kreis (G) in I berührenden Kreises.

Zusatz. Construirt man mit der Hauptachse AB als Radius den Hülfskreis (Richtkreis der Ellipse) aus dem Brennpunkt F, so ist FE = AB = FL + LG, also LE = LG, d. h. L ist Mittelpunkt eines den Richtkreis (F) und den Brennpunkt G berührenden Kreises.

2. (Fig. 174.) Jeder Durchmesser der Ellipse wird im Mittelpunkt derselben halbirt.

Denn zieht man durch einen beliebigen Punkt M den Radius GI und ihm parallel aus F den Radius FE, so ist Dr. GFI ≅ GFE. W. E = W. I, folglich (nach L. 1.) GMFL ein Parallelogramm und C Halbirungspunkt seiner Diagonalen.

3. (Fig. 153.) Eine Gerade, welche den Nebenwinkel FMI des von zwei Brennstrahlen an einem Ellipsenpunkte M gebildeten Winkels halbirt, ist eine Tangente der Ellipse.

Denn angenommen, MT könne außer M noch irgend einen andern Punkt R mit der Ellipse gemein haben, so wäre GR + RF oder GR + RI = AB = GI, welches unmöglich ist.

Zusatz I. Die Normale eines Ellipsenpunktes M (Fig. 154.) halbirt den an ihm von den Brennstrahlen gebildeten Winkel. (Daher deren Benennung.)

Zusatz II. Die Tangente eines Ellipsenpunktes M (Fig. 174.) durchschneidet senkrecht die Verbindungslinie des einen Brennpunktes F mit dem Durchschnittspunkte I des Richtkreises (G) und des verlängerten Brennstrahls GM.

Zusatz III. Durch Verlängerung von zwei Brennstrahlen FM, GM bis zum Umfange beider Richtkreise (G) und (F) entstehen zwei gleichschenklige ähnliche Dreiecke FMI, GMP, welche von der Tangente RS des Punktes M halbirt werden.

Zusatz IV. Die aus dem Brennpunkt F einer Ellipse auf eine Tangente RS derselben gezogene Senkrechte FS schneidet dieselbe im Umfange des umschriebenen Kreises, da FS : SI = FB : Bb, und folglich (nach §. 365, L. 3) der Ort des Punktes S eine Kreislinie über AB sein muß.

Zusatz V. Legt man in den einer Ellipse umschriebenen Kreis ein Rechteck, und zwar zwei Gegenseiten ST, RU desselben durch die Brennpunkte, so sind die andern Gegenseiten RS, TU Tangenten der Curve.

4. (Fig. 175.) Zieht man an den Endpunkten K, H eines Ellipsendurchmessers Tangenten und ihnen parallel den Durchmesser ML, so sind die durch die Endpunkte L, M gezogenen Parallelen zu KH ebenfalls Tangenten der Ellipse.

Denn da (nach §. 240, L. 3, III.) Viereck CFSM ≌ CLUG, sofern man durch die Brennpunkte die Senkr. RU, ST auf NO und QP zieht, so ist auch Dr. CFS ≌ CGU, also UCS eine in C halbirte Gerade. Ferner ist, da GU = der Par. FS = SI, auch US = GI, und also ein Durchmesser des der Ellipse umschriebenen Kreises. Dasselbe ergiebt sich für RT, wonach RS und TU (L. 3, Zus. V.) Tangenten der Curve sind.

Anmerkung. Zwei Durchmesser ML, KH von der hier erwähnten Beschaffenheit, werden conjugirte Durchmesser der Ellipse genannt.

5. (Fig. 176.) Ein aus dem Convergenzpunkte Z zweier Ellipsentangenten durch einen Brennpunkt der Curve beschriebener Kreis schneidet den zugehörigen Richtkreis in zwei Punkten, welche in den verlängerten Brennstrahlen der Berührungspunkte liegen.

Denn zieht man durch M und N die Brennstrahlen GMK, GNL, so ist MK = MF, W. ZMK = ZMF und NL = NF, W. ZNL = ZNF, also Dr. ZMK ≌ ZMF, Dr. ZNL ≌ ZNF, und demnach ZK = ZF = ZL.

Zusatz I. Zieht man aus einem Punkte Z zwei Tangenten und eine Gerade zum Brennpunkt F einer Ellipse, so bildet diese mit den Brennstrahlen der Berührungspunkte gleiche Winkel, da W. ZFM = ZKM = ZLN = ZFN.

Zusatz II. Wird zwischen zwei festen Elipsentangenten ZM, ZN eine dritte Tangente mn willkürlich gezogen, so ist ihr Gegenwinkel mFn am Brennpunkte in allen möglichen Lagen constant.

Beweis wie zu §. 370, L. 4, Zus. II.

Zusatz III. Die aus einem Punkte Z an eine Ellipse gezogenen Tangenten ZM, ZN bilden mit den zu ihren Brennpunkten gezogenen Geraden ZG, ZF gleiche Winkel.

Beweis wie in §. 370, L. 4, Zus. III.

6. (Fig. 153.) Die senkrechten Ordinaten der Ellipse zu beiden Seiten der Hauptachse sind einander gleich.

Denn angenommen, es wäre $PM > Pm$, also etwa $= PZ$, so würde $GZ + ZF = Gm + mF = GM + MF$ sein, welches (nach §. 237, L. 11) unmöglich ist.

7. (Fig. 153.) Die halbe Nebenachse der Ellipse ist mittlere Proportionale zwischen den Abständen der Scheitelpunkte von einem der beiden Brennpunkte.

Denn es ist $CD^2 = FD^2 - FC^2 = (FD + FC)(FD - FC)$ und da $FD = AC$ ist, $CD^2 = AF \cdot FB$.

Zusatz. Die durch den Brennpunkt einer Ellipse senkrecht zur Hauptachse gezogene Sehne des umschriebenen Kreises N'n' ist der Nebenachse gleich.

8. (Fig. 153.) Der Unterschied der beiden Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes M verhält sich zur doppelten Abscisse desselben wie der Abstand der Brennpunkte zur Hauptachse.

Denn es ist (§. 255, L. 6, Zus. II.):

(1) $(GM - FM) : (GP - FP) = (GP + FP) : (GM + FM)$ oder

(2) $(GM - FM) : (GP - FP) = 2CF : AB$,

und wenn man $GP = GC + CP$ und $FP = CF - CP$ setzt:

(3) $(GM - MF) : 2CP = 2CF : AB$.

Zusatz. Aus den Werthen der Summe und der Differenz zweier Brennstrahlen:

$$(1)\ FM + GM = 2AC;\ (2)\ GM - FM = \frac{2CF \cdot CP}{AC}$$

ergiebt sich

$$\text{I. } GM = CA + \frac{CF \cdot CP}{CA};$$

und

$$\text{II. } FM = CA - \frac{CF \cdot CP}{CA}.$$

9. (Fig. 153.) Die Ordinate PM einer Ellipse verhält sich zur mittleren Proportionale zwischen den Abschnitten AP, PB der Hauptachse wie die Nebenachse zu dieser.

Denn es ist $MP^2 = FM^2 - FP^2$, d. h. (nach L. 8, Zus.)

$$MP^2 = \left(CA - \frac{CF \cdot CP}{CA}\right)^2 - (CF - CP)^2.$$

$$= CA^2 + \frac{CF^2 \cdot CP^2}{CA^2} - CF^2 - CP^2$$

$$= (CA^2 - CP^2) - CF^2 \left(\frac{CA^2 - CP^2}{CA^2}\right)$$

$$= \left(\frac{CA^2 - CF^2}{CA^2}\right)(CA^2 - CP^2),$$

und da $CA^2 - CF^2 = CD^2$, $CA^2 - CP^2 = (CA + CP)(CA - CP)$ ist:

$$MP^2 = \frac{CD^2}{CA^2} . AP . PB \text{ oder } \frac{MP^2}{AP . PB} = \frac{CD^2}{CA^2} = \frac{DE^2}{AB^2}.$$

Zusatz I. Die Ordinate MP einer Ellipse verhält sich zu derjenigen eines umschriebenen Kreises M′P, wie die Nebenachse zur Hauptachse.

Denn es ist $M'P^2 = AP . PB$, also $MP^2 : AP . PB = MP^2 : M'P^2 = DE^2 : AB^2$.

Zusatz II. Bezeichnet man die Abscisse CP mit x, die Ordinate PM mit y, die halben Achsen mit a und b, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ eine Coordinatengleichung für die Ellipse, auf ihren Mittelpunkt bezogen.

Zusatz III. Der Parameter Nn einer Ellipse ist vierte Proportionale zur Hauptachse und Nebenachse.

Denn da (nach Zus. I.) $Nn : N'n' = DE : AB$, und (nach L. 7, Zus.) $N'n' = DE$, so ist $Nn : DE = DE : AB$.

Zusatz IV. Nimmt man den Anfangspunkt der Abscissen im Scheitel A der Ellipse an, und bezeichnet mithin AP durch x, PM durch y, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2} x (2a - x)$, oder wenn man den Parameter $Nn = p$ einführt, da (nach Zus. III.) $p : 2b = 2b : 2a$ oder $b^2 = \frac{1}{2}ap$ ist, ebenfalls $y^2 = \frac{p}{2a} x (2a - x) = px - \frac{p}{2a} x^2$, welche Gleichung mit derjenigen übereinstimmt, die für den Schnitt eines Kegels GKB (Fig. 152.) und einer seine Achse KO unter einem Winkel > W. CKD durchschneidenden Ebene MAm gefunden wird (§. 348.).

10. (Fig. 153.) Eine auf der Nebenachse senkrechte Ellipsenordinate HS verhält sich zur Ordinate WS des eingeschriebenen Kreises, wie die Hauptachse zur Nebenachse.

Denn da $H'V : HV = AC : DC$, so schneidet der Radius $H'C = AC$ die Ordinate HS in einem Punkte W so, daß $WC = DC$.

Zusatz. Wenn man durch die Punkte H′ und W, in denen irgend ein Radius CH′ die um und in der Ellipse beschriebenen

Kreise schneidet, Senkrechte zu deren Achsen zieht, so schneiden dieselben einander im Umfange der Ellipse.

11. (Fig. 154.) Die Subtangente PT der Ellipse für die Abscisse CP ist zugleich Subtangente des umschriebenen Kreises.

Denn angenommen, eine aus dem Endpunkt T der Ellipsentangente MT an den Endpunkt M' der Ordinate PM gezogene Gerade MT wäre nicht Tangente des Kreises, sondern schnitte denselben in irgend einem Punkte N', so wäre (nach L. 9) NQ : N'Q = DE : AB = MP : M'P, welches unmöglich ist, da der Ellipsenpunkt N nicht in der Tangente MT liegen kann.

12. (Fig. 154.) Die Subtangente PT der Ellipse für die Abscisse CP ist vierte Proportionale zu derselben und den beiden Abschnitten AP, PB der Hauptachse.

Denn es ist CP : PM' = PM' : PT, oder CP . PT = M'P² = AP . PB, also CP : AP = PB : PT.

13. (Fig. 154.) Die Subnormale PW der Ellipse für die Abscisse CP verhält sich zu dieser, wie das Quadrat der Nebenachse zu dem der Hauptachse.

Denn es ist (1) WP : PM = PM : PT;
(2) PM : PM' = DE : AB;
(3) PM' : CP = PT : PM';
also (4) WP : CP = PM . DE : PM' . AB;
d. i. nach (2) WP : CP = DE² : AB².

14. (Fig. 154.) Der zum Berührungspunkte M einer Tangente MT der Ellipse gezogene Durchmesser ML halbirt jede derselben parallele Sehne dO.

Denn verlängert man die Sehne dO bis S und zieht die Ordinaten dc, OV, so ist Dr. VOS ∾ PMT, also PT : VS = PM : VO = PM' : VO', folglich auch Dr. PMT ∾ VO'S. Nun convergiren aber die Verlängerungen von SO' und cd in einem Punkte d' des umschriebenen Kreises, da VO : VO' = cd : cd', so daß die Sehne d'O' der Tangente TM' parallel ist, und deshalb vom Radius CM in Z' halbirt wird. Verbindet man nun Z' mit dem Punkte Z, worin Durchmesser und Sehne der Ellipse einander schneiden, so ist CM'T ∾ CZ'S und Dr. CMT ∾ CZS, folglich CM' : CZ = CT : CS = CM : CZ, und demnach ZZ' par. MM', woraus endlich d'Z' : O'Z' = dZ : OZ folgt.

Zusatz. Zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse, wie ML und KH, halbiren gegenseitig die, den Tangenten an ihren Endpunkten parallel gezogenen Sehnen.

15. (Fig. 153.) Der Flächenraum einer Ellipse verhält sich zu dem eines umschriebenen Kreises, wie die Nebenachse zur Hauptachse.

Denn zieht man durch beliebige Punkte V, K, C .... der Haupt-

achse die Senkrechte Hh, Oo . . . . und beschreibt durch Verbindung ihrer Endpunkte Polygone in der Ellipse und dem umschriebenen Kreise, so verhalten sich zwei zusammengehörige Trapeze, z. B. VKOH und VKO'H', wie (KO + VH) : (KO' + VH') = KO : KO' = DE : AB. Bezeichnet man nun solche Trapeze durch p, P; q, Q; r, R . . . . ferner den Flächenraum der Ellipse durch f, den des Kreises durch F, so drückt die Gleichung

$$\frac{f}{F} = \frac{2(p + q + r + \ldots.)}{2(P + Q + R + \ldots.)} = \frac{DE}{AB}$$

das Verhältniß beider Flächenräume um so genauer aus, je kleiner die Seiten der eingeschriebenen Vielecke angenommen werden, da Ellipse und Kreis die Gränzen dieser Polygone sind.

Zusatz. Der Flächenraum einer Ellipse, deren Achsen durch 2a und 2b bezeichnet werden, ist $= \frac{b}{a} . a^2\pi = ab\pi$.

C. Die Hyperbel.

§. 373. Erklärungen. Der Ort eines Punktes M (Fig. 156.) wofür der Unterschied der Abstände von zwei festen Punkten F, G unveränderlich ist, oder mit andern Worten: der Scheitelort eines Dreiecks FMG, in welchem die Grundlinie und die Differenz der Scheitelseiten constant sind, wird eine Hyperbel genannt. Die festen Punkte F, G heißen auch hier Brennpunkte und ihr Abstand vom Mittelpunkte C der Linie FG die Excentricität. Die Hauptachse AB der Hyperbel mit ihren Scheiteln A und B erhält man, indem man zu beiden Seiten des Mittelpunktes C den halben constanten Unterschied der Scheitelseiten des Dreiecks FGM, oder der Brennstrahlen der Hyperbel abträgt. Unter ihrer Nebenachse versteht man die mittlere Proportionale zwischen den Abständen eines Scheitels von beiden Brennpunkten, welche construirt wird, indem man aus dem Centrum C mit der Excentricität CF einen Kreis beschreibt, in beiden Scheiteln A, B der Hyperbel Senkrechte errichtet, ihnen parallel DE durch C, und die Seiten KH, LI des eingeschriebenen Rechtecks zieht. Die in's Unbegränzte verlängerten Diagonalen KI, HL dieses Rechtecks werden Asymptoten der Hyperbel genannt. Eine durch den Mittelpunkt der Hyperbel gelegte und von ihr begränzte Gerade KN (Fig 157.) heißt ein Durchmesser derselben. Die Bedeutung von Sehne, Secante, Tangente u. s. w. ist die nämliche, wie für die Parabel und Ellipse. Die Abscissen werden in der Regel vom Centrum aus gezählt und die Ordinaten als senkrecht auf der verlängerten Hauptachse angenommen. Die durch einen Brennpunkt senkrecht zur verlängerten Hauptachse gezogene Sehne Nn (Fig. 156) ist der Parameter der Hyperbel.

§. 374. Lehrsätze über die Hyperbel.

1. (Fig. 177.) Jede Hyperbel ist Centralort eines Kreises (M),

welcher einen ihrer Brennpunkte F, und einen mit der Hauptachse aus dem andern Brennpunkte beschriebenen Kreis (G) berührt.

Denn da GI = AB, d. h. GM — MI = GM — MF, also MI = MF, so ist M der Mittelpunkt eines den Kreis (G) und den Punkt (F) berührenden Kreises.

Zusatz. Construirt man mit der Hauptachse AB als Radius den Hülfskreis (Richtkreis der Hyperbel) aus dem Brennpunkte F, so ist FE = AB = FL — GL und auch FE = FL — LE, also GL = LE, d. h. L ist Mittelpunkt eines den Richtkreis (F) und den Brennpunkt G berührenden Kreises.

2. (Fig. 177.) Jeder Durchmesser der Hyperbel wird im Mittelpunkte derselben halbirt.

Denn zieht man durch einen beliebigen Punkt M den Radius GI und ihm parallel aus F den Radius FE, so ist Dr. GFI ≌ GFE, W. I = W. E, folglich (nach L. 1) GMFL ein Parallelogramm und C Halbirungspunkt seiner Diagonalen.

3. (Fig. 157.) Eine Gerade MT, welche den von zwei Brennstrahlen an einem Hyperbelpunkte M gebildeten Winkel FMG halbirt, ist eine Tangente der Hyperbel.

Denn angenommen, MT könne außer M noch einen zweiten Punkt R mit der Hyperbel gemein haben, so wäre, wenn MI = MF gemacht und RI gezogen wird, RI = RF, folglich RG — RI = AB = GI oder RG = RI + GI, welches unmöglich ist.

Zusatz I. Die Normale eines Hyperbelpunktes halbirt den Nebenwinkel des, von den beiden Brennstrahlen gebildeten, Winkels.

Zusatz II. Die Tangente eines Hyperbelpunktes M (Fig. 177.) durchschneidet senkrecht die Verbindungslinie des Brennpunktes F mit dem Schnittpunkte I des Richtkreises (G) und des Brennstrahls GM.

Zusatz III. Wenn man den Brennstrahl MF bis P verlängert, so entstehen zwei gleichschenklige ähnliche Dreiecke MIF, PGP, welche die Tangente des Punktes M halbirt.

Zusatz IV. Die aus dem Brennpunkte einer Hyperbel auf eine Tangente senkrecht gezogene Gerade FS (oder GR) schneidet dieselbe im Umfange des über der Hauptachse AB beschriebenen Kreises da FS : SI = FA : Aa (§. 365, L. 3.).

Zusatz V. Construirt man in dem, über der Hauptachse der Hyperbel beschriebenen, Kreise ein Rechteck so, daß zwei Gegenseiten TS, RU desselben durch die Brennpunkte gehen, so sind die andern Gegenseiten RS, TU Tangenten der Curve.

4. (Fig. 157.) Die Tangente eines Hyperbelpunktes M schneidet die Hauptachse in einem Abstande vom Brennpunkte, der sich zum Abstande beider Brennpunkte verhält, wie der kleinere Brennstrahl FM zur Summe beider Brennstrahlen.

Denn es ist (nach §. 255, L. 2) GT : FT = GM : FM,

also auch $(GT + FT) : FT = (GM + FM) : FM$ oder
$FT : GF = MF : (GM + MF)$.

5. (Fig. 156.) Die senkrechten Ordinaten der Hyperbel zu beiden Seiten der verlängerten Hauptachse sind einander gleich.

Denn da Mm die Gerade GP senkrecht schneidet, so ist

(1) $MG^2 - MF^2 = mG^2 - mF^2$, oder

(2) $(MG + MF)(MG - MF) = (mG + mF)(mG - mF)$.

Da nun nach der Def. $MG - MF = mG - mF$, so ist

(3) $MG + MF = mG + mF$ und durch Addition

(4) $MG = mG$, folgt auch $MP = mP$.

6. Die Summe der beiden Brennstrahlen eines Hyperbelpunktes M verhält sich zur doppelten Abscisse desselben, wie der Abstand der Brennpunkte zur Hauptachse.

Denn es ist (§. 255, L. 6, Zus. II.):

(1) $(GM - FM) : (GP - FP) = (GP + FP) : (GM + FM)$ oder

(2) $AB : GF = (GP + FP) : (GM + FM)$,

und wenn $GP = CP + GC$, $FP = CP - CF$ gesetzt wird,

(3) $(GM + FM) : 2CP = 2CF : AB$.

Zusatz. Da nach der Def. (1) $GM - FM = 2AC$,

und nach dem Vorhergehenden (2) $GM + FM = \frac{2CF \, . \, CP}{CA}$;

$$\text{so folgt I. } GM = \frac{CF \, . \, CP}{CA} + CA;$$

$$\text{II. } FM = \frac{CF \, . \, CP}{CA} - CA.$$

7. (Fig. 156.) Die Ordinate PM einer Hyperbel verhält sich zur mittleren Proportionale zwischen den Abschnitten AP, BP der verlängerten Hauptachse, wie die Nebenachse zu dieser.

Denn es ist $MP^2 = FM^2 - FP^2$, d. h. (nach L. 6, Zus.):

$$MP^2 = \left(\frac{CF \, . \, CP}{CA} - CA\right)^2 - (CP - CF)^2$$

$$= \frac{CF^2 \, . \, CP^2}{CA^2} + CA^2 - CP^2 - CF^2$$

$$= CF^2\left(\frac{CP^2 - CA^2}{CA^2}\right) - (CP^2 - CA^2)$$

$$= \left(\frac{CF^2 - CA^2}{CA^2}\right)(CP^2 - CA^2); \text{ und da}$$

$CF^2 - CA^2 = CD^2$, $CP^2 - CA^2 = (CP - CA)(CP + CA)$ ist

$$MP^2 = \frac{CD^2}{CA^2} \, . \, AP \, . \, PB \text{ oder } \frac{MP^2}{AP \, . \, BP} = \frac{CD^2}{CA^2} = \frac{DE^2}{AB^2}.$$

Zusatz I. Ist die Nebenachse der Hauptachse gleich, also die Hyperbel eine gleichseitige, so ist $MP^2 = AP \, . \, BP$; und wenn man aus P (Fig. 178.) eine Tangente PT an den Kreis über der Hauptachse zieht, $MP^2 = PA \, . \, PB = PT^2$, also $MP = PT$.

Zusatz II. Der Parameter der gleichseitigen Hyperbel ist jeder ihrer Achsen gleich. (Fig. 178.)

Denn da $FN^2 = FA \cdot FB$ und (nach §. 373.) $CD^2 = AF \cdot AG = FA \cdot FB$, so ist $FN = CD$ oder $Nn = DE$.

Zusatz III. Die Ordinate MP (Fig. 156.) einer ungleichseitigen verhält sich zu derjenigen M'P einer gleichseitigen Hyperbel von der nämlichen Hauptachse, wie ihre Nebenachse zu dieser.

Denn da $M'P^2 = PA \cdot PB$, so ist $MP^2 : PA \cdot PB = MP^2 : M'P^2 = DE^2 : AB^2$.

Zusatz IV. Setzt man die Abscisse CP einer beliebigen Hyperbel (Fig. 156.) $= x$, die Ordinate $PM = y$, die Hauptachse $AB = 2a$, die Nebenachse $DE = 2b$, so ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x - a)(x + a) = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

die auf das Centrum bezogene Gleichung der Hyperbel.

Zusatz V. Der Parameter einer Hyperbel MAm (Fig. 156.) ist vierte Proportionale zu ihrer Hauptachse und Nebenachse.

Denn da (nach Zusatz III.) $GN : GN' = DE : AB$ und (nach Zusatz II.) $GN' = CD$, so ist $2GN : 2CD = DE : AB$ oder $AB : DE = DE : Nn$.

Zusatz VI. Betrachtet man den Scheitel A als Anfangspunkt der Abscissen, so daß $AP = x$, $PM = y$ sei, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2} x(2a + x)$; oder wenn man den Parameter $Nn = p$ setzt; da (nach Zus. V.) $2a : 2b = 2b : p$ oder $b^2 = \frac{1}{2}ap$ ist, ebenfalls $y^2 = \frac{p}{2a} x(2a + x) = px + \frac{p}{2a} x^2$; übereinstimmend mit der Gleichung, welche man für den Schnitt eines Kegels RKS (Fig. 155.) und einer Ebene MAm erhält, wenn diese seine Achse KO unter einem Winkel < W. CKD durchschneidet.

8. (Fig. 156.) Die Asymptoten CT, CU treffen die Hyperbel nicht, wie weit sie auch verlängert werden.

Denn angenommen, es könne irgend ein Punkt M mit R zusammenfallen, so wäre (nach L. 7.) (1) MP^2 (oder RP^2) $: AP \cdot BP = CD^2 : CA^2$, und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke (2) $RP^2 : CP^2 = AK^2 : CA^2 = CD^2 : CA^2$. Hieraus würde folgen, daß $AP \cdot BP = CP^2$, welches unmöglich ist, weil (3) $AP \cdot BP = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$.

9. (Fig. 156.) Wenn man eine Hyperbelsehne Mm bis zu den Asymptoten verlängert, so ist das Produkt (Rechteck) aus den Theilen MR und Mr dem Quadrate der halben Nebenachse gleich.

Denn es ist nach vorigem Beweise:

$$(1)\ MP^2 = \frac{CD^2}{AC^2} \cdot AP \cdot BP;\ (2)\ RP^2 = \frac{CD^2}{AC^2} CP^2;$$

(3) $AP \cdot BP = CP^2 - CA^2$.

Also (4) $(RP^2 - MP^2) = \frac{CD^2}{AC^2}(CP^2 - AP \cdot BP)$

$$= \frac{CD^2}{AC^2} \cdot CA^2 = CD^2,$$

oder (5) $(RP + MP)(RP - MP) = Mr \cdot MR = CD^2$.

10. (Fig. 157.) Die Theile einer Hyperbel-Secante Zz, welche zwischen der Curve und den Asymptoten liegen, sind einander gleich.

Denn es ist

(1) $NS \cdot Ns = hV \cdot hv$, und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

(2) $NZ : NS = hZ : hV$ oder $NS = \frac{NZ \cdot hV}{hZ}$;

(3) $hz : hv = Nz : Ns$ oder $Ns = \frac{Nz \cdot hv}{hz}$; also

(4) $\left(\frac{NZ \cdot hV}{hV}\right)\left(\frac{Nz \cdot hz}{hz}\right) = hV \cdot hv$ oder $= \frac{NZ}{hZ} \cdot \frac{Nz}{hz} = 1$.

Daraus folgt

(5) $\frac{Nz}{hz} = \frac{hZ}{NZ}$, oder $\frac{Nz - hz}{hz} = \frac{hZ - NZ}{NZ}$,

d. i. $Nh : hz = Nh : NZ$, also $hz = NZ$.

11. (Fig.. 156.) Das Produkt (Rechteck) der Asymptoten-Coordinaten CV, VM beliebiger Punkte einer Hyperbel ist immer constant.

Denn es ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke:

(1) $\frac{MV}{Mr} = \frac{CK}{L}$; (2) $\frac{MO}{MR} = \frac{CL}{KL}$;

(3) $MV \cdot MO = \frac{CK}{KL} \cdot \frac{CL}{KL} \cdot Mr \cdot MR$, oder (nach L. 9.)

(4) $MV \cdot MO = \frac{CK^2}{KL^2} \cdot CD^2$.

12. Die Segmente einer beliebigen Hyperbel und einer gleichseitigen derselben Hauptachse verhalten sich wie ihre zusammengehörigen Ordinaten.

Der Beweis nimmt denselben Gang wie in §. 372, L. 15.

§. 375. Aufgaben.

1. Eine Parabel zu construiren, wenn ihr Brennpunkt und die Richtlinie gegeben sind. Fig. 149.
2. Eben so wenn ihr Parameter $= p$ gegeben ist.
3. Von einem Punkte T der Achse einer Parabel Tangenten an dieselbe zu ziehen, wenn nicht die Curve selbst, sondern Brennpunkt und Richtlinie derselben gegeben sind.
4. Von einem beliebigen außer der Parabel liegenden Punkte V Tangenten an dieselbe zu ziehen.
5. Außer einem Punkte M einer Parabel sei ein Durchmesser AP

nebst Tangente AU an dessen Scheitel gegeben. Brennpunkt und Richtlinie hieraus zu bestimmen. Fig. 150.

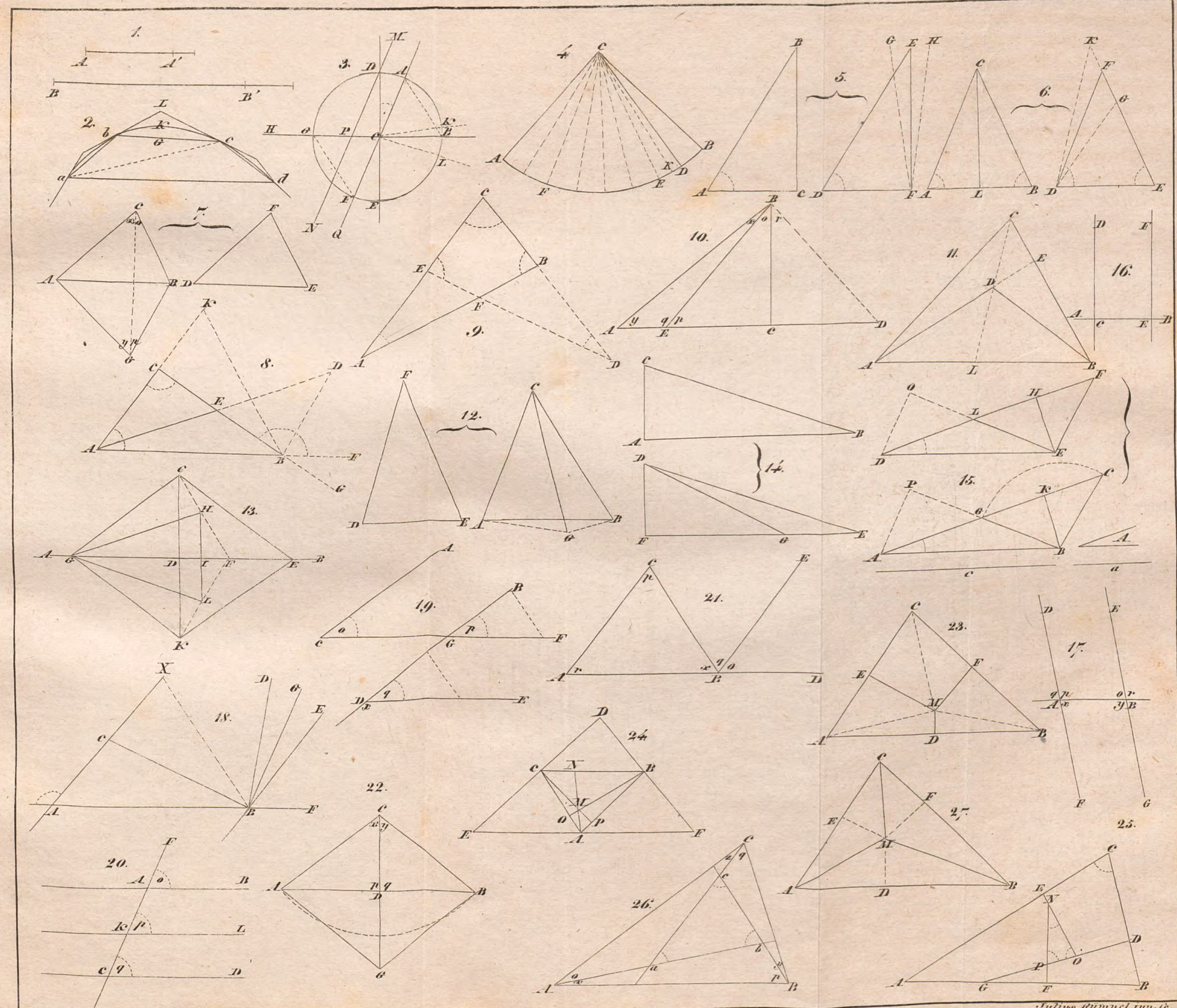
6. Den Parameter einer Parabel zu finden, wenn irgend eine Sehne MN nebst dem Scheitelpunkte des zugehörigen (conjugirten) Durchmessers AP gegeben ist. Fig. 150.
7. In einer Parabel verhalte sich die Abscisse AV zur zugehörigen Ordinate VD = 2 : 7. Hieraus den Flächeninhalt eines Segments AMN derselben zu bestimmen, welches von einer Sehne MN = 16 und parallel VD begränzt wird. Fig. 150.
8. Aus dem Flächeninhalt = 178,42 eines Parabelsegments AMN, dessen Sehne MN die Achse rechtwinklig schneidet, und der Abscisse AP = 10 die Sehne MN zu bestimmen.
9. Eine Ellipse aus ihren beiden Achsen = m und n in Folge der Definition zu construiren. Fig. 153.
10. Desgl. als Centralort eines berührenden Kreises. Fig. 174.
11. Desgl. vermöge des umschriebenen Kreises durch Ordinaten. Fig. 153.
12. Desgl. vermöge des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises. Fig. 153.
13. An einem Punkte M der Ellipse eine Berührende zu ziehen.
14. Von einem Punkte T der verlängerten Hauptachse eine Tangente an die Ellipse zu ziehen. Fig. 153.
15. Von einem beliebigen Punkte U außer der Ellipse Tangenten an dieselbe zu ziehen. Fig. 154.
16. Eine Ellipse zu construiren, wenn außer ihrer Hauptachse nur ein Punkt H derselben gegeben ist.
17. Desgl., wenn die Hauptachse und irgend eine Tangente RM gegeben sind. Fig. 153.
18. Desgl., wenn ein Brennpunkt F und irgend ein Durchmesser ML gegeben sind. Fig. 153.
19. Zu irgend einem Durchmesser ML der Ellipse den conjugirten Durchmesser zu finden. Fig. 153.
20. Den Flächeninhalt einer Ellipse zu bestimmen, wenn die Achsen = 32 und 26 sind.
21. Eine Hyperbel der Definition gemäß aus ihren Achsen = m und n zu construiren. Fig. 156.
22. Desgl. als Centralort eines berührenden Kreises. Fig. 177.
23. Eine gleichseitige Hyperbel zu construiren. Fig. 178.
24. An einem Punkte M der Hyperbel eine Berührende zu ziehen.
25. Desgl. von einem Punkte T der verlängerten Hauptachse aus an die Curve. Fig. 157.
26. Desgl. von einem beliebigen Punkte R außer der Curve. Fig. 157.
27. Eine Hyperbel zu construiren, wenn außer ihrer Hauptachse nur ein Punkt M gegeben ist. Fig. 157.

28. Desgl., wenn die Brennpunkte F, G und eine Tangente RT der Curve gegeben sind. Fig. 157.

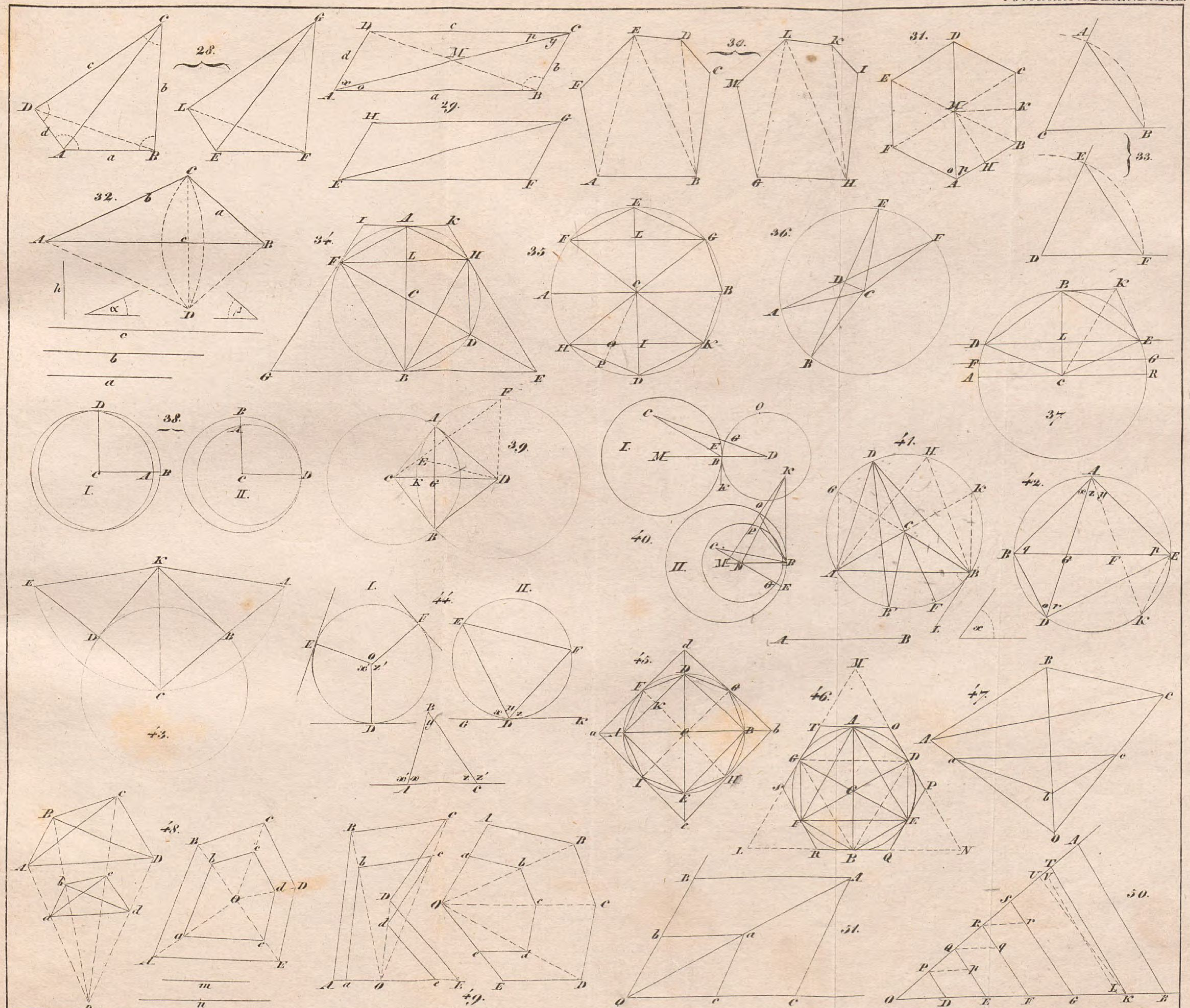
29. Desgl., wenn ihre Asymptoten und irgend ein Punkt M der Curve gegeben sind. Fig. 157.

30. Das Segment MAm einer Hyperbel zu bestimmen, wenn das von der nämlichen Sehne Mm begränzte Segment M'Am' einer gleichseitigen Hyperbel von der nämlichen Hauptachse $= 215{,}37$ gegeben ist. Fig. 156.

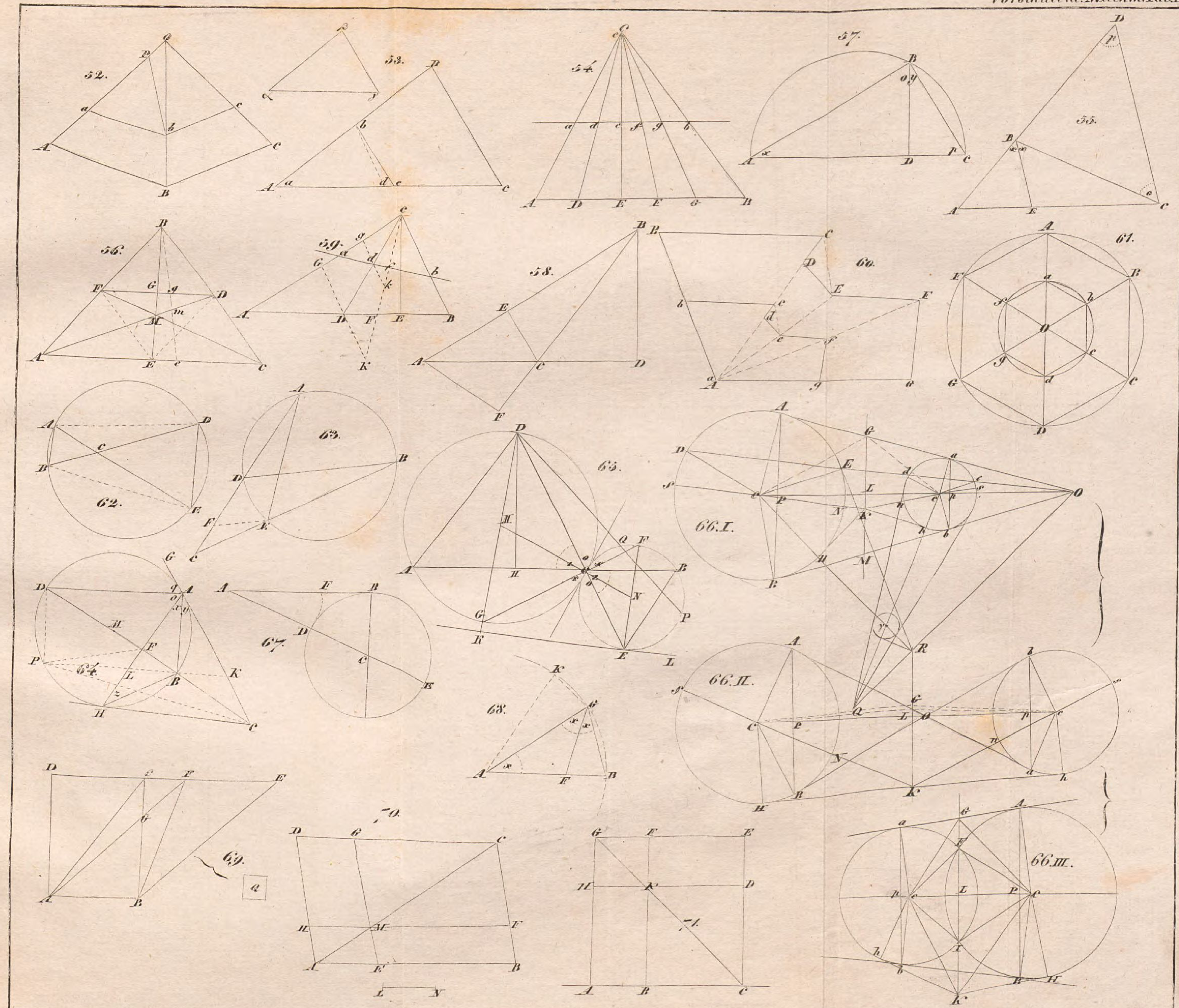
Berlin, gedruckt bei A. W. Hayn.

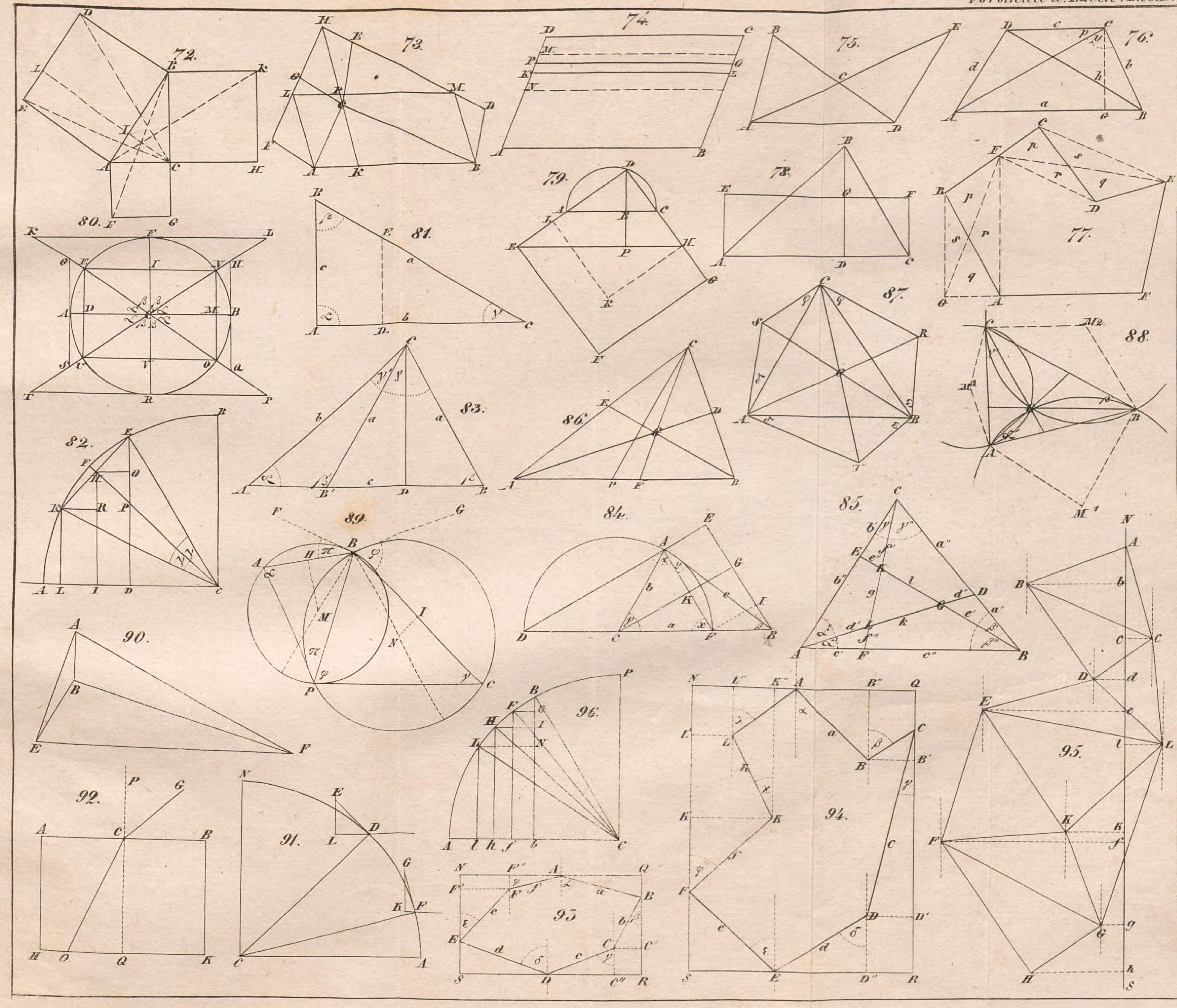


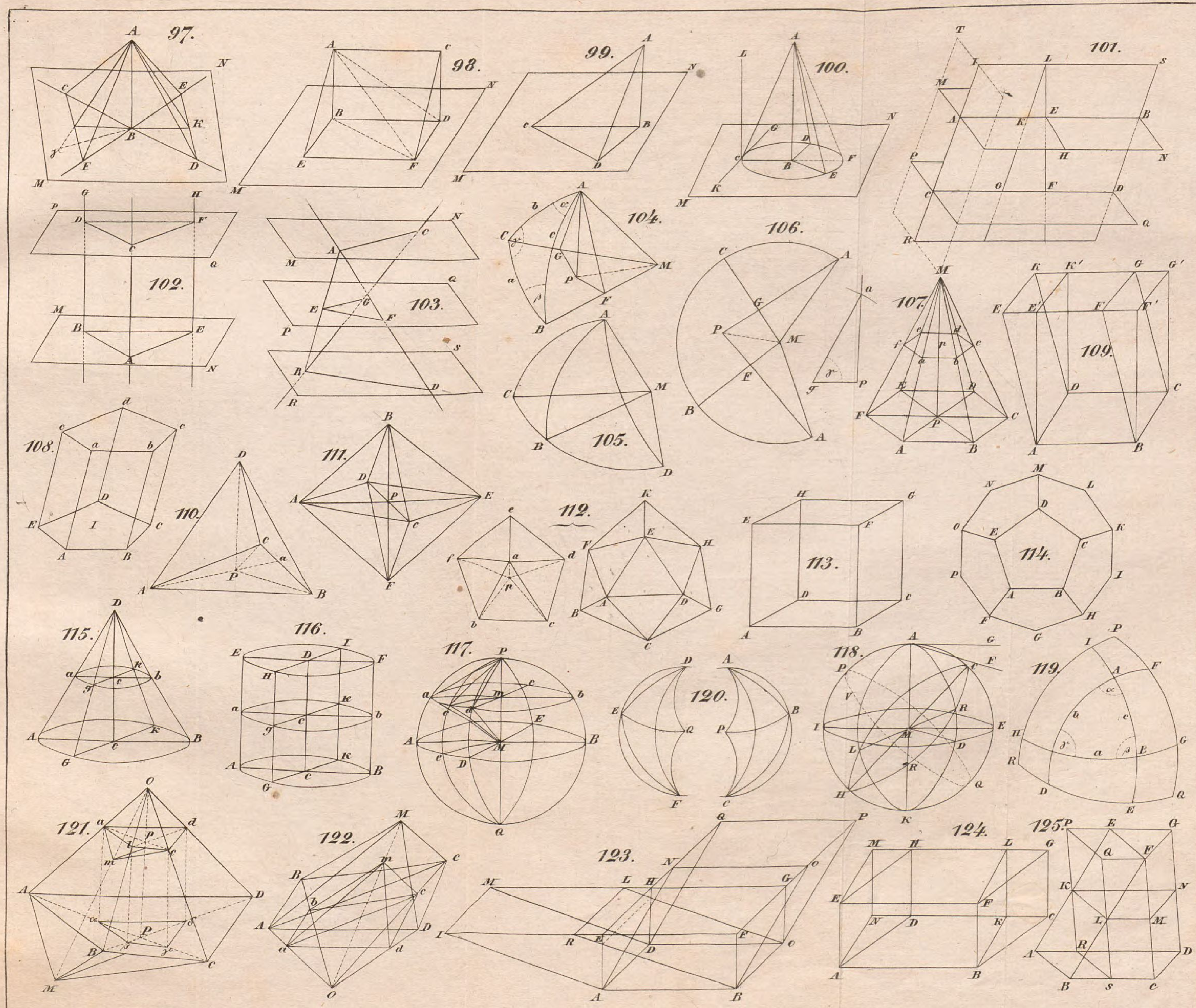
Julius Gumpel, jun. sc.

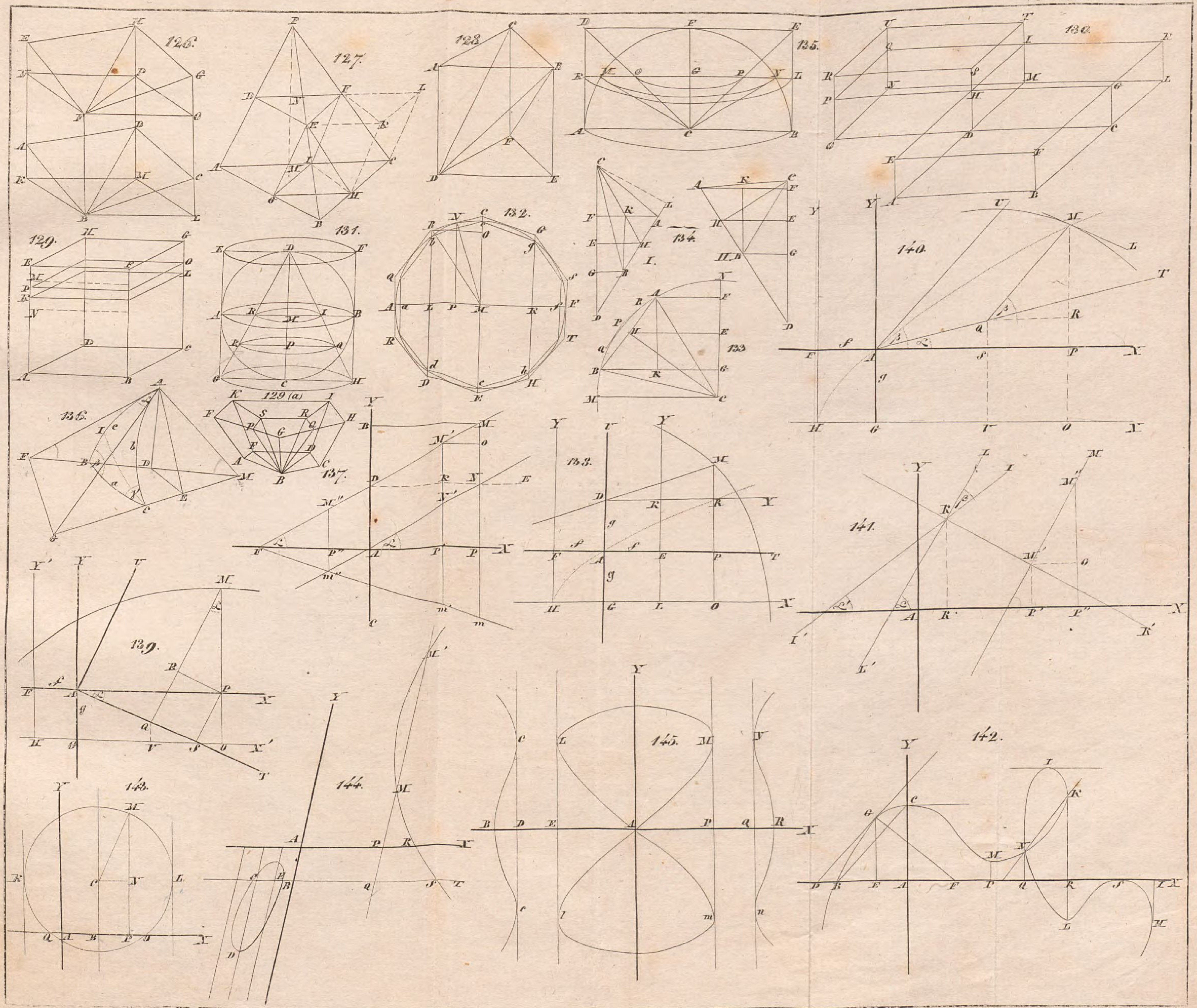


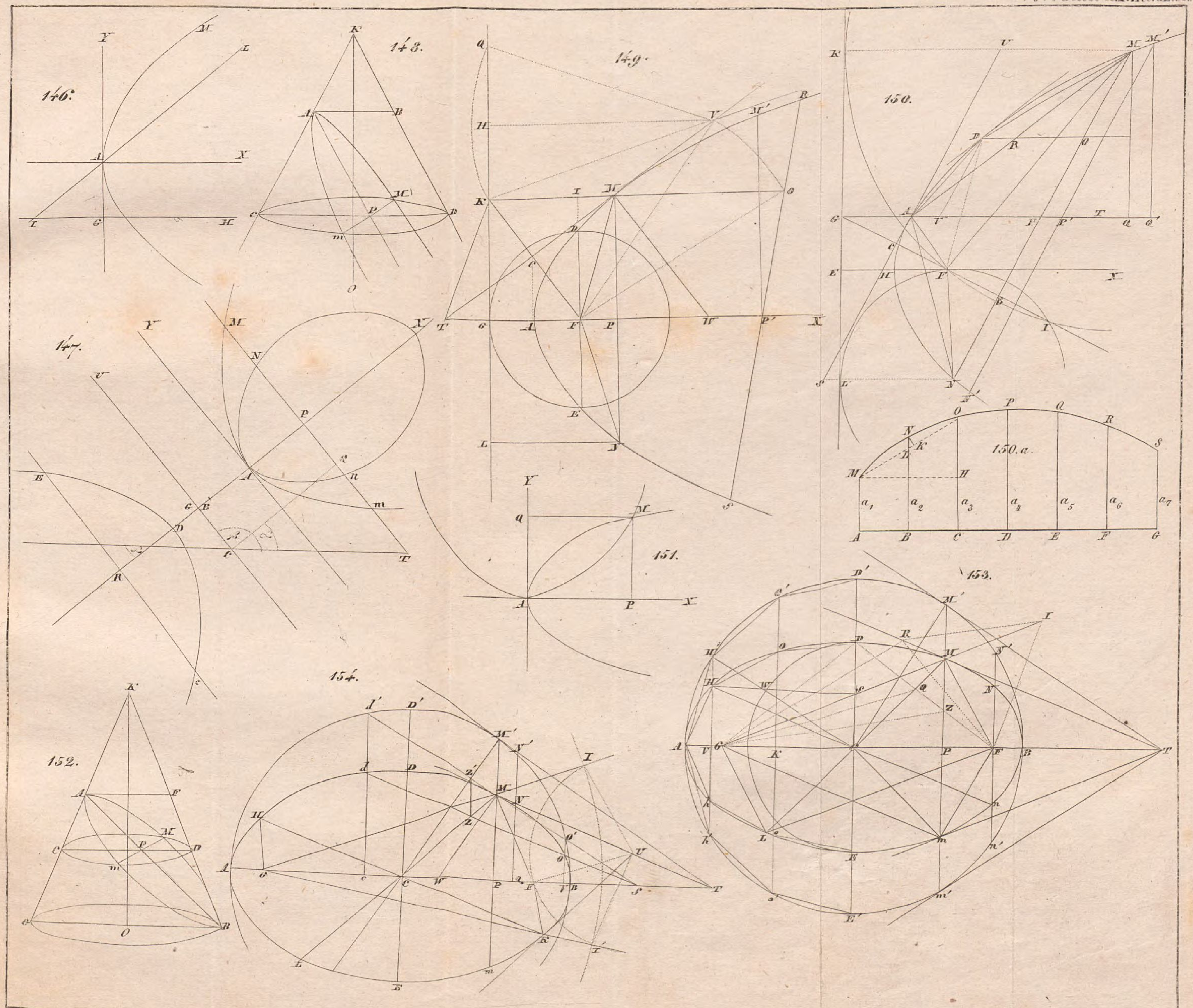
Grünpl. sc.


52.
53.
54.
57.
55.
56.
59.
58.
60.
61.
62.
63.
65.
66. I.
64.
67.
68.
66. II.
69.
70.
71.
66. III.

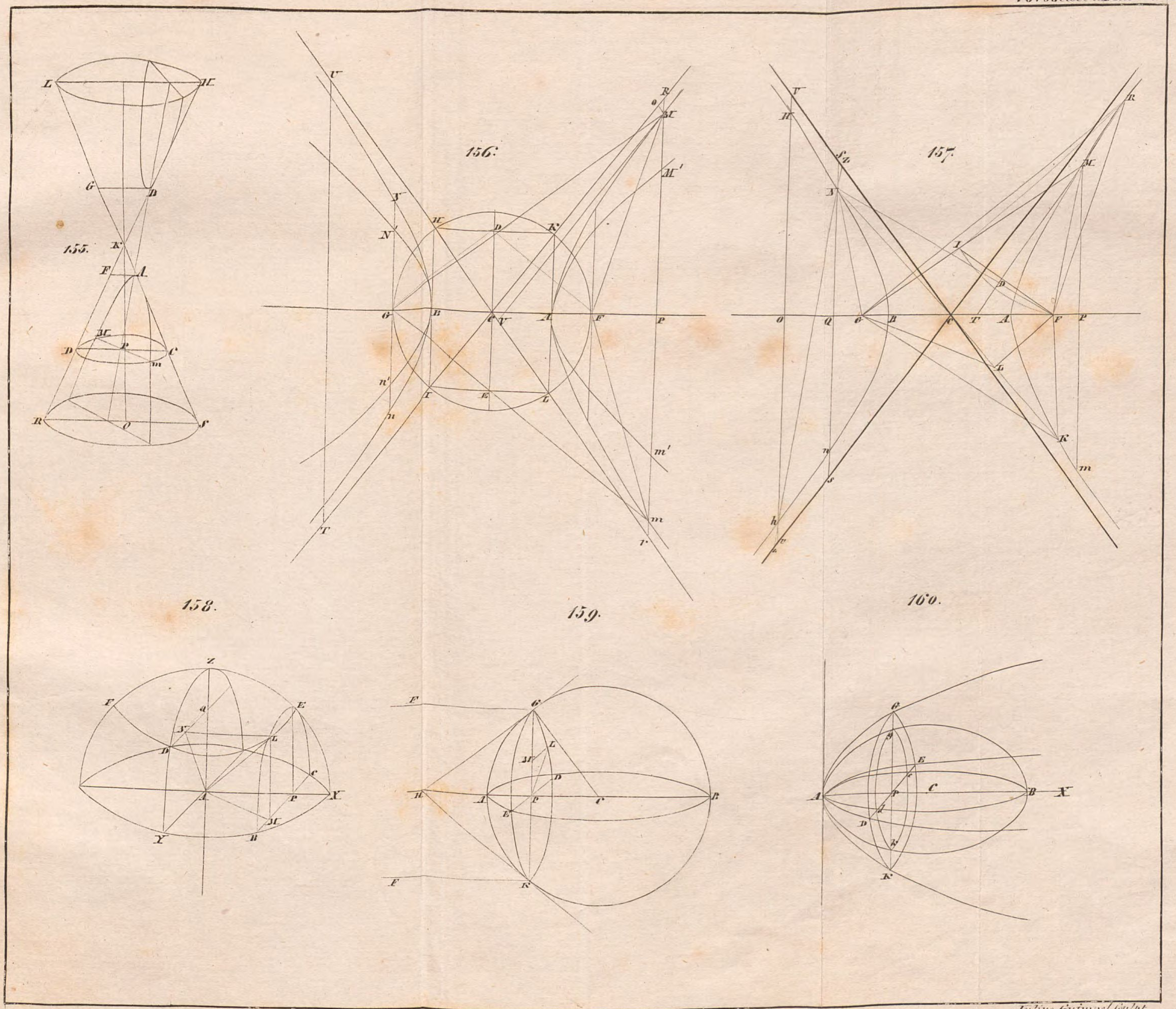

72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.


97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.

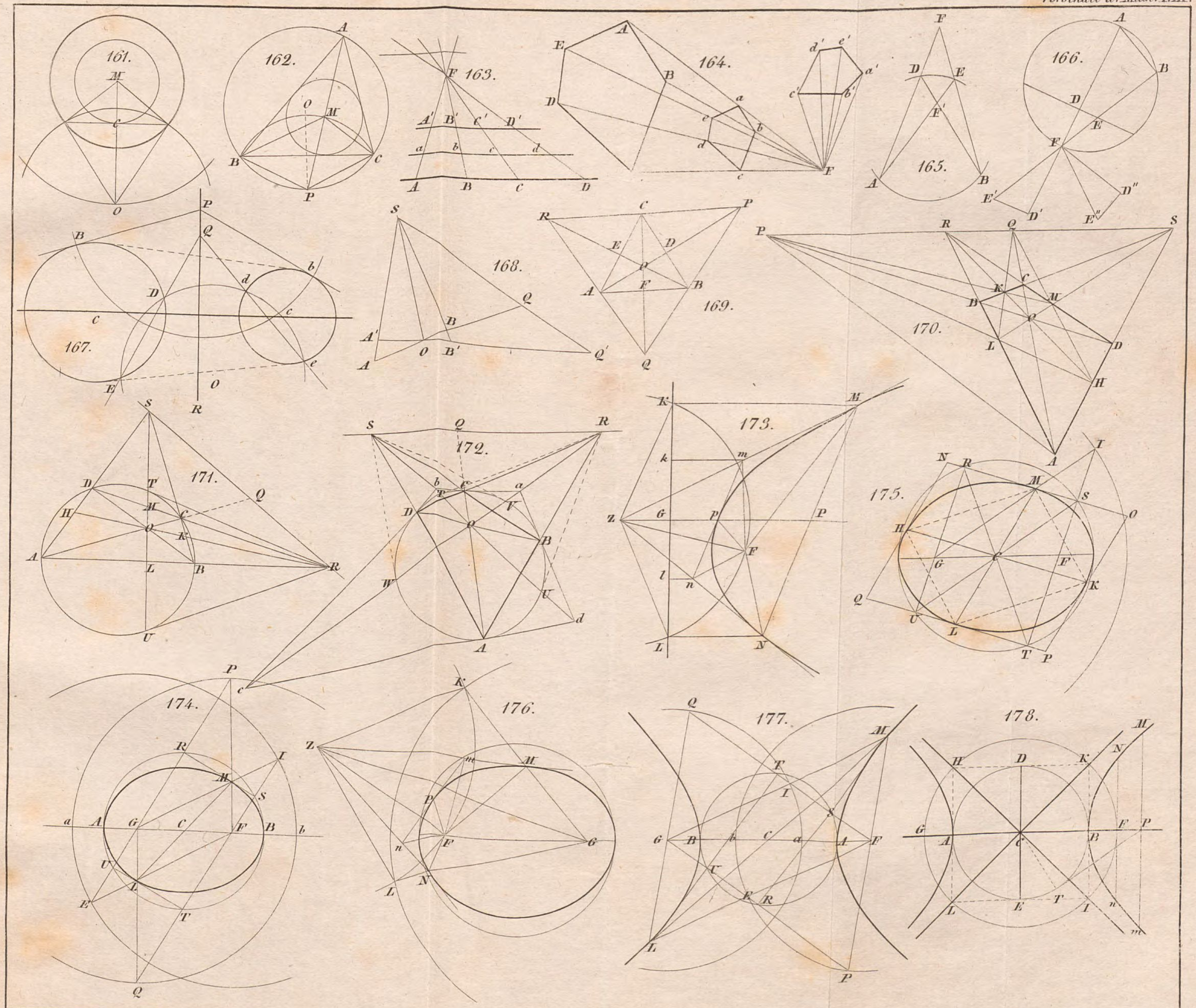




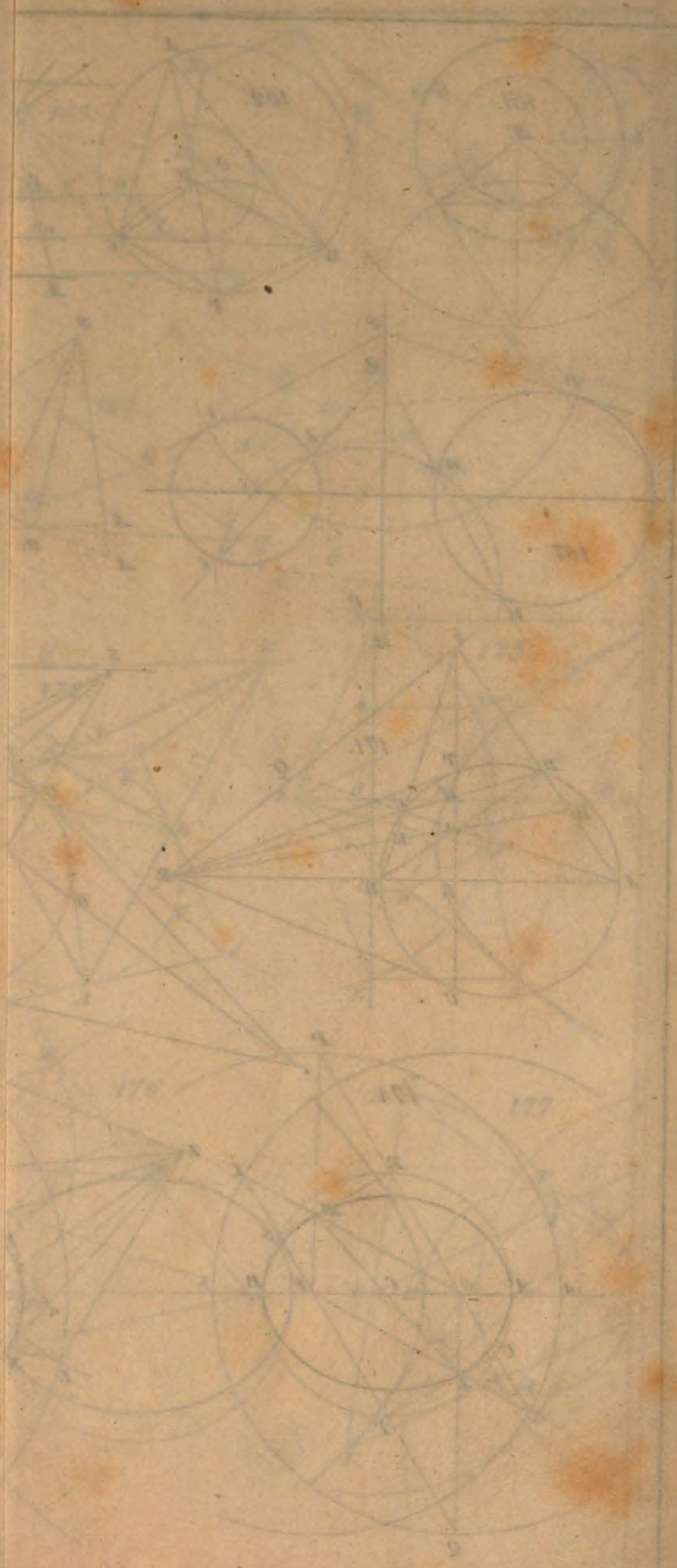
Gwinpl sc.



Julius Grimpel sculpt.



G. Hagenhöfer sc.



Tellkampf, Adolf,

Vorschule der Mathematik Mit 9 Kupfertafeln

Berlin 1856